

**Библиотека  
Инженера**

**S**  
«СОЛОН»

Литюк В. И., Литюк Л. В.

# МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ОБРАБОТКИ АНСАМБЛЕЙ РАДИОСИГНАЛОВ

Микропроцессоры для ЦОС

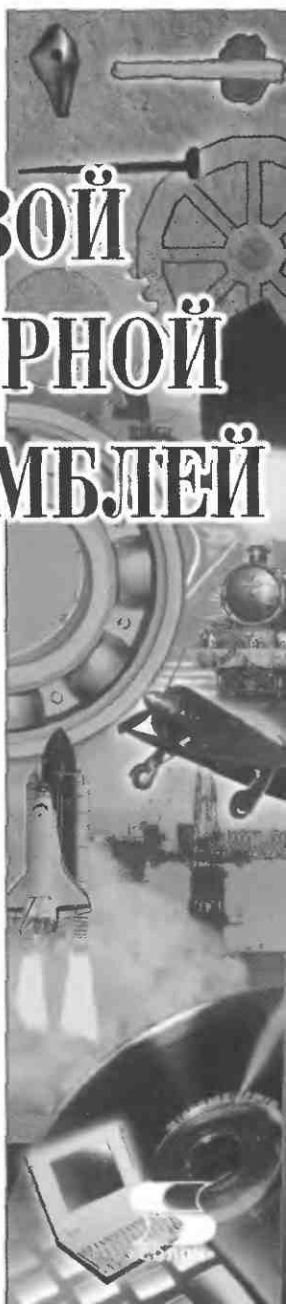
Виды радиоприемных устройств

Цифровые многопроцессорные фильтры

Обработка двумерных сигналов

Селекция сигналов движущихся целей

Находка для специалиста!



*Серия «Библиотека инженера»*

**В. И. Литюк, Л. В. Литюк**

**МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ  
МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ  
ОБРАБОТКИ АНСАМБЛЕЙ  
РАДИОСИГНАЛОВ**

**Москва  
СОЛОН-ПРЕСС  
2007**

ББК 32.973.26-018.2  
УДК 621.391.24.037.372+  
621.372.54.083.92.001.2  
Л64

Литюк В. И., Литюк Л. В.

Л64 Методы цифровой многопроцессорной обработки ансамблей радиосигналов. — М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2007. — 592 с.: ил. — (Серия «Библиотека инженера»)

ISBN 5-98003-303-3

Монография посвящена вопросам обработки на цифровых многопроцессорных вычислительных системах (МВС) ансамблей радиосигналов, полоса которых превышает быстродействие используемых цифровых функциональных узлов в заданное число раз. При этом обработка может осуществляться как в режиме работы вычислительной системы «скачущее» окно, так и «скользящее», причем сигналы могут быть представлены как в многократной, так и в бинарно-квантованной формах. С единых позиций рассматриваются вопросы обработки ансамблей сложных сигналов, поступающих с выходов линейных трактов радиоприемных устройств различного назначения. Рассмотрены виды современных МВС, особенности современных микропроцессоров, предназначенных для цифровой обработки сигналов (ЦОС), дается математическое описание радиосигналов, подлежащих цифровой обработке. Представлены методы синтеза цифровых многопроцессорных фильтров и анализаторов спектра, осуществляющих обработку и анализ в режимах работы «скачущее» и «скользящее» окно в условиях, когда на их входы поступают распараллеленные входные радиосигналы. Описываются методы синтеза и анализа устройств измерения параметров радиосигналов при различных формах их цифрового представления. Излагаются новые подходы по синтезу и анализу ансамблей сложных сигналов и устройств их обработки с учетом особенностей МВС применительно к задачам радиосвязи и радиолокации.

Данная монография рассчитана на научных работников, преподавателей, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов радиотехнических специальностей, работающих в области цифровой обработки сложных радиосигналов на МВС.

По вопросам приобретения обращаться:

ООО «АЛЬЯНС-КНИГА КТК»

Тел: (495) 258-91-94, 258-91-95, www.abook.ru

Сайт издательства «СОЛОН-Пресс»: www.solon-press.ru

E-mail: solon-avtor@coba.ru

ISBN 5-98003-303-3

© Макет и обложка «СОЛОН-ПРЕСС», 2007

© Литюк В. И., Литюк Л. В., 2007

## ВВЕДЕНИЕ

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) интенсивно развивается уже более 40 лет. При этом в публикациях, посвященных ЦОС, в течение довольно длительного времени рассматривались задачи, решение которых находилось безотносительно условий их реализации. Это приводило к тому, что основные результаты были получены в обстоятельствах, связанных с моделированием работы на универсальных ЦВМ тех или иных информационных систем. По мере того как повышалось быстродействие используемых для моделирования ЦВМ, разработанные цифровые алгоритмы начали находить применение при обработке сигналов в реальном масштабе времени для сравнительно узкополосных процессов, спектр которых располагался в области инфранизких частот. К таким сигналам, в частности, можно отнести сейсмические и биомедицинские сигналы.

Более высокое быстродействие цифрового вычислителя для решения задач в реальном масштабе времени удавалось добиться при построении однопроцессорных специализированных вычислителей, ориентированных на решение конкретных задач. Однако подобные устройства, вследствие ограничений, присущих уровню развития элементной базы, оказались недостаточно конкурентоспособными.

В свою очередь, поиск алгоритмов, позволяющих более эффективно использовать универсальные ЦВМ для решения задач вычисления интеграла свертки, привел к появлению алгоритмов, основанных на «быстрых» процедурах расчета. Подобные алгоритмы были предложены для их реализации на однопроцессорных универсальных ЦВМ Кули и Тююки в 1965 году и основаны на разработанном в начале XX века Рунге методе вычисления коэффициентов Фурье функций, заданных графически или таблично. Эти алгоритмы более известны как алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ). Использование подобных алгоритмов позволяло для случаев, когда начало и конец входной реализации известно строго (или когда без потери информации возможно разбиение реализации на заданные отрезки с фиксированным шагом), решать задачу свертки в реальном масштабе времени.

ропанным количеством отсчетов), обрабатывать процессы, полосы которых в десятки раз превышают полосу себестоимых и биосигналов.

Параллельно с разработкой алгоритмов и методов ЦОС происходило развитие цифровой вычислительной техники как в направлении повышения ее производительности, так и в направлении миниатюризации, уменьшения потребления энергии, повышения надежности.

Успехи в создании большого количества вентилей на одном кристалле (достигающем в настоящее время до  $10^9$  единиц), позволило реализовать микропроцессорные комплексы различного назначения, которые в последнее время начали широко применяться и для решения задач ЦОС. Однако ограничения, свойственные однопроцессорным ЦВМ, также свойственны и вычислителям, выполненным на однопроцессорных БИС той или иной разновидности.

Задача повышения производительности вычислительного процесса за счет распараллеливания обработки на многопроцессорных вычислительных системах (МВС), выполняемых на основе либо универсальных ЦВМ, либо путем объединения микропроцессоров общего назначения, не получила удовлетворительного решения вследствие возникающих трудностей по управлению подобным комплексом, трудностями программирования и синхронизации процессов обмена.

Тем не менее, полученный опыт создания таких вычислительных комплексов привел к появлению МВС, выполняемых на основе специализированных микропроцессоров.

Использование подобных микропроцессоров в МВС позволяет, при наложении ряда ограничений по функциональным возможностям на каждый из них, добиться устранения ограничений, свойственных многопроцессорным системам, выполняемым на базе универсальных ЦВМ или микропроцессоров общего применения.

В свою очередь, современные МВС условно можно разделить на два больших подкласса. К первому из них относят систолические МВС, архитектура которых на этапе проектирования задается полностью и которые, как правило, выполняются в виде сверхбольших интегральных схем (СБИС). Особенностью таких СБИС является то, что на одном кристалле могут находиться сотни микропроцессоров, каждый из которых, как правило, соединен только с находящимися рядом.

Архитектура второго подкласса МВС на этапе проектирования задается не полностью и доопределяется на этапе программирования той или иной задачи. Последнее позволяет получать более высокую производительность вычислителей, носящих название многопроцессорных систем с программируемой архитектурой (МВС ПА).

Следует сказать, что в ЦОС наиболее удобным для реализации на МВС алгоритмом с распараллеленной обработкой данных явился алгоритм БПФ.

Последнее связано с возможностью параллельной подачи входных данных, его регулярностью, а также рядом таких немаловажных особенностей как одинаковое время выполнения операций в каждом микропроцессоре, реализуя базовую операцию БПФ. Данные обстоятельства привели к тому, что производительность подобных вычислителей достигла величины  $10^9$ - $10^{10}$  операций в секунду, что позволило обрабатывать процессы, полосы которых достигала единиц и десятков мегагерц.

Разработка алгоритмов, которые обеспечивали бы обработку сигналов с полосами единицы и десятки мегагерц путем непосредственного вычисления интеграла свертки за счет использования свойств, присущих многопроцессорному вычислителю, позволила снять ограничения, свойственные алгоритмам БПФ. Однако эти алгоритмы, в связи с недавним их появлением, не получили подробного освещения в литературе. Известные работы в этом направлении находятся в различного вида публикациях, что затрудняет эффективное их использование при построении различного рода устройств ЦОС.

Поэтому, учитывая, что за последнее время появилось много работ по современным методам ЦОС, данная работа рассматривает многие методы и алгоритмы с учетом современного состояния вычислительной техники и возможности реализации указанных алгоритмов для отработки радиосигналов, поступающих с выхода линейной части радиоприемного устройства.

Отметим следующее важное обстоятельство. Появление указанных устройств также позволило начать пересмотр алгоритмов обработки радиосигналов. Последнее обстоятельство привело к появлению новых видов сигналов, обладающих уникальными свойствами, а именно — ансамблей сложных радиосигналов второго порядка которые имеют автокорреляционные функции в виде «дельта-функций» а их взаимокорреляционные функции «ортонормальны в точке и на временном интервале при произвольном сдвиге».

Впервые рассмотрены методы синтеза ансамблей таких сложных сигналов, определены их свойства, описаны методы их формирования и обработки. Рассмотрены и проанализированы устройства, предназначенных для обработки ансамблей сложных сигналов второго порядка.

Работа над книгой распределена следующим образом: введение, главы 1—19 и заключение написаны В.И. Литюком, главам 20—22 — Л.В. Литюком.

Авторы благодарны всем, кто оказывал им поддержку в процессе работы над книгой.

Авторы надеются, что данная книга окажется полезной широкому кругу специалистов, занимающихся вопросами цифровой обработки ансамблей радиосигналов.

## 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О СОВРЕМЕННОЙ ЦИФРОВОЙ ЭЛЕМЕНТНОЙ БАЗЕ

### 1.1. Вводные замечания

Цифровая обработка сигналов средствами вычислительной техники позволяет решить задачу унификации тракта обработки сигналов на фоне помех. Один и тот же вычислитель при соответствующей его настройке может осуществить необходимую адаптацию для обработки сигналов с получением результатов, близких к оптимальным.

К основным достоинствам ЦОС можно отнести [1]:

- возможность реализации различных алгоритмов обработки на одной типной микроселектронной базе;
- возможность длительного накопления слабых сигналов;
- стабильность характеристик;
- большой динамический диапазон;
- высокую точность выполнения арифметических операций;
- высокую надежность;
- малые веса, габариты;
- высокое быстродействие;
- отсутствие необходимости настройки электрических цепей;
- относительно низкий уровень потребляемой мощности.

Особенностью ЦОС в радиоприемных устройствах (РПрУ) является обязательная дискретизация аналогового сигнала во времени, квантование значений и преобразование дискретных выборок в числа при помощи аналого-цифровых преобразователей (АЦП). Преобразование может подкрепляться как сигнал целиком, так и его отдельные параметры, (амплитуда, фаза и т. д.), необходимые для выделения заложенной в сигнале информации. Далее все операции производятся над полученными в результате преобразования числами.

В то же время для нормальной работы современных АЦП необходимо наличие сигнала на его входе в пределах нескольких вольт. Следовательно, требуется наличие предварительного аналогового усиления сигналов, что осуществляется в РПрУ.

### 1.2. Виды радиоприемных устройств с цифровой обработкой сигналов

К первому виду относят аналого-цифровые РПрУ, в которых на цифровых интегральных микросхемах реализованы отдельные узлы: часть информационного тракта (демодулятор, фильтр, следящие системы, схемы поиска сигнала и т.п.), автоматическая регулировка усиления (АРУ), синтезатор частоты, устройство управления и отображения и т.д. [2].

Ко второму виду относят цифровые РПрУ, обобщенная структурная схема которых изображена на рис. 1.1. Линейный тракт приемника (ЛТП) в составе входной цепи (ВЦ), усилителя радиочастоты (УРЧ), преобразователя частоты (ПЧ), усилителя промежуточной частоты (УПЧ), блока формирования квадратурных составляющих (БФКС), производит предварительную частотную фильтрацию сигналов, усиление и смещение по частоте. Далее сигналы поступают на АЦП, преобразующие аналоговый сигнал в цифровой код, который поступает в цифровой процессор. Цифровой процессор (ЦП) осуществляет окончательную обработку сигнала – дополнительные преобразования по частоте в случае необходимости, узкополосную фильтрацию, спектральный анализ, поиск сигнала, демодуляцию по заданному алгоритму и т.д. После ЦП может стоять цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП), если в результате обработки информации необходимо ее представление в аналоговой форме.

В том случае, когда быстродействие используемой в ЦП элементной базы намного превышает полосу обрабатываемых частот, целесообразно организовать вычислительный процесс на основе режима временного уплотнения для обработки нескольких сигналов, которые подвешиваются к нему по очереди, один раз за период частоты дискретизации.

В том случае, когда полоса частот обрабатываемой информации превышает быстродействие используемой элементной базы, организация вычислительного процесса должна осуществляться на основе алгоритмов распараллеливания обработки.

В общем случае цифровой процессор может выполняться по двум различным методам организации алгоритма. При аппаратной реализации последовательность обработки сигналов в ЦП определяется электрическими соединениями между отдельными узлами вычислителя. В этом случае каждый узел может быть выполнен либо для вычисления только одного функционального преобразования, либо осуществлена его настройка на выполнение требуемой операции. Такая реализация позволяет осуществлять распараллеливание обработки и достигать наибольшего быстродействия.

Другим возможным направлением реализации алгоритма обработки в ЦП является программная его реализация. При этом в качестве ЦП используется ЭВМ, которая в зависимости от объема вычислительной задачи и назначения прибора может быть общего назначения или специализированной, разработанной для решения конкретной задачи. В такой реализации ЦП

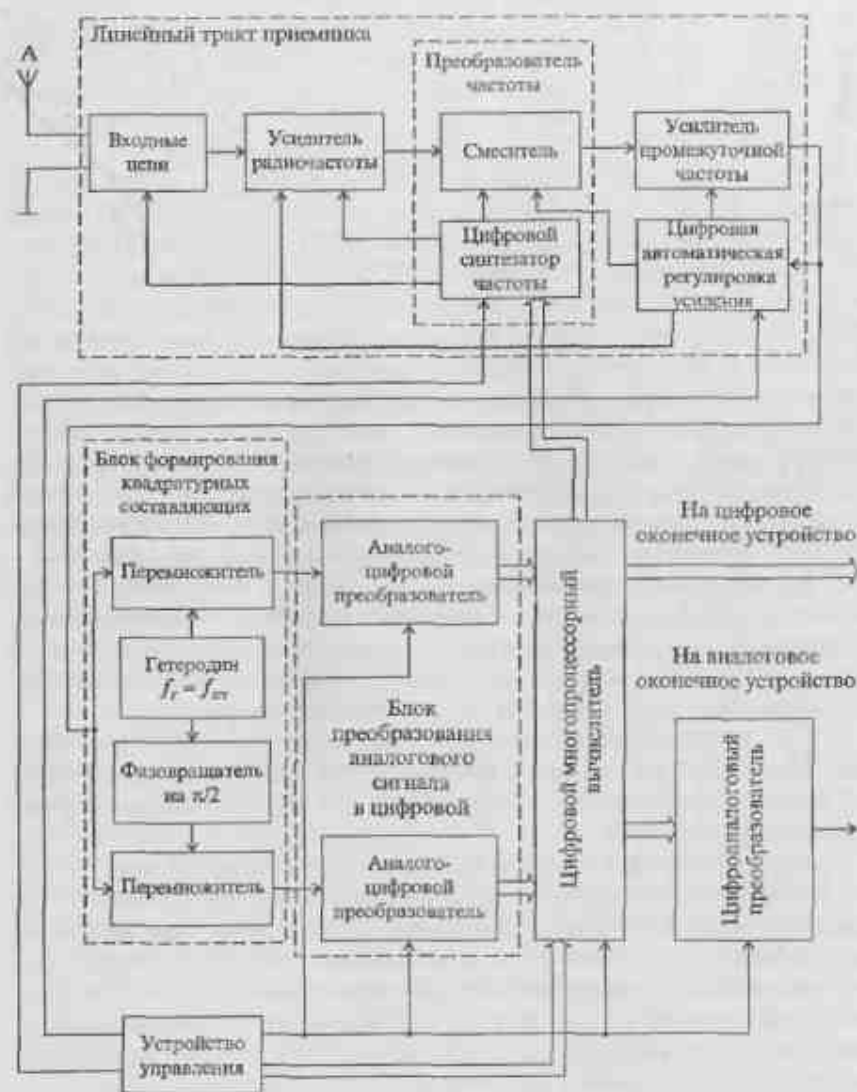


Рис. 1.1. Структурная схема радиоприемного устройства с цифровой многопроцессорной системой обработки радиосигналов

1. Основные сведения о современной цифровой элементной базе

достаточно просто осуществлять изменение алгоритма обработки, достигается простота компоновки с РПРУ, так как можно использовать либо готовую ЭВМ, либо серийный микропроцессорный комплект. Однако при этом основные трудности возникают при написании и отладке программы, что может достигать 70% трудоемкости изготовления прибора [3].

При программной реализации структурная схема цифрового процессора может быть представлена в виде, изображенном на рис. 1.2. Наличие единой цифровой магистрали (М) обмена позволяет существенно сократить число соединений между блоками, придать им регулярный характер и унифицировать их. Для увеличения быстродействия число магистралей обмена может быть выбрано равным 2-3. Магистральная организация позволяет легко наращивать аппаратуру при ее модернизации, производить диагностику при обработке или ремонте, замену блоков.



Рис. 1.2. Структурная схема цифрового процессора с программной реализацией

В состав цифрового РПРУ входят устройства: управления (УУ), отображения (УО), контроля (УК) для автоматической диагностики, контроллеры для связи линейного тракта РПРУ с магистралью (K01) и потребителями (K02).

Программная реализация алгоритма на основе универсальной ЭВМ часто требует больших затрат машинного времени, что может затруднить реализацию обработки сигнала в реальном масштабе времени. Это объясняется относительно малым быстродействием ЭВМ общего назначения при вы-

использовании специфических алгоритмов для обработки сигналов (преобразование Фурье, фильтрация и т.п.).

В этом случае применяется смешанная организация вычислительного процесса, когда операции, требующие больших затрат машинного времени, выполняются в виде отдельных, аппаратно реализованных цифровых узлов, либо отдельной ЭВМ, специально запрограммированной для решения данной задачи. Указанная реализация требует, чтобы быстродействие аппаратно реализованного цифрового вычислителя превышало на один-два порядка ширину полосы частот обрабатываемого сигнала.

### 1.3. Особенности построения многопроцессорных вычислительных систем

Очевидно, что цифровая обработка наиболее эффективна при обработке сигналов, поступающих по «цифровым» каналам связи, которые состоят из обычного непрерывного (аналогового) канала связи (по проволоке или эфиру), к которому на входе (в передатчике) подключено устройство кодирования и формирования цифровых сигналов, модуляция ими несущей, а на выходе канала (в приемнике) – демодуляция и подача на решающее устройство. Последнее служит для опознавания переданных сигналов.

Применение сигналов известной формы, в которых цифровая информация заложена в изменении их параметров, позволяет реализовать цифровыми методами оптимальную обработку.

В свою очередь, создание микропроцессоров и на их основе многопроцессорных вычислительных систем позволяет на два-три порядка увеличить информационную производительность ЭВМ и существенно улучшить другие характеристики [4-6]. Переход от процедурного принципа программирования операций в ЭВМ к аппаратной их реализации за счет резкого повышения степени интеграции используемых микросхем, открыло новые возможности при синтезе структур современных микропроцессоров и архитектур МВС. Сверхбольшие интегральные схемы (СВИС) позволили решить задачу синтеза микропроцессоров с аппаратной реализацией микроопераций, создать мощные системы коммутации и осуществлять перестройку архитектуры многопроцессорных систем за счет программирования многочисленных каналов связи.

Многопроцессорные системы проектируются и реализуются на основе различных видов микропроцессоров. В настоящее время определились четыре вида микропроцессоров, используемых в указанных вычислительных системах [7]:

- микропроцессоры с последовательным потоком команд и последовательным потоком данных;
- микропроцессоры с параллельным потоком команд и последовательным потоком данных;

- микропроцессоры с последовательным потоком команд и параллельным потоком данных;
- микропроцессоры с параллельным потоком команд и параллельным потоком данных.

Следует сказать, что многопроцессорная система является сложной системой, в которой свойства взаимосвязей преобладают над свойствами элементов. Последнее обстоятельство имеет особенно важное значение для случая, когда необходимо обеспечить гибкую перестройку архитектуры в случае, например, смены критерия эффективности в процессе функционирования РПрУ. Это позволяет обеспечить соответствие архитектуры МВС решаемой задаче, что открывает широкие возможности при построении адаптивных систем обработки информации без снижения производительности вычислителя.

К достоинствам организации центрального процессора на основе многопроцессорной системы можно также отнести простоту наращивания вычислительной мощности, более высокую надежность и живучесть за счет перераспределения вычислительного процесса при выходе из строя ее части между однородными микропроцессорами, что легко осуществляется при однородности архитектуры.

Однотипность микропроцессоров, в свою очередь, позволяет резко понизить стоимость элементов, из которых состоит многопроцессорная система. Как правило в состав микропроцессоров входят элементы локальной памяти и секторы коммутационной структуры.

Анализ принципов построения многопроцессорных вычислительных систем с программируемой архитектурой (МВС ПА) показывает, что минимальные затраты оборудования с одновременным обеспечением практически максимального быстродействия и возможностями изменить длину разрядной сетки, достигается при организации обработки информации в последовательных кодах. Такая обработка оказывается более быстрой и простой, если организовать передачу информации побитно от процессора к процессору старшими разрядами вперед. Последнее обстоятельство позволяет начинать обработку информации в следующем процессоре, не дожидаясь окончания ее обработки в предыдущем. А это значительно сокращает время на передачу всего потока информации и на его обработку.

МВС ПА позволяют применить программирование, основанное на настройке микропроцессоров на заданную микрооперацию из заданного их набора. Под макрооперацией понимается машинный язык, максимально приближенный по своей структуре к внешним языкам высокого уровня и даже совпадающий с ним [4].

В МВС ПА достаточно легко может быть реализован алгоритм двухуровневого программирования, заключающийся в том, что программируется од-

повремененно структура процессора и программируется архитектура многопроцессорной системы на реализацию той или иной задачи.

В том случае программирование становится более адекватным решаемой задаче, простым и наглядным, достаточно просто реализуется распараллеливание ресурсов многопроцессорного вычислителя при подключении его к большому числу внешних потребителей.

В свою очередь, успехи микроэлектроники в создании СБИС привели к появлению системных многопроцессорных вычислительных систем, архитектура которых жестко задана [5, 6].

Известны следующие виды архитектур системных многопроцессорных вычислительных систем: магистральная (рис. 1.3), матричная (рис. 1.4), иерархическая (рис. 1.5), а также их разновидности – векторные, конвейерные, звездные, кольцевые и т.д.

К недостаткам подобных систем следует отнести то, что они имеют «жесткие» каналы связи, что требует организации обмена информацией между микропроцессорами (МП) во времени и, как следствие, приводит к снижению скорости ее обработки.

Более адекватного отражения решаемой задачи в многопроцессорной системе можно добиться, если использовать МВС ПА, архитектура которой имеет вид, изображенный на рис. 1.6.

Как видно, она состоит из набора параллельно работающих однотипных микропроцессоров (МП), распределенной памяти в виде запоминающего устройства (ЗУ) и однородной коммутационной структуры (КС). Микропроцессоры выполняют крупные операции и могут перестраиваться с одной крупной операции на другую путем программирования их структуры. Наличие индивидуальной памяти позволяет каждому микропроцессору производить прямой быстрый обмен информацией с собственной индивидуальной памятью. Универсальная коммутационная структура позволяет программным путем образовывать любые необходимые каналы связи для обмена информацией внутри системы. Образованные каналы связи работают параллельно и не оказывают влияния друг на друга.

Последнее обстоятельство позволяет достаточно просто производить распараллеливание входного процесса, параллельную его обработку, что позволяет обеспечить режим работы вычислителя в реальном масштабе времени. Кроме того, высокая технологичность выполнения указанных узлов на сверхбольших интегральных микросхемах, высокая надежность за счет взаимозаменяемости отдельных блоков, возможность неограниченного наращивания мощности вычислительной системы, достаточно просто реализуются за счет рассмотренной архитектуры.

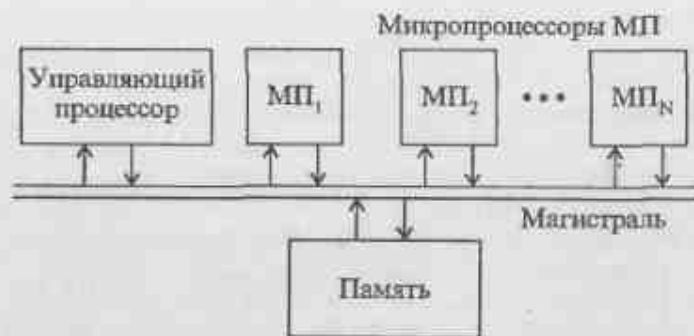


Рис. 1.3. Магистральная архитектура многопроцессорной вычислительной системы

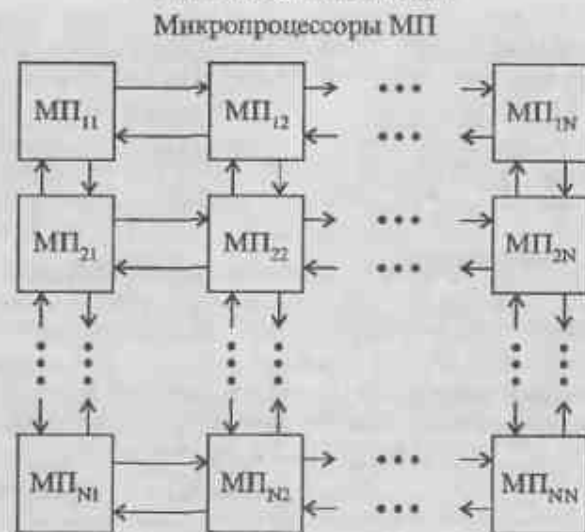


Рис. 1.4. Матричная архитектура многопроцессорной вычислительной системы

Рассмотрим кратко требования, которые предъявляются к микропроцессорам, входящим в состав МВС ПА. Очевидно, что микропроцессоры, наиболее отвечающие требованиям вычислительных систем с гибкой архитектурой, должны работать на основе набора крупных операций и программируемой структурой. Это связано с тем, что применение в рассматриваемой архитектуре обычных, «универсальных» микропроцессоров приводит к серьезным трудностям при согласовании работы микропроцессоров между



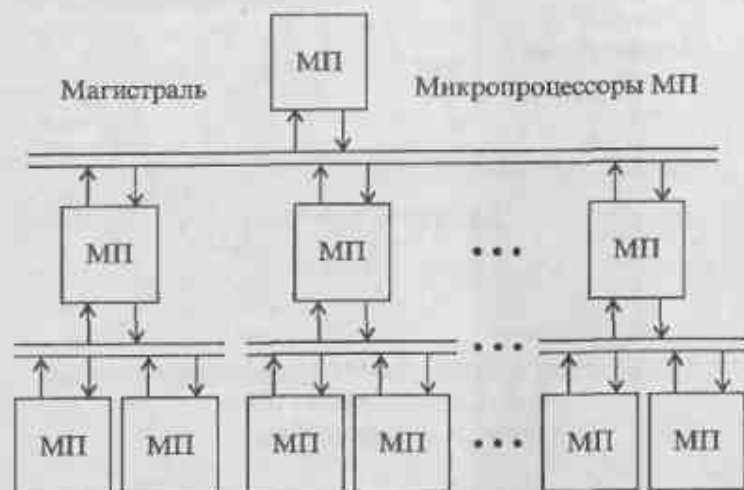


Рис. 1.5. Иерархическая архитектура многопроцессорной вычислительной системы



Рис. 1.6. Многопроцессорная вычислительная система с программируемой архитектурой

собой, при распараллеливании обработки, при трансляции программ с языка высокого уровня на машинный язык процессоров.

Применение микропроцессоров с программируемой структурой позволяет избежать указанных трудностей. Эти процессоры работают на основе крупных операций с языками высокого уровня. При этом в вычислительной системе программируется не процедура вычислений, а структура, входящая

в виде составных частей в набор крупных операций микропроцессора. Программирование структуры микропроцессора на выполнение крупной операции осуществляется перестройкой внутренних каналов связи микропроцессора, для чего используется внутренняя коммутационная структура. Программа перестройки его структуры в процессе функционирования может храниться в локальной памяти микропроцессора, что позволяет осуществлять его настройку подачей соответствующего кода операции.

Указанные принципиальные отличия микропроцессора, предназначенного для ЦОС в МВС ПА, в сотни раз увеличивают скорость обработки информации по сравнению с системами на основе «универсальных» микропроцессоров, делают простой задачу программирования и распараллеливания.

Таким образом, решение любой задачи обработки сигналов в рассматриваемой системе распадается на два этапа:

- этап распределения крупных операций между процессорами и в настройке микропроцессора на эти операции;
- этап, заключающийся в соответствующей настройке каналов связи между микропроцессорами и памятью.

Отметим, что перестройка системы как структурно, так и по выполняемым операциям может осуществляться не только при подготовке системы к решению задачи, но и под влиянием информации, поступающей извне и прошедшей этап обработки в системе.

Из краткого рассмотрения видов реализации центральных процессоров можно сделать вывод о том, что МВС ПА наиболее полно отвечают требованиям, предъявляемым к системам, способным осуществлять автоматическое проектирование требуемой структуры и заданных характеристик.

#### 1.4. Цифровые сигнальные процессоры

Рассмотрим виды микропроцессоров выпускаемых серийно, которые могут быть использованы как самостоятельно для решения задач ЦОС, так и в составе МВС рассмотренных видов.

1.4.1. В настоящее время широкое распространение для решения задач различного назначения получили персональные ЦВМ, выпускаемые большим числом производителей. Возможности, представляемые этими машинами, в сочетании с широко развитым программным обеспечением, позволяют уже сегодня обрабатывать процессы, частотные полосы которых лежат в пределах диапазона звуковых частот и динамический диапазон которых достигает десятков децибел. В то же время для решения задач обработки сложных сигналов в системах радиосвязи, радионавигации, телевидения в реальном масштабе времени получили широкое распространение цифровые сигнальные процессоры, выполненные по технологии СБИС и получившие название «микропроцессоры для ЦОС».

Основным отличием современных микропроцессоров, предназначенных для ЦОС, от микропроцессоров обычного применения типа Intel 8080, M6800, K580, K589 и ряда других является [8]:

- использование гарвардской архитектуры, т.е. раздельное хранение программ и данных в двух раздельных запоминающих устройствах, что позволяет совмещать во времени выборку и исполнение команд;
- сокращение длительности командного цикла за счет повышения частоты синхронизации, что связано с использованием более высоких полупроводниковых технологий;
- применение конвейеризации для сокращения длительности командного цикла, что позволяет одновременно обрабатывать две, три инструкции;
- применение аппаратного умножителя, что позволяет сократить время выполнения основной операции ЦОС – умножения, и которая реализуется за один командный цикл;
- включение в систему команд специализированных команд ЦОС, таких как умножение с накоплением, битовые операции (для графики), инверсия бит адреса для алгоритмов, основанных на вычислении быстрого преобразования Фурье (БПФ), кольцевые буфера для реализации цифровых фильтров, логические операции и другое.

В последнее время появились микропроцессоры для ЦОС с супергарвардской архитектурой. В них, помимо хранения программ и данных в двух раздельных запоминающих устройствах, предусмотрены раздельные шины ввода и вывода информации.

1.4.2. Условно, сигнальные процессоры и микропроцессорные комплекты, предназначенные для ЦОС, могут быть разделены на ряд поколений. Процессоры первого поколения появились в начале 80-х годов и исторически первым был микропроцессор японской корпорации NEC MPD7720.

Среди отечественных микропроцессоров и микропроцессорных комплектов, которые можно отнести к первому поколению, наиболее известными являются серии K1815, 4K601ВЖЗ, K1518ВЖ1, KM1813ВЕ1, K1802 [9-11].

1.4.2.1. Разработанный микропроцессор K1815 ВФЗ из серии K1815 предназначен для построения процессоров БПФ и различного рода цифровых фильтров, которые могут быть выполнены в виде многопроцессорной вычислительной системы [9].

Структурная схема микропроцессора изображена на рис. 1.7. Микропроцессор состоит из трех основных блоков:

- блока суммирования БСм;
- блока умножения БУм;
- блока управления операциями БУОп.

В свою очередь, каждый из этих блоков состоит из отдельных узлов. Блок БСм состоит из сумматора См1, узла логических операций ЛО и управляемого блока задержки или масштабирования D. Блок БУм включает

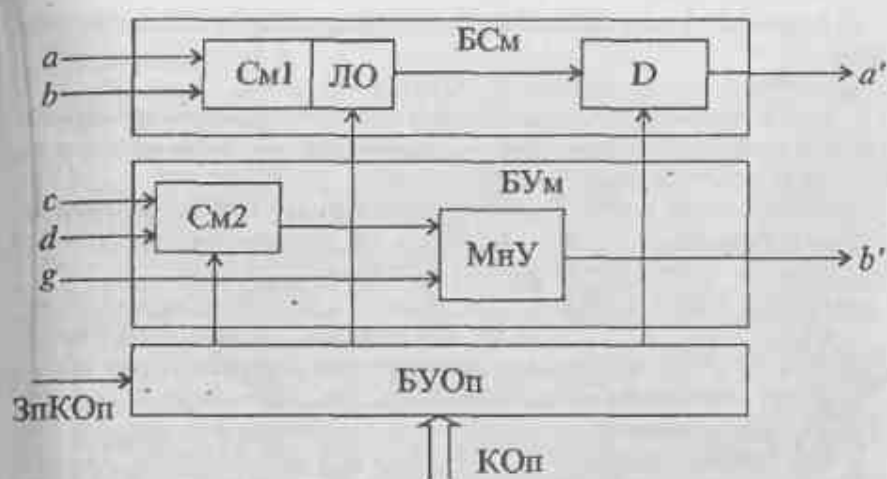


Рис. 1.7. Структурная схема микропроцессора K1815 ВФ3

в себя сумматор См2 и множительное устройство МнУ. Блок БУОп представляет собой регистр кода операций с дешифратором.

Микропроцессор K1815 ВФЗ имеет 5 информационных входов ( $a, b, c, d, g$ ), на которые подаются соответствующие коды чисел, два информационных выхода ( $a', b'$ ), с которых снимаются результаты выполнения соответствующих операций, и два управляющих входа – КОп и ЗпКОп, на первый из которых подается соответствующий код операции, а на второй – строб записи кода операции. Микропроцессор K1815 ВФЗ настраивается на выполнение заданного вида операций путем подачи соответствующего кода по шинам КОп, число которых равно шести, с помощью строба ЗпКОп.

С целью сокращения затрат оборудования, удобства коммутации микропроцессоров в многопроцессорной системе в K1815 ВФЗ принята знакоразрядная система счисления последовательным кодом цифра за цифрой, начиная со старших разрядов, с фиксированной запятой.

Сумматор См1 блока суммирования помимо операций « $a \pm b$ » выполняет также операцию взятия модуля « $|a \pm b|$ » и выделения максимального числа из двух кодов « $a$ » и « $b$ », т.е. « $\max(a, b)$ ». Имеющийся управляемый блок задержки или масштабирования D пропускает информацию на выход либо без задержки, либо с задержкой D или 2D тактов (D=6 тактам). Блок БСм1 выдает информацию с задержкой D тактов. Блок БСм2 выполняет операции « $a \pm d$ », а множительное устройство МнУ осуществляет операцию « $g(c \pm d)$ ». Результат начинает выдаваться с задержкой 2D тактов по отношению ко входной информации.

Операция «Сброс» приводит микропроцессор за 18 тактов в нулевое состояние.

Краткая характеристика микропроцессора K1815 ВФЗ:

- представление информации в виде последовательных кодов цифра за цифрой, начиная со старших разрядов в двоичной знакоразрядной системе счисления с фиксированной запятой;
- представление программной информации (КОП) в параллельном шестиразрядном коде;
- точность выполнения операций – 24 разряда;
- тактовая частота – 10 МГц;
- время выполнения операций над 24-разрядными числами – 2,5 мсек.;
- производительность – 1,2 млн. арифметических операций в сек.;
- уровни напряжений согласованы с ТТЛ;
- ток питания 300 мА;
- корпус имеет 24 вывода.

Микропроцессор K1815 ВФЗ может оперировать с числами заранее заданной произвольной разрядности в двоичной знакоразрядной системе счисления, которые в виде кодов поступают старшими разрядами вперед в микропроцессор и в таком же порядке появляются за его выходы.

Каждый информационный вход и выход микропроцессора состоит из двух шин – положительной  $x^+$  и отрицательной  $x^-$ , причем число  $x \in \{a, b, c, d, g, \sigma, b'\}$ . Положительная часть числа передается по положительной шине, отрицательная часть числа – по отрицательной, запятая передается по двум шинам одновременно. Запятая в микропроцессоре выполняет роль маркера, по которому осуществляется начальная установка и запускаются выполняемые операции.

Микросхемы типа K1815 ВФЗ используются в МВС ПА как арифметико-логическое устройство (АЛУ) совместно с ортогональной регистровой памятью (ОРП) на микросхеме K1517ИР1 и коммутатором на микросхеме KM1509КП1. Развитием этих микросхем является серия 1582 (1582 ВЖЗ-0034 – микропроцессор, 1582 ВЖЗ-0032 – ОРП, 1029 КП2 – коммутатор).

Недостатком рассмотренных комплектов является относительно низкая степень их интеграции.

1.4.2.2. Удачное техническое решение американской фирмы Texas Instruments (ТИ) в 1982 году по созданию микропроцессора для ЦОС TMS32010 сделало его промышленным стандартом де-факто среди микропроцессоров первого поколения.

Основные характеристики TMS32010 следующие:

- производительность до 5 млн. операций умножения или сложения в секунду над 16-разрядными словами с фиксированной запятой;
- командный цикл длительностью 160-280 нс;
- ОЗУ объемом 144 или 256 слов;

- ПЗУ программ объемом 1,5К или 4К слов;
- внешняя память до 4 Кбайт слов;
- разрядность арифметико-логического устройства (АЛУ) и аккумулятора составляет 32 бит;
- умножитель  $16 \times 16$  бит с 32-разрядным результатом;
- восемь 16-разрядных портов для устройств ввода-вывода;
- 16-разрядная внешняя шина имеет пропускную способность 50 Мбит/с.

1.4.3. К середине 80-х годов прошлого столетия появились сигнальные процессоры второго поколения. Повышение степени интеграции микросхем позволило увеличить количество функций, выполняемых процессорами ЦОС, увеличить скорость обработки данных и скорость выполнения команд. К этому поколению относят микропроцессоры TMS32020, TMS320C25 и их модификации фирмы ТИ. Процессор TMS320C25 может выполнять 25 млн. операций в секунду. Объем встроенного ОЗУ составляет 544 16-разрядных слов. Предусмотрена возможность подключения внешней памяти программ и внешней памяти данных объемом до 128К слов. Команды умножения, сложения, сдвига данных выполняются за один командный цикл, равный 100 нс. Отметим, что процессоры второго поколения имеют в 2-4 раза большее быстродействие по сравнению с процессорами первого поколения.

Характеристики TMS320C50 несколько отличаются от TMS320C25 в сторону уменьшения энергопотребления, увеличения объемов памяти данных и команд до 64К, имеет 64К у портов ввода/вывода, объем глобальной памяти – 32К. Имеются дополнительные возможности для организации мультипроцессорных систем.

Процессоры фирмы Motorola типа DSP56000 и DSP56001 также могут быть отнесены к сигнальным процессорам второго поколения, поскольку имеют производительность 10,25 млн. операций в секунду. Разрядность шины данных 24 разряда. Аккумуляторы имеют 56 разрядов, что позволяет проводить точные промежуточные вычисления. Указанные процессоры имеют гарвардскую архитектуру, имеют два оперативных запоминающих устройства (ОЗУ) и две шины данных X и Y, что позволяет достаточно легко организовать обработку комплексных чисел. Фирма Motorola также выпускает DSP56100, очень похожий на DSP56000, но только с одной шиной данных. Она также выпускает DSP56156 со встроенными ЦАП и АЦП.

Фирма AT&T Microelectronics выпускает микропроцессор DSP16A. Он имеет 55 нс командный цикл, при этом его производительность 3,18 млн. операций в секунду. Имеет внутреннее ПЗУ объемом 8К слов и внутреннее ОЗУ объемом 4К слов. Предусмотрена возможность подключения внешней памяти объемом 128К слов. Имеющийся последовательный порт позволит производить передачу данных со скоростью 15 Мбит/с, а параллельный порт – до 30 Мбайт/с.

Фирма Analog Devices выпустила семейство микропроцессоров ЦОС ADSP21xx, характеристики которых совпадают, а некоторые и превосходят DSP56000 и TMS320C50 и при этом ниже их в цене.

В частности, однокристалльный прибор ADSP-21msp50/55 позволяет обрабатывать аналоговые сигналы, подаваемые на вход, поскольку имеет АЦП и ЦАП, а также содержит процессор, позволяющий организовать цифровую обработку сигналов.

В конце 1993 года появились процессоры ADSP2171 и ADSP2181. Процессор ADSP2171 содержит 2К 24 ОЗУ программ, 8К 24 ПЗУ программ и 2К 16 ОЗУ данных. Командный цикл 30 нс.

ADSP2181 с 30 нс тактом имеет дополнительно 80К памяти, сконфигурованных как 16К слов программ и 16К данных, 16-разрядный высокоскоростной порт между внешней и внутренней памятью, восьмизарядный порт для пересылок между памятью программ и памятью данных.

1.4.4. Третье поколение процессоров для ЦОС появилось в конце 80-х годов в связи с освоением субмикронной технологии, соответственно TMS320C30 фирмы TI, DSP96002 фирмы Motorola и DSP32C фирмы AT&T. Процессор TMS320C30 фирмы TI имеет производительность 33 млн. операций в секунду при обработке слов с плавающей запятой, которая обеспечивается благодаря параллельному выполнению команд и выборки данных, а также позволяет одновременно производить операции ввода/вывода. Подобная архитектура микропроцессоров носит название, как указывалось, супергарвардской архитектуры.

Основные характеристики TMS320C30:

- все команды выполняются за один цикл длительностью 60 нсек;
- два блока ОЗУ по 1К 32-разрядных слов с возможностью одновременного доступа;
- кэш-память команд объемом 64 32-разрядных слова;
- 32-разрядный умножитель с плавающей запятой;
- 40-разрядное АЛУ работает с целыми и с числами с плавающей запятой;
- восемь регистров для операций с повышенной точностью;
- два адресных генератора и группа вспомогательных регистров, реализующих разнообразные методы адресации;
- имеется контроллер для распараллеливания операций ввода/вывода и обработки информации;
- используется 32-разрядная шина команд и данных и 24-разрядная шина адреса.

Процессор DSP96002 фирмы Motorola разработан с учетом возможностей работы в мультипроцессорной конфигурации при прямом соединении их между собой. Используются 32-разрядные шины адреса и данных, шинный арбитр, а также предусмотрен режим быстрого доступа к динамическому или видео-ОЗУ. Усредненная производительность процессора со-

ставляет 18 млн. операций в секунду, пиковая производительность – 40 млн. операций в секунду с плавающей запятой.

Процессор DSP32C фирмы AT&T Microelectronics при тактовой частоте 50 МГц выполняет 12,5 млн. операций в секунду над 24-разрядными целочисленными числами и 25 млн. операций в секунду над операндами с плавающей запятой. Объем встроенного ОЗУ составляет 1,5К, ПЗУ составляет 2К 32-разрядных слов.

Микропроцессор ADSP-21020 – первый представитель 32/40-разрядных цифровых процессоров обработки сигналов (ЦПОС) с плавающей запятой семейства 21xxx фирмы Analog Devices. Архитектура процессора в общих чертах повторяет архитектуру операционного ядра прибора ADSP-2100. Однако при этом значительно увеличена разрядность шин данных и адреса, а внутренняя организация арифметических блоков, ориентированных на выполнение операций как с фиксированной, так и с плавающей запятой, имеет существенные изменения. Для уменьшения числа обменов с внешней памятью программ и внешней памятью данных в кристалле введены кэш-память (32×48) и регистровый блок (16×40). Процессор ADSP-21020 работает на тактовой частоте 33,3 МГц и исполняет одноцикловые команды за 30 нс, достигая производительности 60 млн. операций в секунду при выполнении операций с плавающей точкой. Арифметические блоки используют 32-разрядное представление данных с расширением до 40 двоичных разрядов при выполнении операций с плавающей точкой, и поддерживают обработку с фиксированной точкой 32-разрядных операндов и двойным 80-разрядным аккумулятором.

Процессор ADSP-21010 – дешевый функциональный аналог прибора ADSP-21020, работающий с тактовой частотой 12,5 МГц и только с 32-разрядными операндами.

Микропроцессор TMS320C40, выпускаемый TI, является дальнейшим развитием серии микропроцессоров ЦОС, выпускаемых этой фирмой и имеет следующие основные характеристики:

- шесть высокоскоростных коммуникационных портов со скоростью передачи 20 Мбит в секунду, прямое подключение процессор-процессор без использования дополнительной логики и задержек, двунаправленная передача;
- шесть каналов прямого доступа к памяти (ПДП);
- пиковая производительность до 175 млн. операций в секунду;
- возможность выполнения одновременно за один такт 11 команд;
- время такта 40 нс;
- плавающая арифметика;
- аппаратная реализация операций деления и вычитания, корня квадратного, а также ряд дополнительных возможностей.

Новая разработка фирмы Analog Devices – сигнальный микропроцессор ADSP-21060 который имеет следующие характеристики:

- производительность 40 млн. операций в секунду (20 нс на такт);
- 4 Мбита памяти на кристалле, конфигурируемые как 128К;
- 32-разрядных слов ОЗУ данных и 80К 48-разрядных слов ОЗУ программ;
- два независимых генератора адресов для двух независимых шин данных;
- 32-разрядные операнды с плавающей запятой;
- 10 каналов прямого доступа в память, обеспечивающих связь между внутренней и внешней памятью.

1.4.5. К процессорам четвертого поколения можно отнести прибор, выпущенный в 1994 году фирмой TI под названием Multimedia Video Processor (MVP) и который также имеет название TMS320C80 [8]. Этот процессор имеет производительность 2 млрд. операций в секунду, что более чем в 10 раз превышает пиковую производительность сигнальных процессоров третьего поколения.

Процессор TMS320C80 имеет следующие основные характеристики:

- производительность 2 млрд. операций в секунду;
- четыре 32-разрядных процессора, оперирующих операндами с фиксированной точкой;
- один управляющий RISC-процессор с блоком арифметики, имеющим плавающую точку;
- внутреннее статическое ОЗУ объемом 50 Кбайт;
- быстрая внешняя шина (пропускная способность 400 Мбайт/с);
- встроенные средства тестирования;
- два программируемых видеоконтроллера;
- 64-разрядное машинное слово;
- два блока генерации адресов;
- интерфейс со всеми видами памяти (динамической, статической, двух портовой);
- линейная и двухкоординатная адресация;
- аппаратная поддержка графических операций и битовых полей;
- средства аппаратной поддержки трехуровневых циклов;
- 44 доступных пользователю регистров.

Как видно, TMS320C80 является микропроцессорным прибором, предназначенным для ЦОС, и может являться составной частью МВС ПА. Очевидно, что указанный микропроцессор, являясь элементарной многопроцессорной системой, позволяет реализовать алгоритмы распределенной обработки.

Следует также отметить, что в работе [12] рассмотрена подобная конфигурация вычислителя, названного модульным процессорным элементом (МПЭ) и рассмотрены возможности его использования в МВС ПА.

TMS320C80 представляет собой комбинацию из пяти процессоров (четыре сигнальных и одного управляющего), двух видеоконтроллеров и кон-

троллера пересылок. Каждый сигнальный процессор (ADSP0...ADSP3) работает независимо друг от друга. Такой вариант многопроцессорной системы называется MIMD (multiple-instruction, multiple-data – множество инструкций, множество данных). Обмен данными между процессорами осуществляется через общую внутреннюю память.

Каждый микропроцессор ADSP состоит из четырех основных функциональных узлов: контроллера последовательности команд (PFC), блока обработки данных и двух блоков генерации адресов. PFC управляет потоком поступающих инструкций, производит обработку вставлений и прерываний, позволяют организовывать приоритетную обработку.

Блок обработки данных в одном машинном цикле выполняет одно умножение двух чисел 16×16 разрядов каждое или два умножения 8×8 разрядов и осуществляет пересылку данных. Имеет АЛУ на 32-разряды, может работать как два 16-разрядных или четыре 8-разрядных АЛУ для ускорения обработки данных, что существенно увеличивает производительность при выполнении алгоритмов сжатия изображений. Имеется более ускоренная обработка графики. Два блока генерации адресов выполняют операции загрузки или сохранения данных независимо от остальных узлов процессора.

Управляющий процессор (RISC-процессор) управляет остальными сигнальными процессорами ADSP0...ADSP3, обеспечивает самостоятельные вычисления и организует обмен с внешними, по отношению к TMS320C80, устройствами. Имеет 32-разрядную RISC-архитектуру, содержит блок плавающей арифметики, 4 Кбайт кэш-память команд и такую же по объему кэш-память данных. Управляющий процессор за один цикл способен загрузить 64-разрядное слово данных и 32-разрядную команду. Используются команды с плавающей арифметикой и специальный набор векторных операций с плавающей запятой, оптимизированный для обработки звука, изображений и трехмерной графики.

Видеоконтроллеры TMS320C80 (MVP) обладают возможностями независимого захвата и отображения видеoinформации как при обычном горизонтальном, так и при вертикальном сканировании. Они могут работать как одиночное, так и вдвое устройство отображения, как два устройства захвата, а также один на захват, один на отображение. Режим работы может быть как синхронный, так и асинхронный, что позволяет осуществлять вывод картинки из памяти на экран с другой скоростью, нежели ввод.

Контроллер пересылок (Transfer Controller) – интеллектуальный контроллер прямого доступа к памяти. Его задача заключается в том, чтобы распределять приоритеты и осуществлять доступ MVP к внекристальной памяти, не прерывая работу процессоров. Контроллер пересылок поддерживает линейную и двухкоординатную (X,Y) адресацию для ускорения многомерных графических операций. Он содержит схемы интерфейса со всеми

распространенными видами памяти и систему динамического изменения размерности шины от 8 до 64 бит.

До 9% площади кристалла занято под встроенную систему контроля и отладки – порт JTAG, позволяющий получить доступ к внутренним ресурсам кристалла и тестировать систему на уровне процессора.

При использовании эмулятора тестирование может осуществляться через вход порта с нужной скоростью независимо от тактовой частоты кристалла. С помощью эмулятора разработчики аппаратных средств могут просматривать сигналы на внутренних шинах и анализировать состояние блоков микропроцессоров. Это позволяет существенно сократить время разработки устройств на базе MVP и повысить их надежность.

Диспетчер (Device executive) выполняет роль планировщика задач, сокращающего объем кода, необходимого для выполнения задачи. Работа диспетчера тесно связана с функциями контроллера пересылок – он управляет динамическим изменением разрядности шины данных и позволяет осуществлять пересылки данных даже тогда, когда процессоры остановлены.

Прибор содержит 54 млн. транзисторов и выполнен по собственной CMOS-технологии с проектными нормами 0,5 мкм, которая была разработана TI для массового производства запоминающих устройств объемом 16-Мбит (для сравнения – центральный процессор Pentium, выполненный по технологии BiCMOS 0,6 мкм, включает 3,3 млн. транзисторов). Несмотря на то, что напряжения питания ядра процессора 3,3В, и только буферные элементы имеют подключения к 5В, рассеиваемая прибором мощность слишком велика для надежной работы при естественном охлаждении. Поэтому на 305-выводном монокристаллическом корпусе крепится небольшой вентилятор.

### 1.5. Выводы

Очевидно, что в связи с непрерывным усложнением радиоэлектронных устройств, разнообразием типов сигналов, используемых информационными радиосистемами, а также возрастающими требованиями к точности их обработки и помехоустойчивости, перед разработчиками стоит задача унификации тракта обработки, которая решается путем применения радиоприемных устройств с цифровой обработкой сигналов.

Анализ видов устройств, реализующих ЦОС, показал, что наиболее перспективными являются цифровые многопроцессорные устройства.

Из краткого рассмотрения видов реализации многопроцессорных систем можно сделать вывод о том, что достижения в области микроэлектроники, а также успехи в разработках программного обеспечения для многопроцессорных систем на основе систолических архитектур, позволяет получать производительность достаточную для обработки широкополосных радиосигналов в реальном масштабе времени.

В свою очередь, МВС ПА наиболее полно отвечают требованиям, предъявляемым к системам, способным осуществлять автоматическое проектирование требуемой структуры и заданных характеристик.

Проведенный краткий обзор состояния элементной базы, на которой могут быть реализованы устройства ЦОС, показывает, что разработанные процессоры позволяют реализовать все существующие и вновь разрабатываемые алгоритмы, в том числе алгоритмы сжатия и фильтрации изображений в реальном масштабе времени, алгоритмы обработки сигналов в цифровых многоканальных системах радиосвязи, алгоритмы обработки слесных радиолокационных сигналов, алгоритмы обработки и распознавания речевых сигналов и могут быть использованы как в систолических многопроцессорных системах, так и в МВС ПА.

## 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДИОСИГНАЛОВ В ЦИФРОВУЮ ФОРМУ

### 2.1. Вводные замечания

В информационных системах, где параметры, отображающие каким-либо образом состояние физической системы, передаются через эфир, используются радиосигналы с различными видами модуляции, которые определяют конкретную структуру радиоприемного устройства. При этом, независимо от вида радиоприемного устройства, их линейная часть выполняет операции частотной селекции и усиления радиосигналов.

Первая задача осуществляется с помощью резонансных колебательных цепей ЛТЭ, а вторая – за счет использования активных элементов, работающих в режиме усиления.

Решение задачи декодирования принимаемого сообщения в настоящее время целесообразно осуществлять цифровыми функциональными узлами вследствие указанных выше их преимуществ перед аналоговыми.

Очевидно, что на выходе ЛТЭ будет высокочастотный сигнал, центральная частота которого соответствует промежуточной частоте УПЧ. В этом случае, такой радиосигнал, несущий в себе информацию, можно трактовать как «узкополосный», даже если он несет в себе «широкополосную» информацию. Последнее связано с тем, что для неискаженной передачи через радиотехнические цепи, а также для устранения искажений, обусловленных растространением радиоволн, необходимо чтобы ширина спектра сообщения была мала по сравнению с несущей частотой.

Поскольку информация заключена в изменениях какого-либо параметра радиосигнала (амплитуды, фазы, частоты или их различных комбинаций между собой), то очевидно, что рациональный выбор его описания позволяет существенно упростить как схему устройств обработки, так и процедуру анализа.

Применяемые в настоящее время сигналы, поступающие на вход РПРУ, можно разделить на следующие классы [13]:

- сигналы, произвольные по величине и непрерывные по времени;
- сигналы, произвольные по величине и дискретные по времени;

## 2. Преобразование радиосигналов в цифровую форму

- сигналы, квантованные по величине и непрерывные по времени;
- сигналы, квантованные по величине и дискретные по времени.

Сигналы первого класса называются аналоговыми (континуальными), второго – дискретными, третьего – сигналами квантованными по уровню, и, наконец, четвертого – цифровыми сигналами.

Каждому из этих классов сигналов можно поставить в соответствие аналоговую, дискретную или цифровую цепь.

При обработке континуального сигнала с помощью аналоговой цепи не требуется дополнительных преобразований сигнала. При обработке не континуального сигнала с помощью дискретной цепи необходимы два преобразования:

- дискретизация сигнала по времени на входе дискретной цепи;
- обратное преобразование, т.е. восстановление континуальной структуры сигнала на выходе дискретной цепи.

При цифровой обработке континуального сигнала требуется ещё два дополнительных преобразования:

- «аналог-цифра», т.е. квантование и цифровое кодирование, которое осуществляется на входе цифровой цепи при помощи АЦП;
- обратное преобразование «цифра-аналог» при помощи ЦАП, т.е. декодирование на выходе цифровой цепи.

### 2.2. Математическое описание радиосигнала

2.2.1. Радиосигнал  $\hat{x}(t)$  на выходе линейной части тракта РПРУ (на выходе УПЧ) в комплексной форме может быть записан в виде

$$\hat{x}(t) = \hat{s}(t) + \hat{n}(t) = aE(t) \exp[-j\psi(t)] = aE(t) \exp[-j[\omega t + \Phi(t) + \varphi]] \\ = aE(t) \exp[-j[(\omega_0 \pm \Omega_p)t + \Phi(t) + \varphi]] = \hat{A}(t) \cos \omega_0 t - \hat{C}(t) \sin \omega_0 t, \quad (2.1)$$

где  $\hat{A}(t) = b(t) - jd(t)$  и  $\hat{C}(t) = d(t) + jb(t)$  – комплексные квадратурные компоненты комплексной огибающей радиосигнала, каждая из которых состоит из действительной  $b(t) = aE(t) \cos[\pm \Omega_p t + \psi(t) + \varphi]$  и мнимой

$d(t) = aE(t) \sin[\pm \Omega_p t + \Phi(t) + \varphi]$  частей;

$a$  – амплитуда принимаемого радиосигнала;

$E(t) = E_s(t) + E_n(t)$  – огибающая принимаемого радиосигнала  $\hat{x}(t)$ , состоящего из полезного сигнала  $\hat{s}(t)$  с соответствующим законом амплитудной модуляции  $E_s(t)$  и помехи  $\hat{n}(t)$  с огибающей  $E_n(t)$ ;

$\omega_0 = 2\pi f_0$  – центральная частота УПЧ РПРУ;

$\Omega_p$  — мгновенная частота, равная разности между мгновенной частотой  $\omega$  радиосигнала  $x(t)$  и центральной частотой УПЧ  $\omega_0$ ;

$\Phi(t) = \Phi_s(t) + \Phi_n(t)$  — закон фазовой модуляции принимаемого сигнала  $x(t)$ ;

$\Phi_s(t)$  — закон фазовой модуляции радиосигнала  $s(t)$ ;

$\Phi_n(t)$  — закон фазовой модуляции  $n(t)$ ;

$\varphi = \varphi_s + \varphi_n$  — начальная фаза принимаемого радиосигнала  $x(t)$ ;

$\varphi_s$  — начальная фаза радиосигнала  $s(t)$ ;

$\varphi_n$  — начальная фаза  $n(t)$ .

Полагая  $a = 1$ , модуль комплексной огибающей  $E(t)$  принятой аддитивной смеси, описываемую выражением (2.1) можно выразить через комплексные квадратурные компоненты в виде

$$E(t) = \sqrt{A(t)A^*(t) + C(t)C^*(t)} = 1,41\sqrt{b^2(t) + d^2(t)}. \quad (2.2)$$

Полная фазовая функция принятой смеси без учета фазовой функции несущего колебания имеет вид

$$\psi(t) = -\text{Arctg} \frac{b(t) - d(t)}{b(t) + d(t)} = \mp \Omega_p t - \Phi(t) - \varphi + \frac{\pi}{4}. \quad (2.3)$$

Рассмотренная форма представления радиосигнала, получаемого на выходе УПЧ, является наиболее общей. При этом сигнал представляется в декартовой системе координат и виде двух комплексных квадратурных компонент  $A(t)$  и  $C(t)$ .

В том случае, когда сигнал поступает на цифровую обработку после амплитудного детектора, он представляется в виде электрической составляющей электромагнитного колебания, которая описывается действительным сигналом.

Тогда входной сигнал в действительной форме можно записать в виде

$$x(t) = E(t) \cos \psi(t). \quad (2.4)$$

При этом представляет интерес выбор рациональной формы математического описания такого сигнала. Следуя [13], рассмотрим связь между огибающей, фазой и частотой узкополосного действительного сигнала.

При такой форме записи возникает неопределенность в выборе функций  $E(t)$  и  $\psi(t)$ , так как всегда можно удовлетворить выражению (2.4) при любой функции  $\psi(t)$  соответствующим выбором  $E(t)$ .

Покажем это. Пусть сигнал, соответствующий простейшему гармоническому колебанию

$$A(t) = E_0 \cos \omega_0 t, \quad (2.5)$$

будет записан в виде

## 2. Преобразование радиосигналов в цифровую форму

$$A(t) = E(t) \cos \omega t. \quad (2.6)$$

В выражении (2.6) огибающая  $E(t)$ , в отличие от  $E_0$  в выражении (2.5), является функцией времени, которую можно определить из условия

$$E_0 \cos \omega_0 t = E(t) \cos(\omega_0 \pm \Omega_p)t,$$

откуда

$$E(t) = \frac{E_0 \cos \omega_0 t}{\cos(\omega_0 \pm \Omega_p)t} = \frac{E_0 \cos \omega_0 t}{\cos \Omega_p t \cos \omega_0 t \mp \sin \Omega_p t \sin \omega_0 t} = \frac{E_0}{\cos \Omega_p t \mp \sin \Omega_p t \text{tg} \omega_0 t}. \quad (2.7)$$

Из этого примера видно, что нерациональный выбор в (2.6) аргумента  $\psi(t)$  ( $\omega t$  вместо  $\omega_0 t$ ), привел к усложнению выражения (2.7) для  $E(t)$ . Эта новая функция по существу не является огибающей в общепринятом смысле, так как она может «пересекать»  $x(t)$  (вместо касания в точках, где  $x(t)$  имеет максимальное значение). Оперирование с этой огибающей затруднено.

Неопределенности можно избежать, если представить  $E(t)$  и  $\psi(t)$  при помощи соотношений (2.2) и (2.3), причем функции  $A(t)$  и  $C(t)$  связаны между собой преобразованиями Гильберта

$$A(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (2.8)$$

$$C(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (2.9)$$

Соотношения (2.8) и (2.9) описывают комплексные квадратурные компоненты огибающей принимаемого сигнала, представленную в декартовой системе координат. Они позволяют, имея в наличии только одну из квадратурных компонент комплексной огибающей, восстановить другую и, следовательно, восстановить весь сигнал. Отметим, что существует преобразование Гильберта, связывающее комплексную огибающую сигнала и его полную фазовую функцию, и которые представимы в полярной системе координат.

Если известен спектр комплексных квадратурных компонент  $A(t)$  и  $C(t)$  в виде  $\hat{S}_A(\omega)$  и  $\hat{S}_C(\omega)$ , то преобразование Гильберта в спектральной области будет [13]



$$\hat{S}_C(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{S}_A(\nu)}{\omega - \nu} d\nu,$$

$$\hat{S}_A(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{S}_C(\nu)}{\omega - \nu} d\nu.$$

Отметим, что в теории и на практике используется понятие логарифмического амплитудно-частотного спектра в виде

$$\ln \hat{S}(\omega) = \ln [S_A(\omega) - jS_C(\omega)] = \ln |\hat{S}(\omega)| + j\psi(\omega).$$

Поскольку логарифмирование является нелинейной операцией, то если существует соотношение Гильберта между  $\hat{S}_A(\omega)$  и  $\hat{S}_C(\omega)$ , то оно не всегда существует между  $\ln |\hat{S}(\omega)|$  и  $\psi(\omega)$ . Сигналы, у которых эта связь сохраняется, т.е. справедливо соотношение Гильберта между  $\ln |\hat{S}(\omega)|$  и  $\psi(\omega)$ , называются *минимально-фазовыми сигналами*. В противном случае они называются *неминимально-фазовыми*. Отметим, что аналогичные понятия были введены и для описания линейных цепей.

Из вышесказанного, в соответствии с выражениями (2.2) и (2.3), можно графически изобразить радиосигнал  $\hat{x}(t)$  в каждый момент времени  $t$  так, как показано на рис. 2.1,а. Очевидно, что в этом случае декартова система координат  $(\text{Re } \hat{x}, \text{Im } \hat{x})$  вращается со скоростью  $\pm \Omega_p t$  относительно декартовой системы координат  $(\text{Re } \hat{x}, \text{Im } \hat{x})$ , которая в свою очередь вращается со скоростью  $\omega_0 t$  против часовой стрелки.

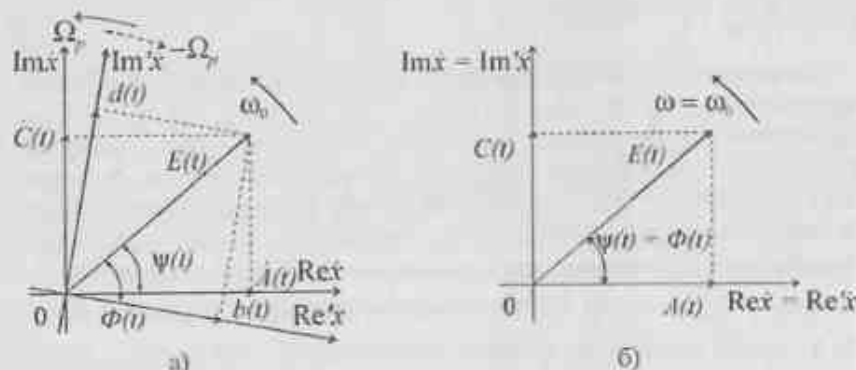


Рис. 2.1. Графическое изображение радиосигнала в виде вектора и его:  
а) комплексных квадратурных компонент;  
б) квадратурных компонент

В том случае, когда  $\Omega_p = 0$  (что будет выполняться в дальнейшем, если не оговорено особо) комплексные квадратурные компоненты  $\hat{A}(t)$  и  $\hat{C}(t)$  становятся квадратурными составляющими  $A(t) = b(t)$  и  $C(t) = d(t)$ . Тогда рассматриваемая функция  $A(t)$  представима в виде проекции вектора  $E(t)$  на ось абсцисс  $\text{Re } \hat{x}$ , относительно которой отсчитывается угол  $\psi(t) = \Phi(t)$  в каждый момент времени  $t$ , как показано на рис. 2.1,б. В этом случае входной сигнал представим в виде

$$\hat{x}(t) = E(t) \exp\{-j\psi(t)\} = A(t) - jC(t).$$

Тогда с учетом (2.8) и (2.9) функции  $E(t)$  и  $\psi(t)$  представимы в форме следующих соотношений

$$E(t) = \sqrt{A^2(t) + C^2(t)}, \quad (2.10)$$

$$\psi(t) = -\text{Arctg} \frac{C(t)}{A(t)}. \quad (2.11)$$

Рассмотрим свойства сигнала, описываемого выражениями (2.10) и (2.11).

*Свойство 1.* В точках, где кривая  $C(t)$  равна нулю, кривые  $E(t)$  и  $A(t)$  имеют общие касательные, а где кривая  $A(t)$  равна нулю, это условие выполняется для кривых  $E(t)$  и  $C(t)$ .

*Свойство 2.* Выражение (2.10) определяет огибающую в виде касательной к точкам максимума.

*Свойство 3.* По модулю спектральные плотности  $\hat{S}_A(\omega)$  и  $\hat{S}_C(\omega)$  одинаковы. Фазовая характеристика  $\hat{S}_C(\omega)$  отличается от фазовой характеристики  $\hat{S}_A(\omega)$  тем, что все спектральные составляющие функции  $C(t)$  отстают на  $\pi/2$  от соответствующих спектральных составляющих  $A(t)$ .

Следовательно, при  $\omega > 0$  спектральные плотности  $\hat{S}_A(\omega)$  и  $\hat{S}_C(\omega)$  связаны соотношением

$$\hat{S}_C(\omega) = -j\hat{S}_A(\omega) \quad \text{при } \omega > 0, \quad (2.12)$$

а в случае наличия у сигнала отрицательных частот

$$\hat{S}_C(\omega) = j\hat{S}_A(\omega) \quad \text{при } \omega < 0. \quad (2.13)$$

*Свойство 4.* Мгновенная частота узкополосного сигнала определяется

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \text{Arctg} \frac{C(t)}{A(t)} \right] = \frac{A(t)C'(t) - C(t)A'(t)}{A^2(t) + C^2(t)}. \quad (2.14)$$

Выделив в (2.14) постоянную часть, соответствующую  $\omega_0$ , выражение для  $\psi(t)$  можно представить в виде

$$\psi(t) = \omega_0 t + \Phi(t) + \varphi, \quad (2.15)$$

в котором  $\Phi(t)$  не содержит слагаемого, линейно зависящего от времени. Тем самым устраняется произвол в выборе «средней» частоты  $\omega_0$  сигнала  $\hat{x}(t)$ , соответственно функции фазовой модуляции  $\Phi(t)$  и начальной фазы  $\varphi$ .

С учетом вышесказанного, сигнал  $\hat{x}(t)$  на выходе УПЧ называется комплексным или аналитическим сигналом.

Модуль комплексной огибающей, равный  $E(t)$ , содержит информацию только об амплитудной модуляции колебания, а фазовый множитель  $\psi(t)$  — только об угловой. В целом же произведение  $E(t)\exp\{-j\psi(t)\}$  содержит полную информацию о сигнале  $\hat{x}(t)$  (за исключением частоты  $\omega_0$ , которая предполагается известной). Это свойство комплексных сигналов позволяет при анализе исключать из рассмотрения частоту  $\omega_0$ .

Рассмотрим основные свойства аналитического сигнала и его комплексной огибающей [13].

**Свойство 1.** Произведение аналитического сигнала  $\hat{x}(t)$  на сопряженный ему сигнал  $\hat{x}^*(t)$  равно квадрату его огибающей

$$\hat{x}(t)\hat{x}^*(t) = [A(t) - jC(t)][A(t) + jC(t)] = A^2(t) + C^2(t) = E^2(t).$$

**Свойство 2.** Спектр аналитического сигнала содержит только положительные частоты. Из (2.12) и (2.13) видно, что

$$\hat{S}_E(\omega) = \begin{cases} 2S_{An}(\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0. \end{cases}$$

**Свойство 3.** Спектральная плотность комплексной огибающей  $\hat{E}(t)$  совпадает со смещенной на величину  $\omega_0$  влево спектральной плотностью аналитического сигнала  $\hat{x}(t)$ , т.е.

$$\hat{S}_E(\omega) = \hat{S}_{An}(\omega - \omega_0) \text{ при } \omega > 0.$$

**Свойство 4.** Корреляционная функция аналитического сигнала связана с корреляционной функцией действительного сигнала (действительной части комплексного сигнала) соотношением

$$B_{An}(\tau) = 0,5 \operatorname{Re} B_E(\tau).$$

Отсюда следует, что энергия аналитического сигнала равна удвоенной энергии действительного сигнала.

2.2.2. В дальнейшем будем полагать, что для описания всего множества сигналов используется понятие пространства сигналов, в котором каждый используемый вид сигнала изображается простейшим элементом, а имен-

но — точкой [14]. Тогда конкретный сигнал является элементом множества  $L$  с некоторым свойством  $P$ .

Наиболее общими свойствами радиосигналов является их периодичность, ограниченность по энергии, длительности, полосе, а также то, что они могут рассматриваться как узкополосные колебания.

Обычно пространство сигналов представимо в виде линейного пространства, обладающего для операции сложения двух векторов свойствами коммутативности, ассоциативности, содержит нулевой элемент, а также каждый элемент имеет равный себе по величине и имеет противоположный знак (для операции сложения).

Множеству элементов, именуемых скалярами и образующими поле, соответствует операция умножения вектора на скаляр, которая подчиняется правилу ассоциативности и законам дистрибутивности.

Если в качестве скаляров берутся действительные числа, то линейное пространство называется действительным линейным пространством  $R$ , если комплексные числа — комплексным линейным пространством  $C$ .

Вектор  $X$ , образуемый суммированием нескольких векторов  $x_i$  со скалярными коэффициентами  $\alpha_i$ , называется линейной комбинацией, т.е.

$$X = \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i.$$

Множество всех линейных комбинаций векторов  $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$  образует линейное пространство. Множество векторов  $\{x_i, i = \overline{1, q}\}$  называется

линейно независимым, если равенство  $\sum_{i=1}^q \alpha_i x_i = 0$  справедливо только при всех  $\alpha_i = 0$ .

Если  $M$  является пространством линейных комбинаций  $q$  независимых векторов  $\{x_i, i = \overline{1, q}\}$ , в котором каждый вектор является единственной комбинацией векторов  $\{x_i\}$ , т.е. соответствует единственному множеству скалярных коэффициентов, то  $M$  называется  $q$ -мерным линейным пространством. Любое множество  $n$  линейно независимых векторов в  $M$  может являться его базисом, а, следовательно, линейное пространство имеет не один базис.

Если имеется произвольное  $q$ -мерное линейное пространство  $M$  с базисом  $\{u_i, i = \overline{1, q}\}$ , то любой вектор  $X \in M$  имеет единственное разложение

$$X = \sum_{i=1}^q \alpha_i u_i.$$

Следовательно, набор  $q$  чисел  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q\}$  является представлением вектора  $\mathbf{X}$  в комплексном  $C^q$  или действительном  $R^q$  линейных  $q$ -мерных пространствах по отношению к базису  $\{\mathbf{u}_i\}$ . Различные наборы из  $q$  чисел могут представлять один и тот же вектор  $\mathbf{X}$  по отношению к различным базисам.

Нормированное линейное пространство, иначе называемое банаховым, характеризуется действительным числом, соответствующим размеру элемента в линейном пространстве. Такое число называется нормой вектора  $\|\mathbf{X}\|$  и обладает следующими свойствами.

Свойство 1.  $\|\mathbf{X}\| \geq 0$  и  $\|\mathbf{X}\| = 0$  только если  $\mathbf{X} = 0$ .

Свойство 2.  $\|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\| \leq \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{Y}\|$ .

Свойство 3.  $\|\alpha\mathbf{X}\| = |\alpha| \|\mathbf{X}\|$ .

Свойство 4.  $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$ .

В дальнейшем будем полагать, что поступающие на обработку сигналы имеют ограниченную энергию, т. е. выполняется соотношение для  $R^q$  или  $C^q$  в виде

$$\|\mathbf{X}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^q |\alpha_i|^2},$$

а для действительных или комплексных функций времени, определенных на интервале времени обработки  $T_{обп}$ , соотношением

$$\|\mathbf{X}\| = \sqrt{\int_{T_{обп}} |x(t)|^2 dt}.$$

Множество функций, для которых энергия ограничена, находятся в пространстве называемом пространством  $L^2$ .

Два вектора  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  ортогональны тогда и только тогда, когда  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ .

Система векторов  $\{\mathbf{u}_i, i = \overline{1, q}\}$  называется ортонормальной, если базисом для нее является она сама. Если векторы взаимно ортогональны и норма их равна единице, то  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \delta_{ij}$ .

Анализ математического описания свойств совокупности радиосигналов показал, что их обработка на соответствующих вычислителях, в общем случае, сводится к решению различного рода систем алгебраических уравнений той или иной степени сложности в зависимости от вида решаемой задачи и представления входной информации в цифровой форме.

### 2.3. Формирователи квадратур

Для получения цифровых сигналов, как указывается в 2.1, необходимо производить дискретизацию аналоговых сигналов по времени и полученные выборки преобразовывать в цифровые коды. Как правило, указанные процедуры технически реализуются в различных узлах.

2.3.1. Рассмотрим операции дискретизации.

Процедуру дискретизации входного сигнала удобно рассматривать как умножение функции  $\hat{x}(t)$  на периодическую последовательность  $U_T(t)$  тактовых импульсов [13]. В качестве таких импульсов обычно рассматривают  $\delta$ -функции

$$U_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \text{ где } T - \text{временной интервал дискретизации.}$$

Тогда входной сигнал (2.1) представляется в дискретной форме в виде

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(t)U_T(t) = \hat{x}(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}_n,$$

где  $\hat{x}_n = \hat{x}(nT)\delta(t - nT)$ .

При таком обозначении  $\hat{x}_n$  имеет вид бесконечно короткого импульса, расположенного на оси времени в точке  $t = nT$  и обладающего площадью, которая численно равна выборке  $\hat{x}(nT)$ . Таким образом, выборки  $\hat{x}(nT)$  из сигнала  $\hat{x}(t)$  являются весовыми коэффициентами  $\delta$ -функций.

Частота периодической последовательности тактовых импульсов  $U_T(t)$  выбирается из условия выполнения теоремы Котельникова, которая утверждает, что если наивысшая частота в спектре функции  $\hat{x}(t)$  меньше чем  $f_{max}$ , то функция  $\hat{x}(t)$  полностью определяется последовательностью своих комплексных значений в моменты времени, отстоящие друг от друга не более чем на  $f_{max}^{-1}$  (с) и не более  $(0,5f_{max})^{-1}$  (с) для действительных значений функции  $x(t)$ .

Очевидно, что поскольку все реализации, поступающие на обработку, имеют начало и конец, то спектр анализируемого сигнала расположен в диапазоне частот  $(-\infty < f < \infty)$ . В этом случае говорить об «ограниченности» полосы частот, занимаемой сигналом, нельзя.

На практике учитывают то обстоятельство, что полезный сигнал всегда поступает на обработку в смеси с шумом. Поэтому полагают, что ширина полосы частот, занимаемая полезным сигналом ограничивается той полосой, где мощность его спектральных компонент превышает мощность шумовых компонент.

В случае обработки сигналов, поступающих с выхода ЛТП РПрУ, задача определения  $f_{\max}$  еще более упрощается, т.к. полагают, что спектральных компонентов ни сигнала, ни шума выше верхней частоты полосы пропускания УПЧ не существует.

В свою очередь, получение непрерывного сигнала по отсчетам дискретизированного требует применения схем, обладающих импульсными характеристиками вида  $\sin t/t$ , длительность которых находится в пределах  $(-\infty < t < \infty)$ . Такие схемы технически нереализуемы.

На практике, для получения непрерывного сигнала из отсчетов дискретного, используют сглаживающие фильтры нижних частот (ФНЧ), у которых форма импульсных характеристик приближается к форме функции  $\sin t/t$ , при значениях  $t$  близких к нулю.

Поэтому для получения практических результатов, близких к теоретическим, увеличивают частоту дискретизации  $F_d = 1/T$  в несколько раз относительно случая, определяемого условиями выполнения теоремы Котельникова.

На практике величина превышения частоты  $F_d$ , выбираемой из указанных соображений, превышает частоту дискретизации, выбираемую из условий выполнения теоремы Котельникова, в 3-5 раз.

В дальнейшем будем полагать при теоретическом анализе, что используемая частота дискретизации выбирается из условий выполнения теоремы Котельникова.

Таким образом, для радиосигнала с выхода ЛТП РПрУ, частота выборок  $F_d$  определяется в виде  $F_d \geq 2(f_0 + \Delta F) = 2f_{\max}$ , как показано на рис. 2.2.

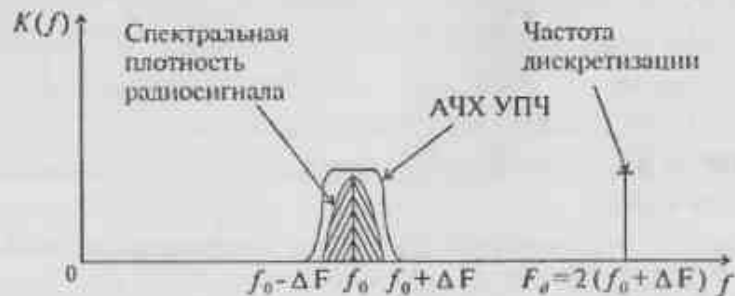


Рис. 2.2. Виды спектральной плотности сигнала, АЧХ УПЧ и частоты дискретизации

В свою очередь,  $\delta$ -функция на временной оси может быть реализована в виде стробирующего импульса, амплитуда которого равна максимальной амплитуде входного сигнала, а длительность принимают равной величине,

не более  $0,1/(f_0 + \Delta F)$  сек. Очевидно, что в данном случае предъявляются высокие требования к схемам, формирующим стробирующие импульсы.

2.3.2. Рассмотрим структуру спектра дискретизированного сигнала. По определению, преобразование Фурье любой временной функции равно

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \hat{x}(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \exp(-j\omega t) \right] dt.$$

Периодическую последовательность  $\delta$ -функций можно представить в виде ряда Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(jk\Omega), \text{ где } \Omega = 2\pi/T.$$

Поставляя последнее выражение в подынтегральное произведение и производя ряд преобразований получаем

$$X_T(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{x}(t) \exp[-j(\omega - k\Omega)t] \right\} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right).$$

Следовательно, спектр  $X_T(j\omega)$  дискретизированного сигнала представляет собой последовательность спектров  $X(\omega - k\Omega)$  исходного сигнала  $\hat{x}(t)$  сдвинутых друг относительно друга на величину  $\Omega = 2\pi/T$ .

Отсюда видно, что поскольку ширина спектра полезного сигнала  $2\Delta F \ll f_0$ , то можно дискретизировать входной процесс  $\hat{x}(t)$  с частотой  $F_d \geq 2\Delta F$ , т.е. выбирать частоту дискретизации определяемую полосой обрабатываемого сигнала. Для этого случая, длительность стробирующих импульсов также выбирают равной величине не более  $0,1/(f_0 + \Delta F)$  сек.

Спектральная плотность полезного сигнала после применения рассмотренного метода дискретизации принимает вид, изображенный на рис. 2.3.



Рис. 2.3. Виды спектральной плотности сигнала при выборе частоты дискретизации  $F_d \geq 2F_{\max}$

Частота дискретизации должна выбираться так, чтобы при периодическом повторении спектра  $X(\omega - k\Omega)$ , располагающегося в полосе  $2\Delta F + kF_0$ , он не накладывался на спектр  $X[\omega - (k+1)\Omega]$ , располагающийся в полосе  $2\Delta F + (k+1)F_0$ .

Подобный принцип дискретизации находит место в радиоприёмниках радионавигационных систем с цифровой обработкой сигналов, работающих в длинноволновом диапазоне, когда полезный сигнал представляет собой синусоидальное колебание.

В случае, если частота дискретизации выбирается с нарушением условий теоремы Котельникова, наблюдается эффект наложения спектров, что приводит к искажению информации, поступающей на обработку.

2.3.3. Очевидно, что возникают определенные технические трудности при реализации устройств выборки и хранения (УВХ) в АЦП, в случае, когда величина  $f_0 + \Delta F$  находится в диапазоне единиц и десятков мегагерц, а величина  $2\Delta F$  при этом составляет десятки килогерц.

С другой стороны, из выражения (2.1) следует, что комплексная огибающая содержит полную информацию о сигнале, а, следовательно, обрабатывая ее квадратурные компоненты  $\hat{A}(t)$  и  $\hat{C}(t)$ , можно понизить частоту дискретизации  $F_0$  до величин, сравнимых с шириной спектральной плотности полезного сигнала.

Поэтому в настоящее время отдают, как правило, предпочтение методу преобразования спектра полезного сигнала в диапазон частот  $0 + \Delta F$ , что может быть достаточно просто реализовано при помощи структурной схемы, изображенной на рис. 1.1 [15].

Тогда спектральная плотность радиосигнала  $\hat{x}(f)$  на входах и выходах двух квадратурных каналов может быть представлена в виде, изображенном на рис. 2.4.

Частота дискретизации на выходе каждого квадратурного канала может быть выбрана равной  $F_0 \geq \Delta F$  в случае, если на выходах умножителей частоты установлены идеальные ФНЧ с характеристиками

$$K(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq F \leq \Delta F, \\ 0 & \text{при } F > \Delta F. \end{cases}$$

Выполнение теоремы Котельникова при этом обеспечивается тем, что дискретизация осуществляется в двух квадратурных каналах одновременно. Таким образом, преобразование сигнала по схеме рис. 1.1 приводит к уменьшению частоты дискретизации в каждом квадратурном канале до минимальной частоты огибающей спектра полезного сигнала ( $F_0 = \Delta F$ ), что позволяет понизить требования к узлам АЦП.

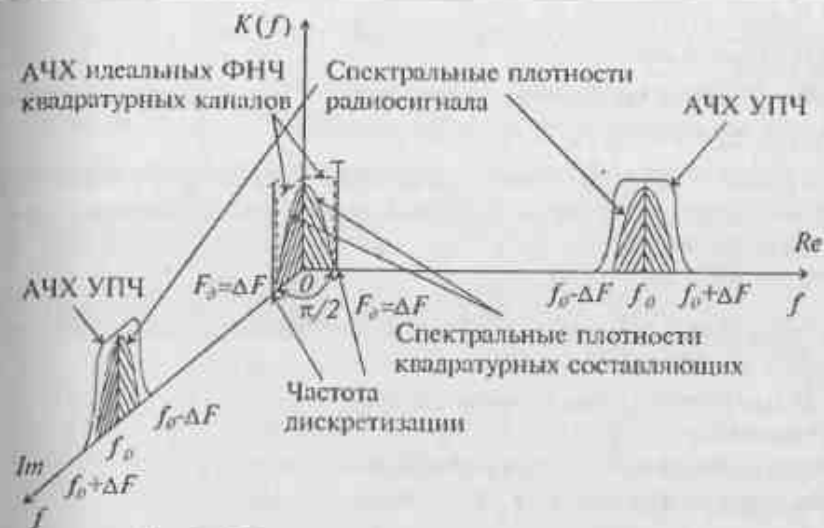


Рис. 2.4. Виды спектральной плотности сигнала на входах и выходах квадратурных каналов

2.3.4. Рассмотрим особенности технической реализации формирователя квадратур (ФК). Обычно полагают, что максимальная амплитуда входного сигнала равна размаху амплитудной характеристики АЦП. Частотная характеристика ФК определяется полосами УПЧ и ФНЧ, расположенными на входе и выходе соответствующих умножителей частоты, которые представляют собой фазовые детекторы (ФД).

Наибольшее внимание требует обоснование допустимых отклонений амплитудной и фазовой характеристик ФК от идеальных. Нелинейность и разнонаправленность по наклону амплитудных характеристик ФК приводит к появлению на его выходах искажений и ложных сигналов.

Синфазную (действительную Re) и квадратурную (мнимую Im) составляющие на выходе реального ФК можно представить в виде [16]

$$x_{сф0} = k_{сф} x_{сф0} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{сфn} \cos(\pi n x_{сф0}) + b_{сфn} \sin(\pi n x_{сф0})], \quad (2.16)$$

$$x_{кв0} = k_{кв} x_{кв0} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{квn} \cos(\pi n x_{кв0}) + b_{квn} \sin(\pi n x_{кв0})],$$

где  $x_{сф0}$ ,  $x_{кв0}$  — синфазная и квадратурная составляющие ФК с идеальными характеристиками;  $k_{сф}$ ,  $k_{кв}$  — средние наклоны амплитудных характеристик;  $a_{сфn}$ ,  $a_{квn}$ ,  $b_{сфn}$ ,  $b_{квn}$  — коэффициенты разложения в ряд Фурье ложно-

го сигнала, возникающего из-за отклонений амплитудных характеристик от идеальных.

Для иллюстрации влияния неидеальности ФК на обработку предположим, что в выражении (2.16) все коэффициенты нелинейности, кроме  $b_{cф1}$  и  $b_{кс1}$ , равны нулю, а  $k_{cф} = k_{кс} = 1$ , что соответствует случаю, когда нелинейность можно представить отрезком синусоиды. Тогда выражение (2.16) принимает вид

$$x_{cф} = x_{cф0} + b_{cф1} \sin(\pi k x_{cф0}), \quad x_{кс} = x_{кс0} + b_{кс1} \sin(\pi k x_{кс0}).$$

Пусть на вход ФК подается действительный гармонический сигнал вида  $x(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \Omega_p t)$ .

Квадратурные составляющие на выходах:

• идеального ФК

$$x_{cф0} = E_0 \cos(\Omega_p t), \quad x_{кс0} = E_0 \sin(\Omega_p t);$$

• реального ФК

$$\begin{aligned} x_{cф} &= E_0 \cos(\Omega_p t) + b_{cф1} \sin[\pi E_0 \cos(\Omega_p t)] = \\ &= E_0 \cos(\Omega_p t) + b_{cф1} 2I_1(\pi E_0) \cos(\Omega_p t) - b_{cф1} 2I_3(\pi E_0) \cos(3\Omega_p t) + \dots; \\ x_{кс} &= E_0 \sin(\Omega_p t) + b_{кс1} \sin[\pi E_0 \sin(\Omega_p t)] = \\ &= E_0 \sin(\Omega_p t) + b_{кс1} 2I_1(\pi E_0) \sin(\Omega_p t) + b_{кс1} 2I_3(\pi E_0) \sin(3\Omega_p t) + \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $I_n(m)$  – функция Бесселя 1-го рода  $n$ -го порядка от  $m$ .

Используя (2.17), можно оценить уровень ложных сигналов, которые образуются на частотах, кратных основной частоте, и задать допустимую нелинейность амплитудных характеристик ФК.

Как показано в [16], для получения уровня ложных сигналов -40 дБ относительно уровня основного сигнала, отклонение уровня амплитудных характеристик от идеальных, не должно превышать 1%, а для уровня -60 дБ равно 0,1%.

Указанную неидеальность, в том случае если она заранее известна, можно скорректировать путем соответствующей перекодировки так, как показано на рис. 2.5.

Отклонение разности фаз квадратурных составляющих от  $\pi/2$ , также приводит к появлению ложных сигналов на выходе ФК.

При разности фаз квадратурных составляющих, равной  $\varphi$ , в случае гармонического входного сигнала, на выходе ФК будем иметь

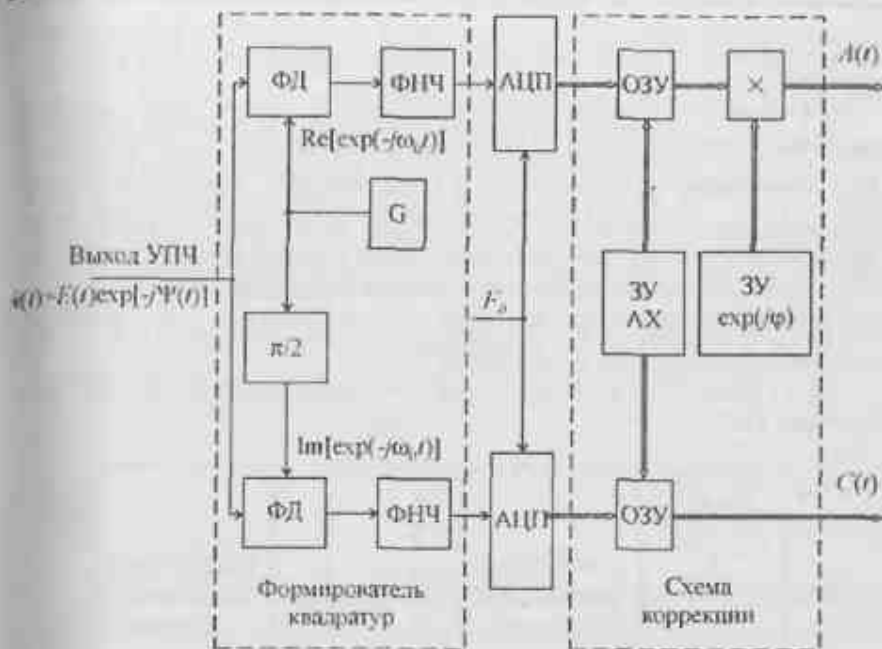


Рис. 2.5. Структурная схема формирователя квадратур с коррекцией

$$\begin{aligned} x_{cф} + jx_{кс} &= E_0 \cos(\Omega_p t) + jE_0 \sin(\Omega_p t + \varphi) = \\ &= E_0 \cos(\varphi/2) \exp[j(\Omega_p t + \varphi/2)] + E_0 \sin(\varphi/2) \exp[-j(\Omega_p t - \varphi/2 - \pi/2)]. \end{aligned}$$

Из приведенного выражения видно, что разность фаз квадратурных составляющих, отличная от  $\pi/2$ , приводит к появлению ложного сигнала на частоте  $-\Omega_p$ . При уровне ложных сигналов не более -40 дБ, погрешность отклонения от  $\pi/2$  не должна превышать величины  $\pi/180$ , что равно  $1^\circ$ , а при -60 дБ – погрешность не должна превышать  $0,1^\circ$  [16].

Искажения, вносимые указанным рассогласованием, могут быть устранены умножением квадратурной составляющей на фазовый множитель  $\exp(j\varphi)$ , как показано на рис. 2.5.

Следует сказать, что рассмотренное техническое решение не свободно от ряда недостатков, связанных с необходимостью иметь точные данные о реальных отклонениях характеристик ФК от идеальных. Также возникают трудности, связанные с компенсацией «дрейфа нуля» на выходах ФД, ограничениями, связанными с резким возрастанием требований к точности выполнения анало-

говых элементов при задании уровней ложных сигналов -60 дБ и более, а также с затруднениями, связанными с требованиями к идентичности двух квадратурных каналов в широком температурном диапазоне.

2.2.5. В тех случаях, когда промежуточная частота на выходе узкополосного УПЧ относительно невысока, находит применение метод, использующий близость форм узкополосного и гармонического колебаний на интервалах времени, соизмеримых с величиной  $2\pi/\omega_0 = 1/f_0$ . Этот метод позволяет устранить недостатки ФК, реализуемого на аналоговой элементной базе. Метод основан на взятии двух отсчетов из входного колебания последовательно во времени через интервал времени  $2\pi/4\omega_0 = 1/4f_0$  на каждом периоде высокочастотного колебания [2].

Структурная схема устройства, реализующего данный метод, изображена на рис. 2.6.



Рис. 2.6. Структурная схема формирователя квадратур с использованием близости форм узкополосного и гармонического колебаний

Работает устройство следующим образом. Входное колебание с центральной частотой  $f_0 = \omega_0/2\pi$  поступает на УВХ, на вторые входы которых поступают стробирующие импульсы с частотой  $F_\delta = f_0$ . Эти стробирующие импульсы поступают на первый канал непосредственно, а на второй – через элемент задержки с временем задержки  $1/4f_0$ . Данные, поступающие с выходов УВХ каналов, последовательно во времени через коммутатор аналоговых выборок преобразуется в АЦП в цифровые коды. Последние, через коммутатор цифровых кодов, поступают на квадратурные выходы ФК.

В данной схеме достигается более высокая идентичность амплитудных характеристик, что позволяет достаточно легко осуществить требования по обеспечению заданных величин ложных сигналов на уровнях менее -60 дБ.

Однако данный метод имеет методическую погрешность связанную с тем, что ортогональность двух квадратурных составляющих выполняется только для входного сигнала, имеющего частоту, равную  $f_0$ .

Рассмотрим возникновение методической погрешности. Пусть на узкополосного колебания  $x(t)$  в момент времени  $t_0 - 1/4f_0$  формируется первый отсчет

$$x_1 = x(t_0 - 1/4f_0) = V(t_0 - 1/4f_0) \cos[\omega(t_0 - 1/4f_0) + \varphi(t_0 - 1/4f_0)],$$

а в момент времени  $t_0$  – второй отсчет

$$x_2 = x(t_0) = V(t_0) \cos[\omega t_0 + \varphi(t_0)].$$

Если бы  $V(t_0 - 1/4f_0) = V(t_0)$  и  $\varphi(t_0 - 1/4f_0) = \varphi(t_0)$ , то первый отсчет был бы

$$x_1^* = V(t_0) \sin[\omega t_0 + \varphi(t_0)],$$

т. е. он совпадал бы со взятым в момент времени  $t_0$  отсчетом колебания  $x_2$ , сопряженным с  $x_1$  по Гильберту. Поскольку это условие выполняется только при  $\omega = 2\pi F_\delta$ , то тогда в комплексной форме отсчеты входного сигнала произвольной частоты  $f$  на входе каналов можно представить в виде

$$x_2 = x_1 \exp(-j\pi/2) \exp(j\varphi),$$

где  $\varphi = 2\pi f_p / F_\delta$ ;  $f_p = f - f_0$  – величина расстройки по частоте между входным сигналом и частотой дискретизации  $F_\delta = f_0$ .

Как видно из рис. 2.7, методическая погрешность может быть описана выражением  $\Phi(\varphi)_M = \alpha\varphi$ , т. е. линейно нарастает по частоте.

Решение задачи компенсации методической погрешности может быть получено путем применения неминимально-фазового цифрового фильтра первого порядка, который включается в один из каналов ФК [17–19].

Данный неминимально-фазовый цифровой фильтр имеет коэффициент передачи по амплитуде равный единице и фазочастотную характеристику (ФЧХ) вида

$$\Phi(\varphi)_K = \Phi(\omega T)_K = -\arctg \frac{(1-r^2) \sin(\omega T)}{2r + (1+r^2) \cos(\omega T)},$$

где  $T = 1/F_\delta$ .

Семейство кривых  $\Phi(\omega T)_K$  в зависимости от величины  $r$  изображено на рис. 2.7. Видно, что подбором величины  $r$  можно с заданной точностью в

заданном диапазоне частот  $\omega T = \varphi$  получить компенсацию методической погрешности.

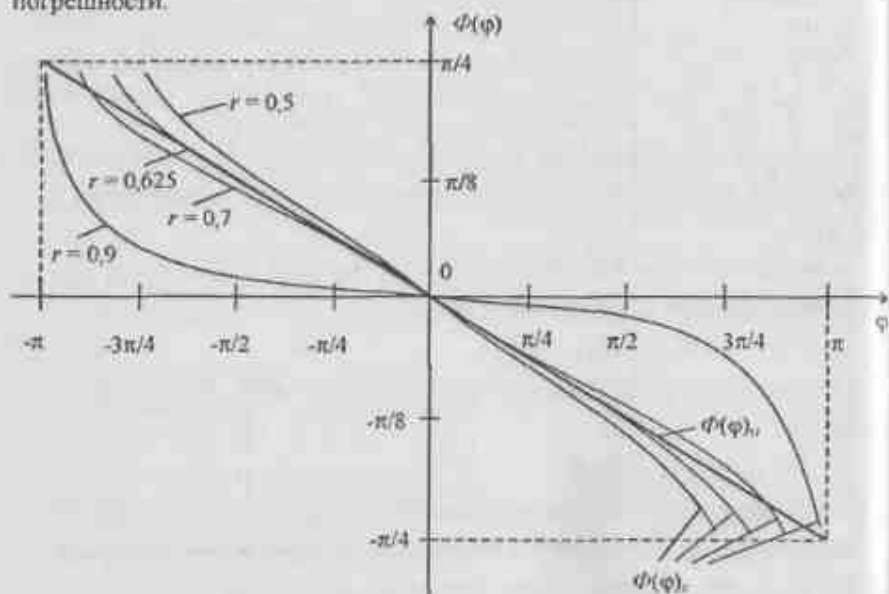


Рис. 2.7. Графическая иллюстрация компенсации методической погрешности набега фазы  $\Phi(\varphi)_M$  неминимально-фазовым цифровым фильтром с характеристикой  $\Phi(\varphi)_K$ .

Определим значение параметра  $r$  неминимально-фазового цифрового фильтра, при котором зависимость фазового сдвига от величины расстройки аппроксимировалась бы его ФЧХ оптимальным образом по минимаксному критерию [18].

Задача оптимизации решается путем определения максимального интервала нормированных частот

$$\varphi_{zp} = 2\pi(f_{zp} - F_0) / F_0,$$

в котором требуемая погрешность аппроксимации  $\epsilon_{mp}$  не превышает заданной величины. Результат находится путем решения системы трансцендентных уравнений [18]

$$\epsilon_{mp} = 0,25 \arccos \left[ \frac{3-5r^2}{2r} \right] - \arctg \left[ \frac{\sqrt{(1-r^2)(r^2-0,36)}}{r^2+0,6} \right].$$

$$-\epsilon_{mp} = 0,25\varphi_{zp} - \arctg \left[ \frac{(1-r^2)\sin \varphi_{zp}}{2r + (1+r^2)\cos \varphi_{zp}} \right].$$

На рис. 2.8 показаны рассчитанные на ЦВМ зависимости величин  $r = f(\epsilon_{mp})$  и  $\varphi_{zp} = f(\epsilon_{mp})$  и проведено сравнение с зависимостью  $\varphi_{zp}^* = f(\epsilon_{mp})$ , определяющей погрешность при отсутствии неминимально-фазового цифрового фильтра (компенсатора методической погрешности).

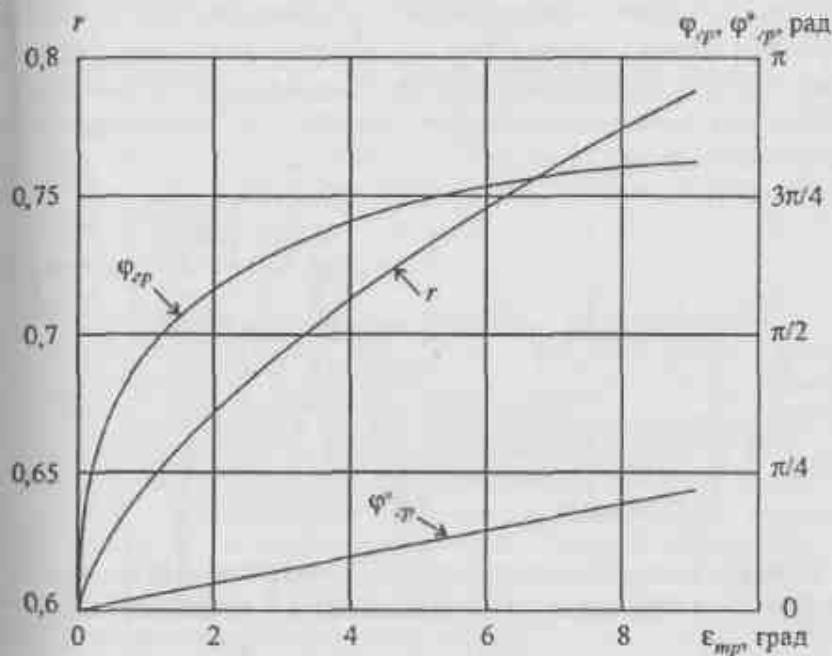


Рис. 2.8. Зависимости величин  $r = f(\epsilon_{mp})$ ,  $\varphi_{zp} = f(\epsilon_{mp})$  и  $\varphi_{zp}^* = f(\epsilon_{mp})$ .

Расчеты показали, что для полосы пропускания ЛПН РПРУ, составляющей  $\pm 5\%$  от его промежуточной частоты, величина  $\varphi_{zp} = \pm 0,1\pi$ . Тогда, при задании  $\epsilon_{mp} = 0,1^\circ$ , параметр  $r = 0,61$ .

Анализ кривых, приведенных на рис. 2.8, показывает, что компенсация методической погрешности позволяет значительно расширить диапазон частот, при котором удовлетворяются требования к точности формирования квадратурных составляющих  $A(t)$  и  $C(t)$ .



Переходная характеристика неминимально-фазового цифрового фильтра носит колебательный характер и достигает установившегося значения, равного единице, с точностью 0,1% за 12 отсчетов. Максимальный выброс этой характеристики равен 1,24 на втором отсчете. Следовательно, количество разрядов, которое необходимо обеспечить в узлах неминимально-фазового цифрового фильтра, лишь на один разряд превышает количество разрядов АЦП.

Рассмотренный метод позволяет получить высокую точность ( $< 0,1\%$  по амплитуде и по фазе) при формировании квадратурных составляющих  $A(t)$  и  $C(t)$  при  $f_0 \geq 12(2\Delta F)$ . Эти квадратурные составляющие поступают на обработку через интервалы времени  $T = 12/f_0$  одновременно с выходов ОЗУ.

В этом случае структурная схема ФК с компенсатором методической погрешности в виде неминимально-фазового цифрового фильтра примет вид, изображенный на рис. 2.9.

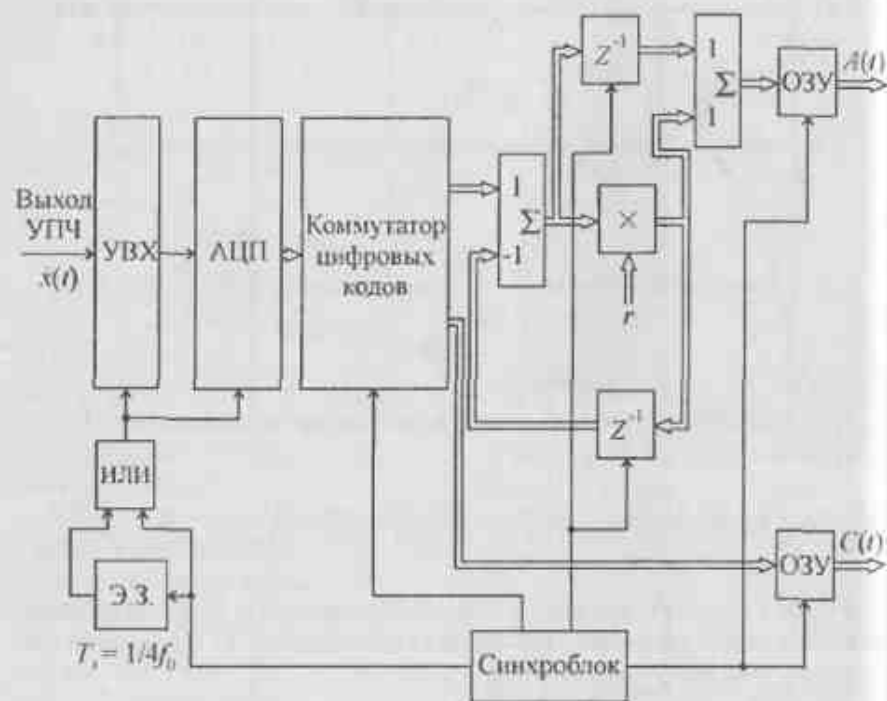


Рис. 2.9. Структурная схема формирователя квадратур с компенсатором методической погрешности.

Здесь  $Z^{-1} = \exp(-j\omega T)$  — задержка отсчета на  $T$ , ЭЗ — элемент задержки на время  $T_s = 1/4f_0$ . Выходные оперативные запоминающие устройства (ОЗУ) используются для целей синхронизации во времени выдачи квадратурных составляющих  $A(t)$  и  $C(t)$  на дальнейшую их обработку.

При этом выдача квадратурных составляющих  $A(t)$  и  $C(t)$  должна осуществляться с частотой  $F \geq 2\Delta F$ , где  $F = F_0/n$ ,  $n$  — целое число, указывающее, во сколько раз несущая частота  $f_0$  больше полосы частот  $2\Delta F$  тракта УПЧ. Получаемый при этом интервал времени, определяемый величиной  $n/F_0$ , является интервалом времени, в течение которого осуществляется расчет требуемого значения  $\Phi(\varphi)_k$  в неминимально-фазовом цифровом фильтре.

Отметим, что при такой организации образования квадратурных составляющих  $A(t)$  и  $C(t)$  отсутствует проблема «дрейфа нуля», характерная для рассмотренного ранее метода, однако достаточно высокие требования должны быть предъявлены к узлам УВХ.

#### 2.4. Аналого-цифровое преобразование радиосигналов

Аналоговые радиосигналы на выходе ЛТП представимы в виде непрерывных функций времени. В свою очередь, цифровая обработка сигналов требует их представления в виде последовательности закодированных тем или иным способом данных в цифровой форме.

2.4.1. Как указано в [20], при цифровой обработке сигналов стоит проблема выбора или синтеза в вычислителе базиса, адекватного решаемой задаче. Следует сказать, что базис в аналоговой части тракта обработки выбирают в виде комплексных экспоненциальных функций, что связано с тем, что они являются собственными функциями аналоговых частотно-избирательных цепей.

Указанная система функций обладает свойствами, описываемыми теоремами запаздывания и смещения. Это позволяет ввести понятие передаточной функции линейной цепи в частотной области, т.е. отразить не только изменение амплитуды спектральных составляющих входного сигнала в этой цепи, но и их запаздывание во времени с помощью одной функции, называемой амплитудно-фазочастотной характеристикой. Кроме того, достаточно просто все задачи обработки сводится к вычислению интеграла свертки двух функций — входной реализации и импульсной характеристики.

На основании вышесказанного видно, что в зависимости от используемых базисов в аналоговой и цифровой частях трактов обработки предъявляются различные требования к блоку преобразования аналогового сиг-

нала в цифровой (рис. 1.1). В самом общем случае подобные устройства называются АЦП [21].

Определим требования, которым должны удовлетворять АЦП в зависимости от вида используемых базисов в аналоговой и цифровой частях тракта обработки.

Из вышесказанного видно, что производя обработку только квадратурных составляющих, описываемых выражениями (2.8) и (2.9), можно получить всю информацию о характеристиках обрабатываемой реализации.

Следуя [22] положим, что полученные квадратурные составляющие расположены в комплексном линейном пространстве  $C^q$  и представляют собой компоненты вектора  $X$ , имеющего единственное разложение

$$X = \sum_{i=1}^q \alpha_i u_i,$$

где  $u_i$  – базис.

Подвергнем квантованию вектор  $X$  в моменты времени  $t_n = nT$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Запишем отсчеты процесса в виде диагональной матрицы  $X_n$ . Тогда на выходе квантователя будем иметь процесс в виде  $\tilde{X}_n = X_n H_n$ , где индекс  $n$  означает взятие отсчета в соответствующий момент времени,  $H_n^T = \{H_1(n), H_2(n), \dots, H_m(n)\}$  – весовой вектор, соответствующий коэффициенту передачи АЦП на  $n$ -м временном интервале преобразования.

Положим, что имеется искомый отклик преобразованного АЦП сигнала  $X$  в виде

$$D = \sum_{j=1}^m \beta_j \theta_j,$$

где  $\{\theta_j\}$  – базис, в котором работает вычислительное устройство,  $\beta_j$  – весовые коэффициенты. Очевидно, что  $m = q$ .

Тогда погрешность  $\epsilon_n$  для  $n$ -го отсчета, связанная с выносимыми АЦП искажениями, может быть записана в виде

$$\epsilon_n = D_n - \tilde{X}_n = D_n - X_n H_n. \quad (2.18)$$

Очевидно, что необходимо подобрать весовой вектор  $H_n$  так, чтобы  $\epsilon_n$  было минимально.

Вспользуемся следующим уравнением корректировки весового вектора [23]

$$H_{n+1} = H_n + \mu X_n^* \epsilon_n = H_n + \mu (X_n^* D_n - X_n^* X_n H_n),$$

где  $\mu$  – коэффициент, определяющий скорость сходимости уравнения.

Ползая, что процессы  $X_n$  и  $D_n$  стационарные, найдем решение, минимизирующее (2.18).

Решение ищется путем минимизации выражения

$$(D_n - X_n)^* (D_n - X_n),$$

где черта сверху означает знак математического усреднения.

Раскрывая последнее выражение, после ряда преобразований получаем

$$D_n^* D_n - K_{xd} H - H^* K_{xd} + H^* K_{xx} H,$$

где  $K_{xd} = X_n^* D_n$ ,  $K_{xx} = X_n^* X_n$ .

Взяв градиент в последнем выражении и приравняв его нулю, получаем

$$H_{opt} = K_{xx}^{-1} K_{xd}. \quad (2.19)$$

Из рассмотрения выражения (2.19) следует, что если ортогональные разложения входного и преобразованного АЦП сигналов принадлежат одному и тому же базису, т. е.  $\{u_i\} = \{\theta_j\}$ ,  $i = j$ , то используются комплексные экспоненциальные функции в аналоговой и цифровой частях тракта обработки.

Очевидно, что в этом случае  $K_{xx}^{-1} K_{xd} = I$ , где  $I$  – единичная диагональная матрица,  $j$ -е индексы которой соответствуют строкам, а  $i$ -е – столбцам. Из последнего равенства вытекает, что АЦП имеет линейную амплитудную характеристику и бесконечно большое число уровней квантования.

Известно [24], что при большом числе уровней квантования отсутствует корреляция между шумами квантования и квантуемым сигналом. Тогда в матричной форме запись будем иметь

$$\beta = I \bar{\alpha}, \quad (2.20)$$

где  $\beta$  – вектор-строка с индексами  $j$ ,  $\bar{\alpha}$  – вектор-столбец с индексами  $i$ ,  $i = j = \overline{1, q}$ .

Тогда связь весовых коэффициентов между собой будет иметь вид

$$\beta_j = \bar{\alpha}_j = \sqrt{\alpha_j^2 + \sigma_{ок}^2/n},$$

где  $\sigma_{ок}^2$  – мощность шумов квантования АЦП.

В том случае, когда  $\{\theta_j\} \neq \{u_i\}$ , т. е. базисы, в которых обрабатывается сигнал в аналоговой и цифровой частях системы обработки информации различны, целесообразно использовать следующую процедуру преобразования.

Пусть АЦП имеет такое устройство квантования, что на его выходе образуется сигнал вида

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^q \tilde{\alpha}_i \mathbf{u}_i$$

Очевидно, что необходимо выполнение условия

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^q \tilde{\alpha}_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^q \beta_i \boldsymbol{\theta}_i$$

Следует [14], сформулируем  $q$  скалярных уравнений. Для этого образуем скалярное произведение обеих частей последнего выражения путем умножения на  $\mathbf{z}_l$ ,  $l = \overline{1, q}$ , где  $\{\mathbf{z}_l\}$  – взаимный базис, такой, что  $(\boldsymbol{\theta}_l, \mathbf{z}_l) = \delta_{ll}$ .

Тогда

$$\sum_{i=1}^q \tilde{\alpha}_i (\mathbf{u}_i, \mathbf{z}_l) = \sum_{i=1}^q \beta_i (\boldsymbol{\theta}_i, \mathbf{z}_l)$$

откуда получаем

$$\beta_l = \sum_{i=1}^q (\mathbf{u}_i, \mathbf{z}_l) \tilde{\alpha}_i$$

В матричной форме последнее равенство может быть записано в виде

$$\boldsymbol{\beta} = \Gamma \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \quad (2.21)$$

где  $\Gamma$  – матрица размером  $q \times q$ , в  $l$ -ой строке и  $i$ -м столбце которой стоит член  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{z}_l)$ . Полученные значения  $\boldsymbol{\beta}$  из выражения (2.21) характеризуют дискретизированный, квантованный и перекодированный в базис, в котором работает вычислитель, входной сигнал.

Сравнение выражений (2.20) и (2.21) показывает, что при различных базисах в аналоговой и цифровой частях тракта обработки, одновременно с проведением преобразования «аналог-цифра», необходимо производить перерасчет коэффициентов, описывающих сигналы в различных базисах.

Следовательно, целесообразно использовать в вычислителе базис в виде комплексных дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) и осуществлять операции дискретизации и многоуровневого квантования в АЦП с линейной амплитудной характеристикой над квадратурными составляющими комплексной огибающей входного аналогового сигнала.

2.4.2. Рассмотрим более подробно АЦП [21]. Для достаточно узкополосных сигналов операции дискретизации можно выполнять при помощи самих АЦП и совмещать таким образом с операцией квантования. Основной закономерностью такой дискретизации является то, что за счет конечности времени преобразования и неопределенности момента его окончания, не удастся получить однозначного соответствия между значениями отсчетов и моментами времени, к которым их следует отнести. В результате при работе с изменяющимися во времени сигналами возникают специфические по-

грешности, динамические по своей природе, для оценки которых вводит понятие апертурной неопределенности, характеризующейся обычно апертурным временем.

Эффект апертурной неопределенности проявляется либо как погрешность мгновенного значения сигнала при заданных моментах измерения, либо как погрешность момента времени, в котором происходит измерение при заданном мгновенном значении сигнала.

При равномерной дискретизации следствием апертурной неопределенности является возникновение амплитудных погрешностей, которые называются апертурными и численно равны приращению сигнала в течении апертурного времени.

Точное значение апертурной погрешности можно определить, разложив значение напряжения  $u(t)$  соответствующего амплитуде исходного сигнала  $\tilde{x}(t)$  в ряд Тейлора в окрестности точек отсчета, которые для  $n$ -й точки имеет вид

$$u(t) = u(t_n) + t_n u'(t_n) + \frac{t_n^2}{2} u''(t_n) + \dots + \frac{t_n^k}{k!} u^{(k)}(t_n)$$

и дает в первом приближении апертурную погрешность в виде

$$\Delta u_n(t_n) \approx u'(t_n) t_n$$

где  $t_n$  – апертурное время, которое для рассматриваемого случая является в первом приближении временем преобразования АЦП.

Обычно для оценки апертурных погрешностей используют синусоидальный измерительный сигнал  $u(t) = U_m \sin \omega_0 t$ , при условии, что  $\sin \omega_0 t_n = \omega_0 t_n$ , при  $\omega_0 t_n \approx 0$ , максимальное относительное значение апертурной погрешности будет [21]

$$\Delta u_n / U_m = \Delta / U_m = \omega_0 t_n$$

Если принять, что для  $m$ -разрядного АЦП с разрешением  $2^{-m}$  апертурная погрешность не должна превышать шага квантования  $\Delta = \Delta u_0$  (рис. 2.10), то между частотой сигнала  $\omega_0$ , апертурным временем  $t_0$  и относительной

апертурной погрешностью имеет место соотношение  $2^{-m} = \omega_0 t_0$ .

Например, для дискретизации синусоидального сигнала частотой 100 кГц с погрешностью 1%, время преобразования АЦП должно быть равно 25 нс для того, чтобы преобразуемый синусоидальный сигнал не вышел за пределы младшего разряда. В то же время, с помощью такого быстродействующего АЦП при использовании УВХ для запоминания отсчетов сигналов принципиально можно дискретизировать сигналы с шириной спектра порядка 20 МГц.

Применение УВХ уменьшает динамическую погрешность, возникающую при дискретизации изменяющихся во времени непрерывных сигналов.

УВХ представляют собой схемы, содержащие в общем случае накопительный конденсатор, аналоговые ключи и усилительные каскады.



Рис. 2.10. Связь апертурной погрешности  $t_a$  с шагом квантования  $\Delta U_n = \Delta$

Существуют схемы УВХ аналогового (рис. 2.11) и цифрового (рис. 2.12) видов.

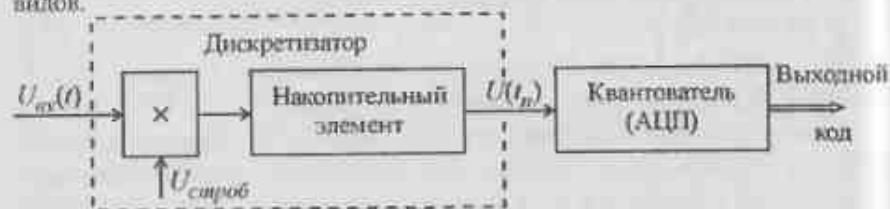


Рис. 2.11. АЦП с аналоговой схемой УВХ

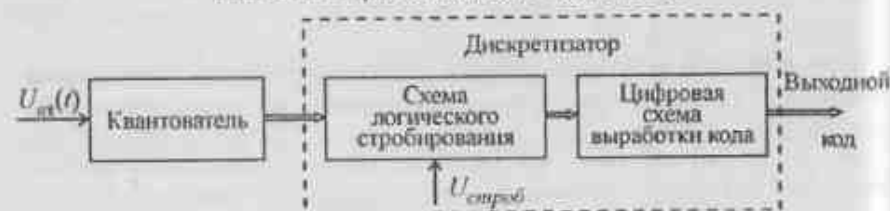


Рис. 2.12. АЦП с цифровой схемой УВХ

Наибольшее распространение получили аналоговые УВХ, использующие прямоугольные стробирующие импульсы постоянной длительности, что эквивалентно применению достаточно быстродействующих аналоговых ключей ( $K_1$ ), время включения и выключения которых не зависит от входного сигнала.

Механизм образования отсчетов в таких устройствах связан с использованием малой постоянной времени эквивалентной  $RC_n$ -цепи по сравнению

с длительностью  $t_{строб}$  стробирующего импульса ( $t_{строб}/RC_n \gg 1$ ) и отношением отсчета (в виде напряжения на накопительном конденсаторе) к моменту окончания этого импульса.

На рис. 2.13 изображена эквивалентная структурная схема УВХ, использующая прямоугольные стробирующие импульсы, а на рис. 2.14 изображены временные диаграммы, поясняющие ее работу при  $t_{строб}/RC_n \gg 1$ .

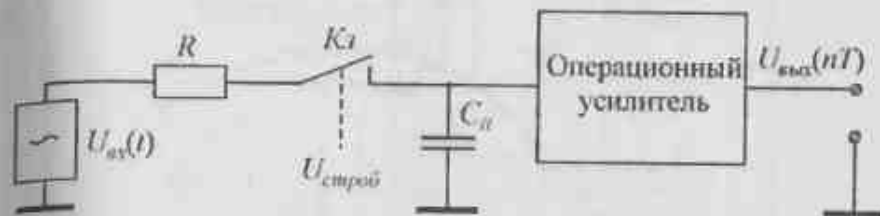


Рис. 2.13. Эквивалентная структурная схема УВХ

Отметим, что коэффициент передачи рассматриваемого устройства в режиме выборки имеет вид

$$u_{вых}/u_{вх} = 1/(1 + jf/f_0),$$

где  $f_0 = 1/RC_n$ .

Зависимость от частоты также приводит к возникновению погрешностей в коэффициенте передачи. Эта погрешность называется динамической. Отметим, что вследствие неидеальности коммутирующих ключей возникают дополнительные погрешности – погрешность переключения, погрешность, связанная с диэлектрической поляризацией, нелинейные составляющие и апертурной погрешности, погрешности, связанные с конечными временами фронтов.

Существует ряд методов уменьшения подобных погрешностей, например такие как интегрирование сигнала на интервале стробирования, стробирование перемножением, «стробирование на лету», которые позволяют существенно уменьшить апертурное время и время установления, а следовательно поднять частоту выборок входного сигнала.

Как показано в [25], в настоящее время все АЦП по виду процесса преобразования входного сигнала во времени можно условно разбить на три типа: последовательные, параллельные и параллельно-последовательные.

К последовательным относятся АЦП последовательных приближений, следящего типа, время-частота, интегрирующего типа. Достоинство – можно получить высокую разрядность (т.е. перекрыть большой динамический диапазон), однако имеют малое быстродействие.

Параллельные АЦП построены на принципе одновременного преобразования сигнала путем его квантования с помощью набора компараторов. Такие АЦП являются самыми быстродействующими и позволяют достичь

частот преобразования 100–400 МГц. К недостаткам параллельных АЦП относят резкое увеличение числа компонентов при увеличении разрядности, что в свою очередь приводит к увеличению потребляемой мощности и размеров. Как правило, такие АЦП имеют относительно мало разрядов.



Рис. 2.14. Пример временных диаграмм напряжений на входе и выходе УВХ

Параллельно-последовательные АЦП представляют собой комбинацию из малоразрядных параллельных АЦП, ЦАП, операционных усилителей (ОУ), УВХ. Принцип преобразования в таких АЦП обычно сводится к двухступенчатому алгоритму – вначале производится определение старшими разрядами значения входного напряжения с помощью первого малоразрядного параллельного АЦП, затем формируется разностный сигнал с помощью ЦАП и ОУ и осуществляется формирование младших разрядов с помощью второго малоразрядного параллельного АЦП. Такое построение позволяет уменьшить число элементов в преобразователе и получить разрядность 12 бит при частоте преобразования 10 МГц.

В настоящее время появились АЦП, обладающие частотами преобразования до 200 МГц при динамическом диапазоне входного сигнала до 72 дБ и соответственно до 20 МГц при динамическом диапазоне до 96 дБ.

Основным недостатком АЦП является наличие большого числа линейных узлов, высокие требования к их точностным и динамическим характеристикам, а также возникающие трудности, связанные с прецизионной стыковкой этих узлов друг с другом. Отметим, что по указанным причинам все подобные АЦП выпускаются в интегральном исполнении.

Указанные виды АЦП могут реализовывать различные виды амплитудных характеристик. В дальнейшем будем полагать, что у применяемых для

ЦОС АЦП амплитудная характеристика (называемая иначе характеристикой преобразования) имеет вид, изображенный на рис. 2.15.

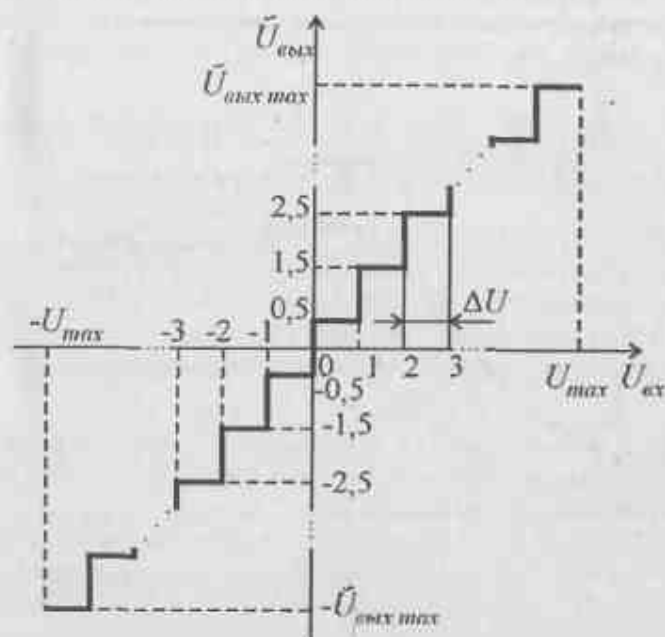


Рис. 2.15. Пример амплитудной характеристики АЦП

2.4.3. Очевидно, что число уровней квантования может быть выбрано исходя из двух предельных случаев:

- когда число уровней квантования равно двум;
- когда число уровней квантования равно бесконечности.

Использование двухуровневого (бинарного) квантования приводит к большим информационным потерям при обработке тех сигналов, у которых информация заключена в огибающей сигнала. Двухуровневое (бинарно-квантованное) представление сигнала находит применение в устройствах обрабатывающих информацию, заключенную в изменениях его полной фазовой функции.

Многоуровневое квантование аналогового сигнала позволяет производить обработку любых его параметров. При большой разрядности АЦП характеристики цифровой обработки информации приближаются к дискретной, но при этом резко увеличиваются затраты оборудования. Поэтому целесообразно исходить из условия обеспечения минимально возможных искажений сигнала при аналого-цифровом преобразовании при минимальных затратах оборудования.

Обычно выбирают шаг квантования  $\Delta = \Delta U = U_{\min} = \sigma$ , где  $\sigma$  – средне-квадратическое отклонение собственных шумов приемника.

В этом случае требуемое число уровней квантования [1]

$$l = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{\Delta U} = d - 1.$$

Связь динамического диапазона входного сигнала  $d$  с разрядностью преобразователя  $r$  определяется выражением

$$r = \lceil \log_2(l+1) \rceil = \lceil \log_2 d \rceil,$$

где  $\lceil x \rceil$  означает ближайшее целое не меньшее  $x$ .

Число децибел динамического диапазона входного сигнала, приходящегося на один разряд АЦП, будет равно

$$\gamma = 20 \lg d / l = 20 \lg d / \log_2 d = 6 \text{ дБ/разряд}.$$

Число уровней квантования в АЦП определяется выражением

$$l = 2^r - 1 \geq 1.$$

Искажения, вносимые АЦП в преобразуемый сигнал, могут быть определены в виде дополнительного шума преобразования, который добавляется к шуму, поступающему с выхода УПЧ.

При этом происходит декорреляция квантуемого процесса за счет добавления шумов квантования. Как показано в [1], для случая квантования нормального случайного процесса коэффициент корреляции на выходе АЦП связан с коэффициентом корреляции на его входе соотношением

$$R_{\text{вых}} = \frac{p^2 R_{\text{вх}} + R_{\text{кв}}}{p^2 + 1},$$

где  $p^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 / \sigma_{\text{кв}}^2$ ,  $\sigma_{\text{вх}}^2$  – дисперсия процесса на входе АЦП,  $R_{\text{вх}}$  – коэффициент корреляции шумов квантования.

Мощность шума квантования, вносимого АЦП в преобразуемый входной сигнал, определяется величиной

$$\sigma_{\text{кв}}^2 = \int_{-0,5\Delta}^{0,5\Delta} x^2 W(x) dx, \quad (2.22)$$

где  $W(x) = \Delta^{-1}$  – плотность распределения амплитуды входного сигнала в пределах шага квантования АЦП  $\Delta = \Delta U$ . Тогда, решая (2.22), получим

$$\sigma_{\text{кв}}^2 = \Delta^2 / 12.$$

Таким образом, при выборе величины  $\Delta = \sigma$ , мощность шумов на выходе АЦП, добавляемых к собственным шумам приемника, увеличивается на 8,33%, а в случае если  $\Delta = 0,5\sigma$  уровень мощности шума увеличивается соответственно на 2,1%.

## 2.5. Выводы

Для обработки поступающих с выхода УПЧ радиосигналов в цифровой форме необходимо произвести ряд линейных преобразований. В результате этих преобразований формируются квадратурные компоненты или квадратурные составляющие комплексной огибающей обрабатываемого сигнала, частота выборки которых определяется полосой тракта УПЧ. Полученные квадратурные составляющие описывают поведение электрической (действительной) и магнитной (мнимой) компонент огибающей электромагнитного колебания на выходе УПЧ.

При проведении преобразований необходимо обеспечить высокий уровень линейности соответствующих узлов в большом динамическом диапазоне и реализовать высокие требования к ортогональности получаемых квадратурных компонент или составляющих для обеспечения необходимого уровня подавления ложных компонент, сопровождающих указанные преобразования.

Применение метода формирования квадратурных составляющих основанного на близости форм узкополосного и гармонического колебаний с использованием компенсатора методической погрешности, выполненного на основе цифрового неминимально-фазового фильтра, позволяет получать не только требуемые высокие характеристики преобразования радиосигнала, но и обеспечить отсутствие «дрейфа нуля».

Показано, что при применении АЦП с «линейной» амплитудной характеристикой требуется применение в обеих частях тракта обработки одинаковых базисов.

Возникающие при преобразовании «аналог-цифра» шумы квантования декоррелируют обрабатываемый сигнал. Уровень мощности этих шумов определяется величиной шага квантования.

Учет полосы обрабатываемых частот, входного динамического диапазона и уровня шумов квантования определяют требования к характеристикам АЦП.

### 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ И СИГНАЛОВ

#### 3.1. Вводные замечания

Известно, что теория линейных аналоговых систем, состоящих из линейных цепей базируется на электрических свойствах индуктивностей, емкостей и сопротивлений. Это позволяет, используя законы Кирхгофа, описывать электрические цепи с постоянными параметрами с помощью линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Теория дискретных и цифровых линейных систем базируется на линейных разностных уравнениях с постоянными коэффициентами, которые могут быть решены с помощью операций над числовыми величинами на соответствующих вычислительных устройствах.

В *линейных цифровых системах* входная последовательность  $\hat{x}(nT) = \hat{x}_n$ , где  $n=0, 1, 2, \dots$ , функционально связана с выходной последовательностью  $\hat{y}(nT) = \hat{y}_n$  соотношением  $\hat{y}_n = D(\hat{x}_n)$ , где вид оператора  $D(\cdot)$  зависит от свойств конкретной системы.

Оператор  $D$  называется линейным, если он обладает следующими основными свойствами:

$$D\left(\sum_n \hat{x}_n\right) = \sum_n D(\hat{x}_n),$$

$$D(C\hat{x}_n) = CD(\hat{x}_n),$$

где  $C = \text{const}$ .

Первое из этих равенств позволяет обеспечить общее решение линейного уравнения, которое может быть представлено в виде суммы линейно независимых частных решений и носит название *принципа суперпозиции*.

Поскольку производная любого порядка и интеграл любой кратности, примененные к любой функции, являются линейными операторами по отношению к этой функции, то их линейные комбинации также являются ли-

нейными. Эти функции описывают поведение линейной системы в виде интегро-дифференциальных уравнений.

Когда параметры линейной системы, от которых зависят коэффициенты соответствующих интегро-дифференциальных уравнений, не зависят от времени, то такие системы называются *линейными непараметрическими*. В противном случае они называются *линейными параметрическими*.

В данной главе кратко рассматривается математический аппарат, используемый для анализа линейных цифровых систем и сигналов, представленных в цифровой форме.

#### 3.2. Метод Z-преобразования

В качестве независимой переменной для анализа линейных аналоговых систем и цепей, а также анализа прохождения сигналов через них, используется метод контурного интегрирования на плоскости комплексной частоты  $p = \sigma + j\omega$ .

Для описания импульсных систем и дискретных сигналов, часто называемых последовательностями, широко используется аппарат Z-преобразования. Учитывая, что нелинейные эффекты, сопровождающие преобразование информации в цифровую форму, можно учесть в рамках линейной модели путем введения соответствующих источников шумов, аппарат Z-преобразования является основным математическим аппаратом, используемым для описания сигналов, преобразованных в цифровую форму, и цифровых систем их обработки. Аппарат Z-преобразования играет в ЦОС ту же роль, что и преобразование Лапласа для описания аналоговых сигналов, систем и цепей. Если преобразование Лапласа позволяет свести линейные дифференциальные уравнения, которыми описываются непрерывные системы к алгебраическим, то Z-преобразование позволяет установить такое же соответствие между разностными и алгебраическими уравнениями. Различают прямое и обратное Z-преобразования.

3.2.1. Прямым Z-преобразованием последовательности  $\hat{x}_n$  называется ряд

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{x}_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{x}(nT) z^{-n}. \quad (3.1)$$

где  $z$  – комплексная переменная,  $X(z)$  – функция комплексной переменной  $z$ .

Поскольку выражение (3.1) – степенной ряд переменной  $z^{-1}$ , то обычно возникает вопрос о сходимости подобного ряда. Исследования показали [26], что ряд (3.1) сходится для  $|z| > R$  и расходится для  $|z| < R$ , где радиус сходимости  $R$  есть верхний предел последовательности  $|\hat{x}(nT)|^{1/n}$   $n = 0, 1, 2, \dots$ . Так, например, если  $\hat{x}(nT) = K^n$ , то ряд (3.1) сходится вне окружности радиуса  $K$ .

Для  $|z| > R$  функция  $X(z)$  является аналитической функцией  $z$ . Если, например,  $x(nT) = a^n$ , то ее Z-преобразование при  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a^n|^{1/n} = a$ .

Если  $a > 1$ , то  $x(nT)$  неограниченно возрастает, что соответствует расходящемуся ряду и неустойчивой системе, которую этот ряд описывает. Таким образом, окружность радиуса  $R = 1$  является наименьшей из тех, что находятся в области сходимости для устойчивых, ограниченных по уровню последовательностей вида  $a^n$ . Это свойство справедливо и для последовательностей произвольного вида. Поэтому обычно ряд (3.1) рассматривают для  $R = 1$ .

Рассмотрим Z-преобразования типичных последовательностей, которые наиболее часто используются в виде испытательных сигналов для анализа цифровых устройств обработки сигналов.

*Единичный импульс*

$$\delta(nT - n_0T) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = n_0, \\ 0 & \text{при } n \neq n_0. \end{cases}$$

имеет Z-преобразование вида

$$\delta(z) = z^{-n_0}$$

и при  $n_0 = 0$ ,  $\delta(z) = 1$ .

*Дискретная функция единичного скачка*

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq n_0, \\ 0 & \text{при } n < n_0. \end{cases}$$

имеет Z-преобразование в виде суммы членов геометрической прогрессии

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

*Комплексная последовательность*

$$\dot{x}_n = e^{-(\sigma + j\omega)nT} = e^{-\sigma nT} e^{-j\omega nT}, \quad n > 0, \sigma > 0,$$

имеет Z-преобразование вида

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\sigma T} e^{-j\omega T} z^{-1})^n = \frac{z}{z - e^{-\sigma T} e^{-j\omega T}} = \frac{z}{z - r e^{-j\varphi}} = \frac{1}{1 - r e^{-j\varphi} z^{-1}},$$

где  $r = e^{-\sigma T} < 1$ ,  $\varphi = \omega T$ .

При  $\sigma = 0$  получаем комплексную экспоненциальную последовательность  $\dot{x}_n = e^{-j\omega nT}$ , Z-преобразование которой имеет вид

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-j\varphi} z^{-1}}.$$

Видно, что основным преимуществом рассмотренного Z-преобразования является то, что как дискретные сигналы, так и устройства их обработки описываются не в виде бесконечных рядов, а в виде компактных уравнений. Это значительно упрощает математический синтез и анализ.

3.2.2. Определим основные свойства прямого Z-преобразования. Положим, что  $x_1(nT)$ ,  $x_2(nT)$ ,  $x_3(nT)$  – последовательности имеющие соответствующие Z-преобразования  $X_1(z)$ ,  $X_2(z)$ ,  $X_3(z)$ , а величины  $c_1$  и  $c_2$  – константы.

*Свойство линейности.*

Если  $x_3(nT) = c_1 x_1(nT) + c_2 x_2(nT)$ , то  $X_3(z) = c_1 X_1(z) + c_2 X_2(z)$ .

*Теорема сдвига.*

Если  $x_2(nT) = x_1[(n-m)T]$ , то

$$X_2(z) = x_1(-mT) + x_1[(-m+1)T]z^{-1} + \dots + x_1(-T)z^{-(m+1)} + z^{-m} X_1(z).$$

При  $x_1(-mT) = x_1[(-m+1)T] = \dots = x_1(-T) = 0$

$$X_2(z) = z^{-m} X_1(z).$$

*Теорема о комплексной свертке.*

Если  $x_3(nT) = x_1(nT)x_2(nT)$ , то

$$X_3(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c X_1(u) X_2(z/u) u^{-1} du,$$

где  $c$  – замкнутый контур в комплексной  $u$  – плоскости, охватывающий все особенности функции  $X_1(u)X_2(z/u)u^{-1}$ , лежащие в окружности с центром в точке 0 и с радиусом, равным  $|z|$ .

Основные свойства Z-преобразования сведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Свойства Z-преобразования		
Свойства	Функция дискретного времени	Z-преобразование
Определения	$\dot{x}_n, \dot{y}_n$	$X(z), Y(z)$
Линейность	$a\dot{x}_n + b\dot{y}_n$	$aX(z) + bY(z)$
Временной сдвиг	$\dot{x}_{n-m}$	$z^{-m} X(z)$
Масштабирование	$a^{-n} \dot{x}_n$	$X(az), a > 0$
Сопряжение	$\dot{x}_n^*$	$X^*(z^*)$
Обращение времени	$\dot{x}_{-n}, \dot{x}_{-n}^*$	$X(1/z), X^*(1/z^*)$
Свертка	$\dot{x}_n * \dot{y}_n$	$X(z)Y(z)$



3.2.3. Обратное Z-преобразование определяется формулой, позволяющей по известному Z-преобразованию определить временную последовательность, которая имеет вид

$$x(nT) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz, \quad (3.2)$$

где  $C$  – замкнутый контур в Z-плоскости, охватывающий все особенности функции  $X(z)z^{n-1}$ .

Обратное Z-преобразование может быть определено путем вычисления интеграла (3.2), если последний не является расходящимся.

$$x(nT) = \sum_{n=1}^p \frac{1}{(l_n - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_n^{(l_n)}} \frac{d^{l_n-1} [(z - z_n^{(l_n)})^{l_n} F(z)]}{dz^{l_n-1}},$$

где  $F(z) = X(z)z^{n-1}$ ,  $z_1^{(l_1)}, z_2^{(l_2)}, \dots, z_p^{(l_p)}$  – все не равные друг другу полюса функции  $F(z)$ ;  $l_n$  – кратность полюса  $z_n^{(l_n)}$ , причем  $0! = 1$  и  $d^0 \varphi(z) / dz^0 = \varphi(z)$ .

Существует второй способ вычисления (3.2) согласно выражения

$$x_n = x(nT) = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n X(z^{-1})}{dz^n} \right]_{z=0}$$

### 3.3. Связь Z-преобразования с преобразованием Лапласа

3.3.1. Определим связь преобразования Лапласа и Z-преобразования. Известно, что вследствие периодичности импульсов, стробирующих аналоговый сигнал, который описывается непрерывным преобразованием Лапласа, получается сигнал периодически изменяющийся вдоль любой оси, параллельной  $j\omega$  в левой полуплоскости комплексного переменного  $p = \sigma + j\omega$ . Этот сигнал имеет бесконечное множество особых точек и является трансцендентной функцией. Это значительно затрудняет применение метода Лапласа. Для преодоления указанных затруднений переходят к плоскости комплексной переменной  $z$ .

Переменная в  $p$ -плоскости связана с переменной в Z-плоскости посредством функции

$$z = x + jy = e^{pT}, \quad (3.3)$$

где  $x = e^{\sigma T} \cos \omega T$ ,  $y = e^{\sigma T} \sin \omega T$ ,

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = e^{\sigma T}, \quad \varphi = \arg z = \omega T \pm 2\pi n, \quad n - \text{целое число}, \quad \sigma \leq 0.$$

На рис. 3.1 показано преобразование точки из  $p$ -плоскости в Z-плоскость.



Рис. 3.1. Преобразование точки из  $p$ -плоскости в Z-плоскость

3.3.2. Рассмотрим отображение  $p$ -плоскости в Z-плоскость, которое называется *конформным отображением*. Логарифмируем выражение (3.3) получаем

$$p = \frac{1}{T} \ln z.$$

Как показано в [27], существуют два вида разложения  $\ln z$  в ряды:

$$\ln z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{z-1}{z} \right)^k, \quad \text{при } z \geq 0,5;$$

$$\ln z = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{2k-1}, \quad \text{при } z > 0.$$

Учитывая, что при  $\sigma = 0$ ,  $|z| = 1$  и рассматриваемые ряды быстро сходятся, то высокая точность достигается при использовании только одного члена ряда. Тогда переменная  $p$  может быть представлена или в виде

$$p = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z} = \frac{1-z^{-1}}{T}, \quad (3.4)$$

или

$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}. \quad (3.5)$$

Здесь  $z^{-1} = e^{-j\omega T}$  – оператор задержки на один такт, равный времени интервала дискретизации  $T$ .

3.3.3. Из выражения (3.4) нетрудно получить

$$z = \frac{1}{1-pT}. \quad (3.6)$$

Рассмотрим качество такой аппроксимации. Согласно (3.6), мнимая ось  $p$ -плоскости отображается на Z-плоскость ( $p = j\omega$ ) в следующую кривую

$$z = \frac{1}{1-j\omega T} = \frac{0,5 - 0,5j\omega T + 0,5 + 0,5j\omega T}{1-j\omega T} = 0,5 + 0,5 \frac{1+j\omega T}{1-j\omega T}.$$

Перенос в левую часть величину 0,5, находим модуль и аргумент правой части, получаем

$$z - 0,5 = 0,5 \exp \left[ j \operatorname{arctg} \frac{2\omega T}{1 - (\omega T)^2} \right] \quad (3.7)$$

Из уравнения (3.7) следует, что  $|z - 0,5| = 0,5$  для всех  $\omega T$ , (3.8)

а фазовый угол

$$\varphi(\omega T) = \operatorname{arctg} \frac{2\omega T}{1 - (\omega T)^2} \quad (3.9)$$

Из выражения (3.9) видно, что при изменении  $-\infty < \omega < \infty$ , величина  $-\pi < \omega T < \pi$ . Это приводит к тому, что изображение мнимой оси  $p$ -плоскости представляет собой окружность в  $Z$ -плоскости с радиусом 0,5 с центром, как следует из (3.8), расположенном в точке 0,5. Левая половина  $p$ -плоскости переходит внутрь круга радиуса 0,5, как показано на рис. 3.2.

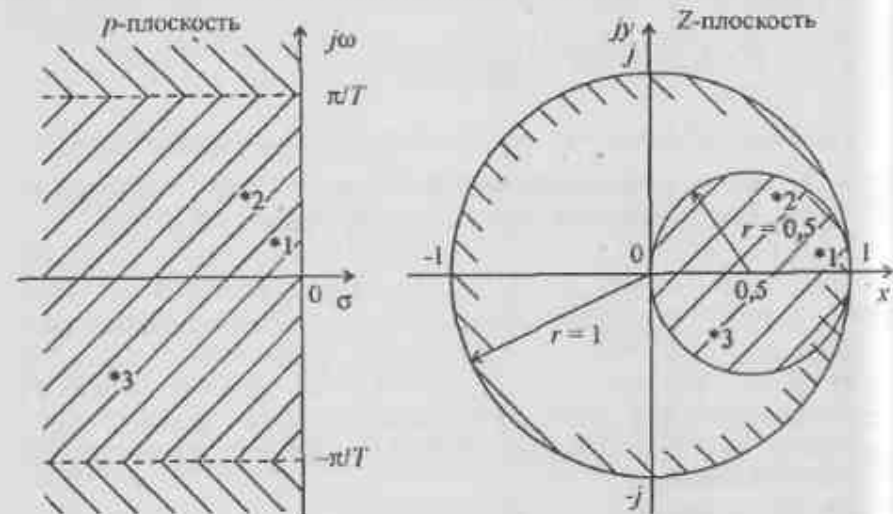


Рис. 3.2. отображения  $p$ -плоскости в  $Z$ -плоскость

Рассмотренное отображение  $p$ -плоскости в  $Z$ -плоскость носит название *согласованного  $Z$ -преобразования*. Оно находит применение при расчетах узкополосных цифровых фильтров (ЦФ) нижних частот (ФНЧ) и полосовых фильтров (ПФ), обладающих либо минимальными затратами оборудования, либо требующими минимальное количество операций для получения заданных характеристик.

3.3.4. Из соотношения (3.5), полагая  $\sigma = 0$ , нетрудно получить

$$z = \frac{2 + pT}{2 - pT} = \frac{2 + j\omega T}{2 - j\omega T} = \exp \left[ j \operatorname{arctg} \frac{4\omega T}{4 - (\omega T)^2} \right] = \exp [j\varphi(\omega T)], \quad (3.10)$$

откуда

$$\varphi(\omega T) = \operatorname{arctg} \frac{4\omega T}{4 - (\omega T)^2} \quad (3.11)$$

Из выражений (3.10) и (3.11) видно, что мнимая ось  $p$ -плоскости отображается в окружность единичного радиуса на  $Z$ -плоскости с нулем в центре координат, как показано на рис. 3.2. При изменении частоты  $-\infty < \omega < \infty$ , величина  $-\pi < \omega T < \pi$ .

Указанный вид преобразования называется *билинейным  $Z$ -преобразованием*. При этом отображении каждой точке  $p$ -плоскости соответствует точка в  $Z$ -плоскости и наоборот. Левая половина  $p$ -плоскости отображается внутрь окружности единичного радиуса. Отметим, что билинейное  $Z$ -преобразование находит применение при расчетах как узкополосных, так и широкополосных ЦФ с различными видами АЧХ – ФНЧ, ПФ, фильтров верхних частот (ФВЧ) и режекторных фильтров (РФ).

На рис. 3.3 показаны преобразования характерных точек:

- начало координат  $p$ -плоскости соответствует точке на вещественной оси  $x = 1$   $Z$ -плоскости;
- если точка движется вдоль оси  $j\omega$   $p$ -плоскости, то этому соответствует перемещение конца единичного радиус-вектора вдоль окружности  $Z$ -плоскости;
- отрезок на  $p$ -плоскости, ограниченный интервалом  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_1 + 2\pi/T$  преобразуется в единичную окружность на  $Z$ -плоскости, т.е. происходит полный оборот радиус-вектора; дальнейшее перемещение вдоль оси  $j\omega$  приводит к повторным оборотам радиус-вектора;
- левая часть  $p$ -плоскости в виде полосы шириной  $\omega = 2\pi/T$  и параллельной оси  $\sigma$  превращается в единичный круг  $Z$ -плоскости; все параллельные полосы такой же ширины соответствуют этому же кругу;
- правая полуплоскость  $p$ -плоскости преобразуется во всю  $Z$ -плоскость, исключая единичный круг.

Из рассмотрения величины  $e^{pT} = e^{\sigma T + j\omega T}$  видно, что фазовый угол, набирающийся за один интервал дискретизации  $T$ , равен  $\omega T$ , а модуль, равный  $e^{\sigma T}$ , показывает, как меняется амплитуда комплексной экспоненты за этот интервал дискретизации.

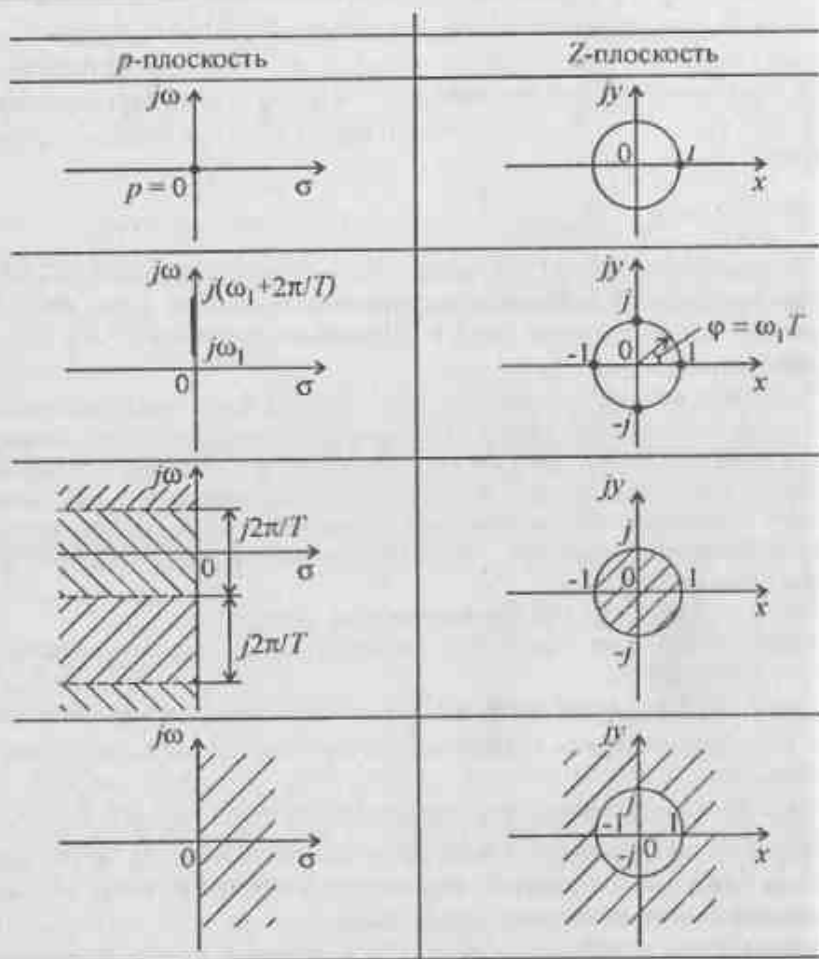


Рис. 3.3. Преобразования характерных точек из  $p$ -плоскости в  $Z$ -плоскость.

Приведенные рассуждения позволяют легко установить связи расположения точек в  $Z$ -плоскости с видами соответствующих сигналов, которые показаны на рис. 3.4.

Видно, что точки, расположенные внутри круга единичного радиуса и соответствующие полюсам полинома, описывающего сигнал, соответствуют затухающим колебаниям, а точки, расположенные вне этого круга — нарастающим. При этом угол  $\varphi = \omega T$  соответствует фазовому углу, набегавшему в сигнале за один интервал дискретизации, а  $r = e^{-\sigma T}$  — относительному из-

менению амплитуды сигнала за один интервал дискретизации. Очевидно, что полный оборот вектора сигнала за один период дискретизации, равный  $\varphi = 2\pi$ , соответствует частоте дискретизации  $F = 1/T$ , которая, как указывалось ранее, соответствует максимальной частоте в спектре сигнала, отсчеты которого берутся в двух каналах одновременно.

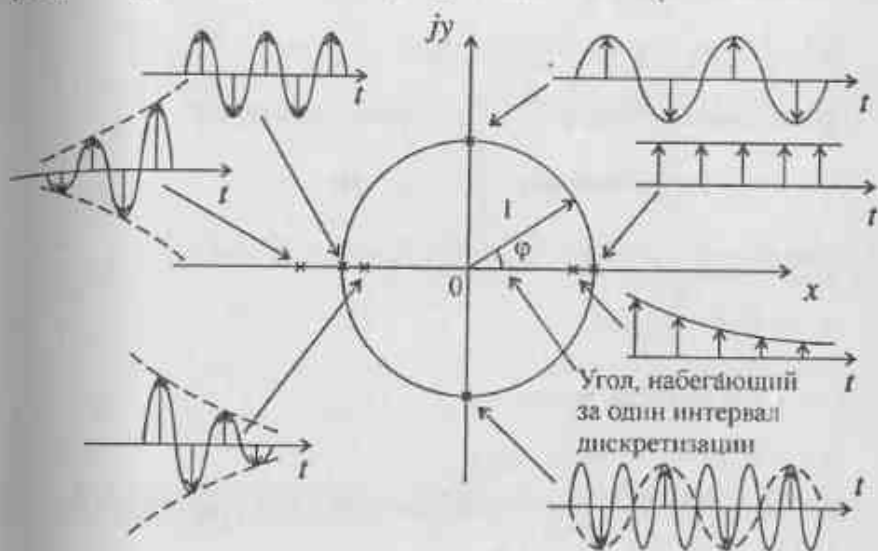


Рис. 3.4. Связь расположения точек в  $Z$ -плоскости с видами сигналов

3.3.5. Рассмотрим операции интегрирования в цифровой форме при использовании согласованного и билинейного  $Z$ -преобразований. Для осуществления операции интегрирования в цифровой форме по методу прямоугольников, что соответствует согласованному  $Z$ -преобразованию, применяется рекурсивная ячейка первого порядка без прямой связи (только полюс), а для осуществления операции интегрирования по методу трапеций, что соответствует билинейному  $Z$ -преобразованию, применяется рекурсивная ячейка первого порядка с прямой связью (имеются нуль и полюс).

Рассмотрим соотношения между аналоговым интегратором и цифровой интеграторами на основе указанных ячеек.

Аналоговый интегратор имеет передаточную функцию в  $p$ -плоскости вида

$$H(p) = 1/p.$$

Его импульсная характеристика имеет вид

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0_+, \\ 0 & \text{при } t \leq 0_- \end{cases}$$

Реакция такого интегратора на произвольное воздействие  $x(t)$  определяется интегралом свертки

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

При выполнении условия  $0_+ < t_1 < t_2$  можно записать [28]

$$y(t_2) - y(t_1) = \int_0^{t_2} h(t-\tau)x(\tau)d\tau - \int_0^{t_1} h(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

Положим  $h(t_2-\tau) = h(t_1-\tau) = 1$ . При  $0_+ < \tau < t_1, t_2$  имеем

$$y(t_2) - y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x(\tau)d\tau.$$

При  $t_1 \rightarrow t_2$  нетрудно видеть, что

$$y(t_2) - y(t_1) \approx \frac{t_2 - t_1}{2} [x(t_1) + x(t_2)]. \quad (3.12)$$

Полагая  $t_1 = nT - T$  и  $t_2 = nT$ , получаем разностное уравнение в виде

$$\begin{aligned} y(nT) - y(nT - T) &= y_n - y_{n-1} = \\ &= (T/2)[x(nT) + x(nT - T)] = (T/2)(x_n + x_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) определяет алгоритм работы цифрового интегратора, дающего приблизительно такую же реакцию на входное воздействие, как и аналоговый, и осуществляющий интегрирование по методу трапеций.

На рис. 3.5 показан графический пример вычисления интеграла методом трапеций.

После Z-преобразования соотношения (3.13) получаем

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = 0,5T [X(z) + z^{-1}X(z)],$$

и, следовательно, передаточная функция цифрового интегратора

$$H_q(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Tz+1}{2z-1} = \frac{T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})}.$$

Из сравнения передаточных характеристик аналогового и цифрового интеграторов можно установить связь

$$\frac{1}{p} = \frac{Tz+1}{2z-1} = \alpha \frac{z+1}{z-1} = \alpha \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}},$$

следовательно, вычисление интеграла по методу трапеций в цифровой форме эквивалентно применению билинейного Z-преобразования при переходе от аналогового интегратора к цифровому.

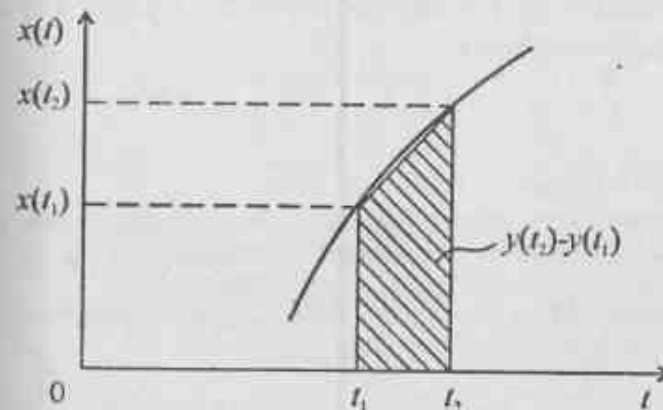


Рис. 3.5. Графический пример вычисления интеграла методом трапеций

Если положить в (3.12)  $x(t_1) = x(t_2) = x(t)$ , то тогда

$$y(t_2) - y(t_1) \approx (t_2 - t_1)x(t).$$

Переходя аналогичным образом к дискретной форме записи, получаем разностное уравнение вида

$$y_n - y_{n-1} = Tx_n. \quad (3.14)$$

Это уравнение также описывает работу цифрового интегратора, осуществляющего вычисление интеграла методом прямоугольников, как показано на рис. 3.6.

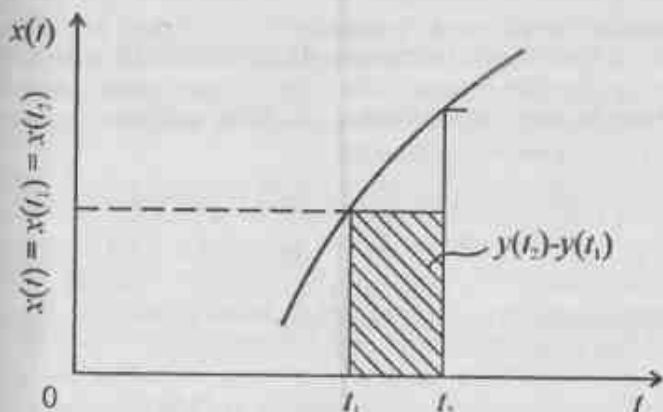


Рис. 3.6. Графический пример вычисления интеграла методом прямоугольников

После Z-преобразования соотношения (3.14) получаем

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = TX(z),$$

откуда передаточная функция цифрового интегратора имеет вид

$$H_d(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = T \frac{1}{z-1} = T \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}},$$

откуда

$$\frac{1}{p} = \beta \frac{1}{z-1} = \beta \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}},$$

а, следовательно, вычисление интеграла по методу прямоугольников в цифровой форме эквивалентно применению согласованного Z-преобразования при переходе от аналогового интегратора к цифровому.

Для первого случая структурная схема цифрового интегратора имеет вид, изображенный на рис. 3.7, а для второго – на рис. 3.8.

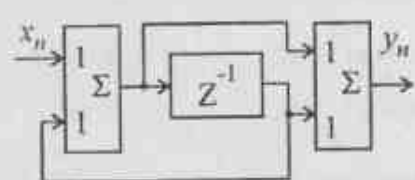


Рис. 3.7. Структурная схема идеального цифрового интегратора по методу трапеций

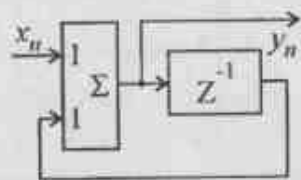


Рис. 3.8. Структурная схема идеального цифрового интегратора по методу прямоугольников

При этом для первого случая масштабированный коэффициент должен быть выбран  $\alpha = 2/T$ , а для второго  $\beta = 1/T$ . Выбором величины  $T$  можно масштабированный коэффициент в каждом случае сделать равным единице. Отметим, что существуют и другие методы цифрового интегрирования – по параболе, по кубической параболе, и т.д. [29]. Однако такая замена аналоговой переменной ее цифровым эквивалентом более высокого порядка приводит к увеличению затрат оборудования.

В реальных условиях коэффициенты обратной связи всегда меньше единицы. В этом случае в качестве характеристик цифровых интеграторов могут рассматриваться их АЧХ. На рис. 3.9 изображены АЧХ идеального аналогового ФНЧ, аналогового интегратора и реальных цифровых интеграторов, реализованных по методам трапеций и прямоугольников.

Анализ АЧХ, изображенных на рис. 3.9, показывает, что АЧХ аналогового интегратора имеет нуль на частоте  $f = \infty$ . АЧХ цифрового интегратора, реализующего операцию интегрирования по методу трапеций, имеет нуль на частоте  $f = 0,5F_0$  и периодична по частоте, а АЧХ цифрового ин-

тегратора, реализующего метод прямоугольников, не имеет нуля и периодична по частоте. Отметим, что периодичность АЧХ по частоте цифровых интеграторов не играет роли, поскольку аналоговый сигнал, поступающий на обработку, имеет ограниченный по полосе спектр, ширина которого не может быть выше  $0,5F_0$ . Последнее условие обеспечивается применением идеального аналогового ФНЧ с АЧХ, равной

$$K(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } f < 0,5F_0; \\ 0 & \text{при } f \geq 0,5F_0. \end{cases}$$

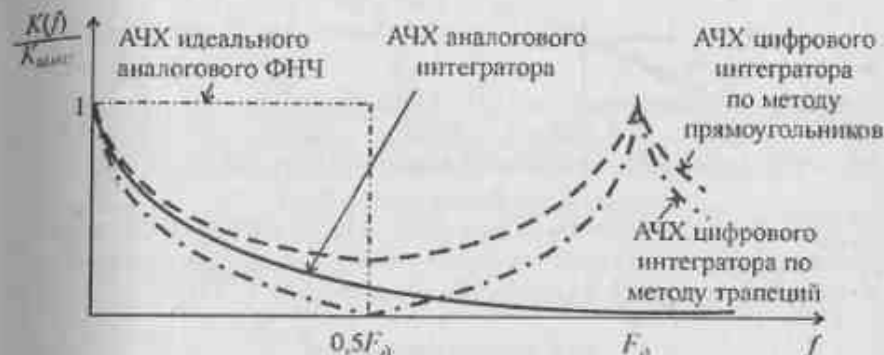


Рис. 3.9. АЧХ идеального аналогового ФНЧ, аналогового и цифровых интеграторов

Значительно большее влияние оказывает наличие или отсутствие нуля в АЧХ интеграторов. Наличие нуля позволяет реализовать все виды АЧХ фильтров – ФНЧ, ПФ, ФВЧ, РФ. Отсутствие нуля – только АЧХ узкополосных ФНЧ и ПФ.

3.3.6. Переход от аналоговой обработки сигналов к цифровой, как видно из рис. 3.9, сопровождается искажениями АЧХ. Эти искажения связаны с характером использованного конформного отображения. При этом переход от аналоговой переменной к цифровой осуществляется следующим образом. Полагая  $p = j\omega_n$  и учитывая равенство при  $z = \exp(j\omega_n T)$  для билинейного Z-преобразования  $p = \frac{2z-1}{Tz+1} = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}$ , получаем

$$\omega_n = 2\pi f_0 = 2\text{tg}(\omega_n T/2) = 2\text{tg}\pi f_0 T.$$

В том случае когда  $p = \frac{1-z^{-1}}{Tz}$  (согласованное Z-преобразование), получаем

$$\omega_n = 2\pi f_0 = 2\sin(\omega_n T/2) = 2\sin\pi f_0 T.$$

На рис. 3.10 представлены кривые, характеризующие искажения шкалы частот для рассмотренных видов конформных отображений.

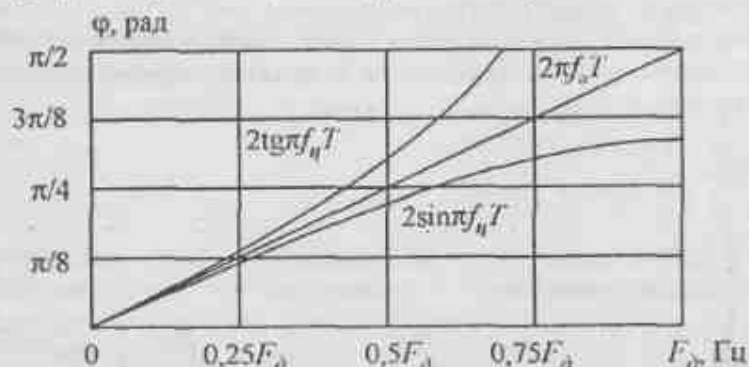


Рис. 3.10. Нелинейные деформации частотной шкалы при конформных отображениях.

Указанные искажения частотных шкал следует учитывать при проектировании устройств частотной селекции, т.е. вводить предискажения частотной шкалы при переходе от аналоговых фильтров (АФ) к ЦФ.

### 3.4. Конечные разности

Для описания работы цифровых линейных систем во временной области используется математический аппарат конечных разностей, являющихся аналогами производных непрерывных функций времени [30].

Аналогом первой производной непрерывной функции  $f(t)$  для ее отсчетов  $f_n$  является либо *первая прямая разность*

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n,$$

либо *первая обратная разность*

$$\nabla f_n = f_n - f_{n-1}.$$

Обе эти разности показаны на рис. 3.11.

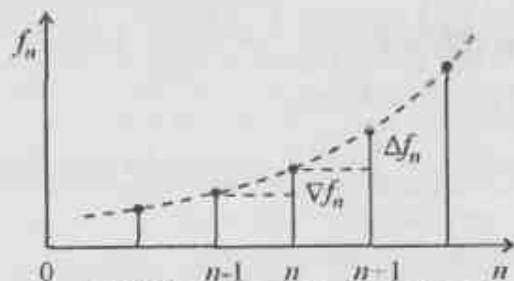


Рис. 3.11. Прямая и обратная разности.

*Прямая разность* определяется в момент времени  $t = nT$  по будущему значению отсчетов функции  $f_n$  при  $t = (n+1)T$ . Это можно сделать в тех случаях, когда будущее значение известно.

*Обратная разность* определяется для момента времени  $t = nT$  по прошлому значению отсчетов функции  $f_n$  в момент времени  $t = (n-1)T$ .

Аналогом второй производной непрерывной функции для отсчетов дискретной функции служат вторые разности:

прямая

$$\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n$$

и обратная

$$\nabla^2 f_n = \nabla f_{n+1} - \nabla f_n = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Для вычисления высших значений прямой и обратной конечных разностей возможно использование либо рекуррентных соотношений

$$\Delta^k f_n = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n,$$

$$\nabla^k f_n = \nabla^{k-1} f_n - \nabla^{k-1} f_{n-1},$$

либо формул общего вида

$$\Delta^k f_n = \sum_{v=0}^k (-1)^v C_k^v f_{n+k-v},$$

$$\nabla^k f_n = \sum_{v=0}^k (-1)^v C_k^v f_{n-v}, \tag{3.15}$$

где  $C_k^v = \frac{k!}{v!(k-v)!}$  — биномиальные коэффициенты (число сочетаний).

Обратные разности обладают важной особенностью. Если значения дискретных отсчетов функции  $f_n$  определены только для положительных значений аргумента, т.е.  $f_n = 0$  при  $n < 0$ , то, как следует из (3.15), в точке  $n = 0$   $k$ -я разность  $\Delta^k f_0 = f_0$  для любого положительного  $k$ .

Аналогом интеграла непрерывной функции в пределах от 0 до  $t$  для функции  $f_n$  является сумма вида

$$\bar{\sigma}_n = \sum_{m=0}^{n-1} f_m = \sum_{v=1}^n f_{n-v}.$$

В качестве аналогов дифференциальных уравнений можно рассматривать уравнения в конечных разностях или разностные уравнения.

При обработке сигналов, поступающих с выхода ЛПП, используется математический аппарат на основе обратных конечных разностей. В этом слу-

часе аналогом дифференциального уравнения будет уравнение в конечных разностях, которое имеет вид

$$b_0 V^m x_n + b_1 V^{m-1} x_n + \dots + b_m x_n = y_n.$$

С учетом (3.15) последнее выражение можно преобразовать к виду

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_m x_{n-m} = y_n.$$

При  $y_n = 0$  последнее уравнение становится однородным разностным уравнением. Коэффициенты этого уравнения определяются выражениями

$$a_{m-k} = \sum_{v=0}^k (-1)^{m-k} b_v C_{m-v}^{k-v},$$

$$C_{m-v}^{k-v} = \frac{(m-v)!}{(k-v)!(m-k)!}.$$

При решении дифференциальных уравнений существенной операцией является интегрирование, описываемое в  $p$ -плоскости оператором  $1/p$ . В разностных уравнениях существенной операцией является единичная задержка, описываемая оператором  $z^{-1}$ .

Анализ дифференциальных уравнений в  $p$ -плоскости приводит к понятию передаточных функций и представлению временных функций в  $p$ -плоскости с помощью преобразования Лапласа. Аналогично, анализ разностных уравнений в  $Z$ -плоскости приводит к понятию передаточных функций с аргументом  $z$  и к использованию  $Z$ -преобразования.

### 3.5. Дискретные экспоненциальные функции

Как следует из результатов, полученных в разделе 2, в случае, если у применяемого АЦП амплитудная характеристика преобразования линейна, в цифровом вычислительном устройстве целесообразно использовать в качестве базисных функций комплексные экспоненциальные функции в дискретной форме [31].

В континуальном спектральном анализе для различения сигналов на конечном временном интервале  $[0, T]$  используется система комплексных экспоненциальных функций, которая записывается в виде

$$\exp(j2\pi ft) = \cos 2\pi ft + j \sin 2\pi ft, \quad (3.16)$$

где  $f = k/T$  — частота,  $k = 1, 2, \dots$  — номер функции в системе,  $t$  — время, изменяющееся непрерывно. Система комплексных экспоненциальных функций составляет счетное бесконечное множество, является ортогональной и полной. Следовательно, система функций  $\exp(j2\pi ft)$  определяется на конечном интервале времени и бесконечном интервале частоты.

В выражении (3.16) переменные  $f$  и  $t$  входят симметрично в виде произведения  $ft$ . Тем не менее из сказанного выше следует, что они изменяются по-разному: время  $t$  — непрерывно, а частота  $f$  — дискретно. Вследствие этого система функций  $\exp(j2\pi ft)$  при разложении сигналов на конечном интервале имеет различные свойства по осям  $t$  и  $f$ , а именно — она периодическая по оси  $t$

$$\exp[j2\pi f(t+T)] = \exp(j2\pi ft) \exp(j2\pi fT)$$

и непериодическая по частоте  $f$ .

Так как система комплексных экспоненциальных функций по частоте не является периодической, то каждому значению частоты соответствует единственная функция  $\exp(j2\pi ft)$ . При этом частота может определяться двояко: как скорость изменения полной фазовой функции  $\varphi(t) = d\psi/dt = 2\pi ft$  и как число знаменителей действительной или мнимой части функций на интервале измерения. В данном случае эти определения равносильны.

Аналогом комплексных экспоненциальных функций в дискретном анализе служат дискретные экспоненциальные функции (ДЭФ)

$$\text{def}(k, n) = \exp(j2\pi kn/N) = \cos(j2\pi kn/N) + j \sin(j2\pi kn/N), \quad (3.17)$$

причем переменные  $k$  и  $n$  принимают целочисленные значения  $k, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  так, что число функций в системе равно числу отсчетов каждой функции  $N$ . Вследствие этого, а так же в силу линейной независимости ДЭФ, система ДЭФ является полной.

Формально перейти от выражения (3.16) к (3.17) можно, считая, что время  $t$  изменяется не непрерывно, а дискретно, с шагом  $T = T_{\text{отс}}/N$ , где  $T_{\text{отс}}$  — время анализа, равное интервалу ортогональности. Тогда, положив  $t = nT = nT_{\text{отс}}/N$ , получим

$$\exp(j2\pi ft) = \exp[j2\pi(k/T_{\text{отс}})n(T_{\text{отс}}/N)] = \exp(j2\pi kn/N).$$

ДЭФ по-прежнему является комплексной функцией. Ее модуль равен 1, а фаза  $\varphi(k, n) = 2\pi kn/N$  полностью определяет все свойства функции. В дальнейшем будем полагать, что  $T = 1$ , если не оговорено особо.

Отметим, что комплексные экспоненциальные функции, описываемые (3.16) и (3.17), несмотря на их сходство, имеют различия.

Рассмотрим основные свойства ДЭФ.

**Свойство 1.** ДЭФ является функцией двух равноправных переменных  $k$  и  $n$ , и любые выводы относительно одной из них справедливы также и для другой. Следовательно, матрица ДЭФ — симметрическая.

**Свойство 2.** ДЭФ периодическая функция с периодом  $N$

$$\text{def}(k, n \pm N) = \text{def}(k, n).$$

**Свойство 3.** Система ДЭФ мультипликативна

$$\text{def}(a, n) \text{def}(b, n) = \text{def}(a+b, n).$$

Свойство 4. Среднее значение ДЭФ равно нулю

$$\sum_{n=0}^{N-1} \text{def}(k, n) = \frac{\exp[j(2\pi/N)kN] - 1}{\exp[j(2\pi/N)k] - 1} = 0.$$

Свойство 5. Система ДЭФ ортогональна

$$\sum_{n=0}^{N-1} \text{def}(a, n) \text{def}(b, n) = \begin{cases} 0, & \text{при } a \neq b, \\ N, & \text{при } a = b. \end{cases}$$

Свойство 6. При величине  $N = 2$  ДЭФ совпадает с функциями Уолша.

Свойство 7. При четном  $N$  система ДЭФ состоит из двух действительных функций  $\text{def}(0, n)$  и  $\text{def}(N/2, n)$  и  $N/2 - 1$  пар комплексно-сопряженных функций. При нечетном  $N$  она содержит только одну действительную функцию  $\text{def}(0, n)$ , остальные  $N - 1$  функций образуют  $(N - 1)/2$  комплексно-сопряженных пар.

Свойство 8. Комплексно-сопряженные функции  $\text{def}(k, n)$  и  $\text{def}(k^*, n)$  расположены симметрично на интервале  $N$ , а именно  $k^* = N - k$ , что следует из периодичности системы

$$\text{def}(k^*, n) = \text{def}(N - k, n) = \text{def}(-k, n) = \overline{\text{def}(k, n)}.$$

Числа  $k$  и  $k^*$  являются противоположными по модулю  $N$ . Следовательно, фазовая функция ДЭФ – нечетная функция, что является новым явлением, вытекающим из периодичности системы ДЭФ относительно номера функции  $k$ , и не наблюдается в непрерывной системе экспоненциальных функций.

В соответствии с выражением (3.17) фазовая функция ДЭФ всегда нарастает с увеличением  $n$  по линейному закону со скоростью  $2\pi k / N$  (рад/сек). Увеличение номера ДЭФ всегда приводит к увеличению скорости изменения ее фазовой функции. Поэтому скорость нарастания полной фазовой функции однозначно определяет номер ДЭФ.

Подобно обычным комплексным экспоненциальным функциям, ДЭФ можно изобразить на плоскости в виде вращающегося вектора единичной длины, проекции которого на оси абсцисс и ординат дают действительную и мнимую части функции.

Разница будет заключаться в том, что если у обычных функций этот вектор вращается непрерывно, то в случае ДЭФ он вращается скачкообразно, проходя при изменении величины  $n$  на единицу угол  $2\pi k / N$  рад.

В общем случае на интервале  $N$  вектор проходит угол  $2\pi k$  рад, т. е. совершает равно  $k$  оборотов.

На рис. 3.12 ДЭФ представлена в виде вращающегося вектора.

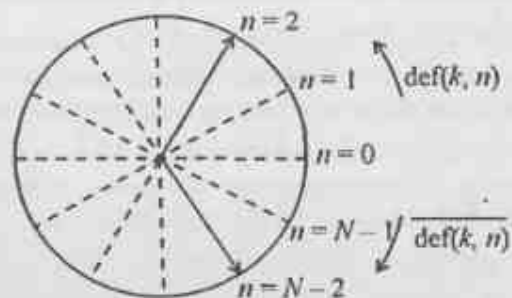


Рис. 3.12. Графическое изображение ДЭФ в виде вращающегося вектора

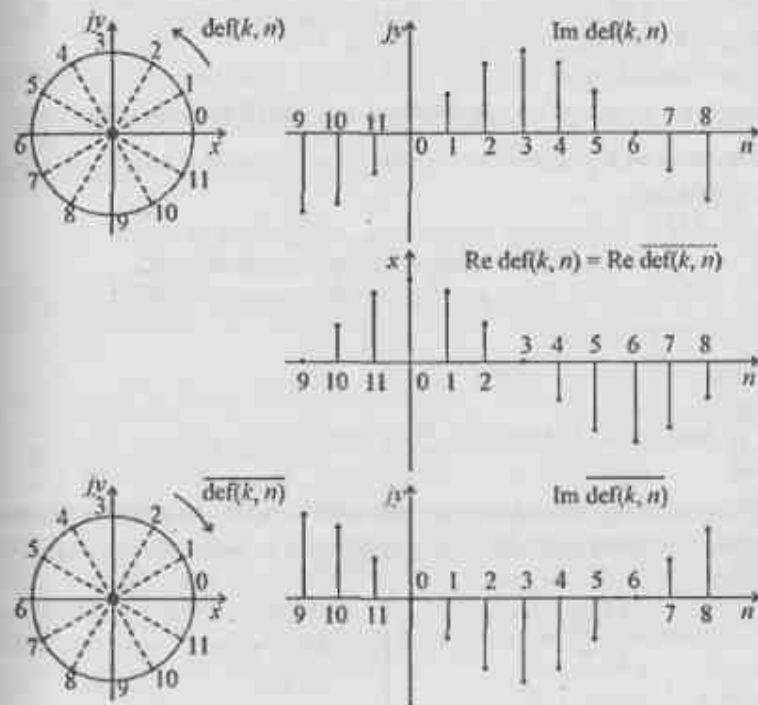


Рис. 3.13. Графическое изображение изменения во времени действительной и мнимой частей вращающегося вектора ДЭФ

Движение комплексно-сопряженного вектора  $\overline{\text{def}(k, n)} = \text{def}(N - k, n)$  при изменении  $n$  на единицу можно представить как поворот на один обо-



рот и возврат на угол  $(2\pi/N)k$  радиан так, что создается иллюзия вращения в противоположную сторону (стробоскопический эффект).

Вектор, соответствующий  $\text{def}(k, n)$ , на интервале  $N$  совершает  $k$  оборотов, а вектор, соответствующий  $\text{def}(N-k, n)$ , —  $(N-k)$  оборотов. Последнее свидетельствует о том, что скорость нарастания полной фазовой функции равна соответственно  $k$  и  $N-k$ . В тоже время число знакоперемен их проекций на оси координат, например,  $\cos(2\pi kn/N)$  и  $\cos[2\pi(N-k)n/N]$ , одно и то же. Следовательно, число знакоперемен не может правильно характеризовать частоту без учета знака направления вращения.

Направление вращения можно определить путем определения знаков действительной и мнимой частей вращающегося вектора ДЭФ и соотношения их друг с другом, как показано на рис. 3.13.

Анализ графиков на рис. 3.13 показывает, что сдвиг по фазе мнимых составляющих вектора ДЭФ  $\text{Im def}(k, n)$  и  $\text{Im def}(N-k, n)$  относительно его действительной части  $\text{Re def}(k, n) = \text{Re def}(N-k, n)$  позволяет определить направление вращения.

### 3.6. Дискретное преобразование Фурье

3.6.1. Дискретным спектром последовательности  $\hat{x}(nT) = \hat{x}_n$  называют комплексную функцию

$$\begin{aligned} \hat{X}(k\Omega) &= \hat{X}(2\pi k/N) = \hat{X}(k) = \hat{X}_k = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}(nT) \exp(-j2\pi kn/N) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}_n \exp(-j2\pi kn/N). \end{aligned} \quad (3.18)$$

В свою очередь, если известна функция  $\hat{X}(k\Omega)$ , то временная последовательность, соответствующая данной функции, может быть определена из выражения

$$\begin{aligned} \hat{x}_n = \hat{x}(nT) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}(k\Omega) \exp(j2\pi nk/N) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}_k \exp(j2\pi nk/N). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Формулы (3.18) и (3.19) представляют собой пару преобразований Фурье. Отметим, что преобразование (3.18) называется *дискретным преобразованием Фурье* (ДПФ) или *прямым ДПФ*, а преобразование (3.19) — *обратным дискретным преобразованием Фурье* (ОДПФ). В данных выражениях величина  $\hat{x}(nT)$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  — последовательность, состоящая из

$N$  временных отсчетов с периодом  $T$ ;  $\hat{X}(k\Omega)$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  — последовательность, состоящая из  $N$  частотных отсчетов. Отметим, что достаточно часто в литературе для сокращения записи применяют обозначение в виде  $W_N = \exp(-j2\pi/N)$ , где  $j = \sqrt{-1}$ .

Тогда (3.18) и (3.19) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \hat{X}(k\Omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}(nT) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ \hat{x}(nT) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}(k\Omega) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

В матричной форме прямое ДПФ имеет вид  $\hat{X} = W_N \hat{x}$ , где  $\hat{X}$  и  $\hat{x}$  —  $N$ -мерные векторы, соответственно равные

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \{\hat{X}(0), \hat{X}(\Omega), \hat{X}(2\Omega), \dots, \hat{X}[(N-1)\Omega]\}^T, \\ \hat{x} &= \{\hat{x}(0), \hat{x}(T), \hat{x}(2T), \dots, \hat{x}[(N-1)T]\}^T, \end{aligned}$$

$W_N$  — матрица размера  $N \times N$  с элементами  $W_N^{nk} = W_N^{nk \pmod{N}}$ ,

где  $n, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Обратное ДПФ в матричной форме записывается в виде

$$\hat{x} = W_N^{-1} \hat{X},$$

где  $W_N^{-1}$  — матрица, обратная матрице  $W_N$ . Элементы матрицы  $W_N^{-1}$  равны

$$\frac{1}{N} W_N^{-nk} = \frac{1}{N} W_N^{-nk \pmod{N}}.$$

ДПФ вводится для представления как периодических последовательностей с периодом  $N$  отсчетов, так и последовательностей конечной длины  $N$ . Коэффициенты ДПФ конечной последовательности равны значениям ее  $Z$ -преобразования в  $N$  точках, равномерно распределенных по единичной окружности, как показано на рис. 3.14, т. е.

$$\hat{X}(k\Omega) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad \Omega = 2\pi/N.$$

Таким образом, дискретное преобразование Фурье может пониматься как оценка  $Z$ -преобразования конечной последовательности  $\hat{x}(nT)$  в  $N$  точках на  $Z$ -плоскости, равномерно расположенной вдоль единичной окружности под углами  $k\Omega$  радиан.

Более удобно рассматривать отсчеты, расположенные вдоль линии, как показано на рис. 3.15.

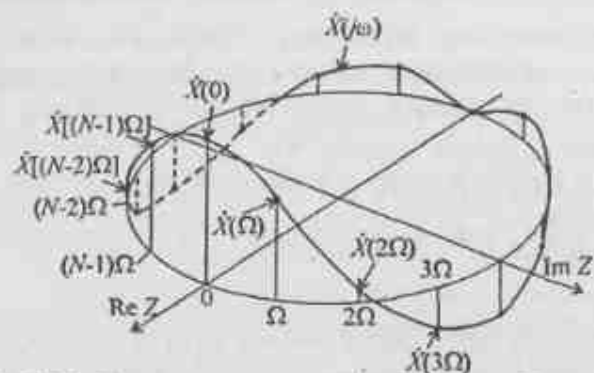


Рис. 3.14. Изображение периодического спектра в Z-плоскости вдоль единичной окружности

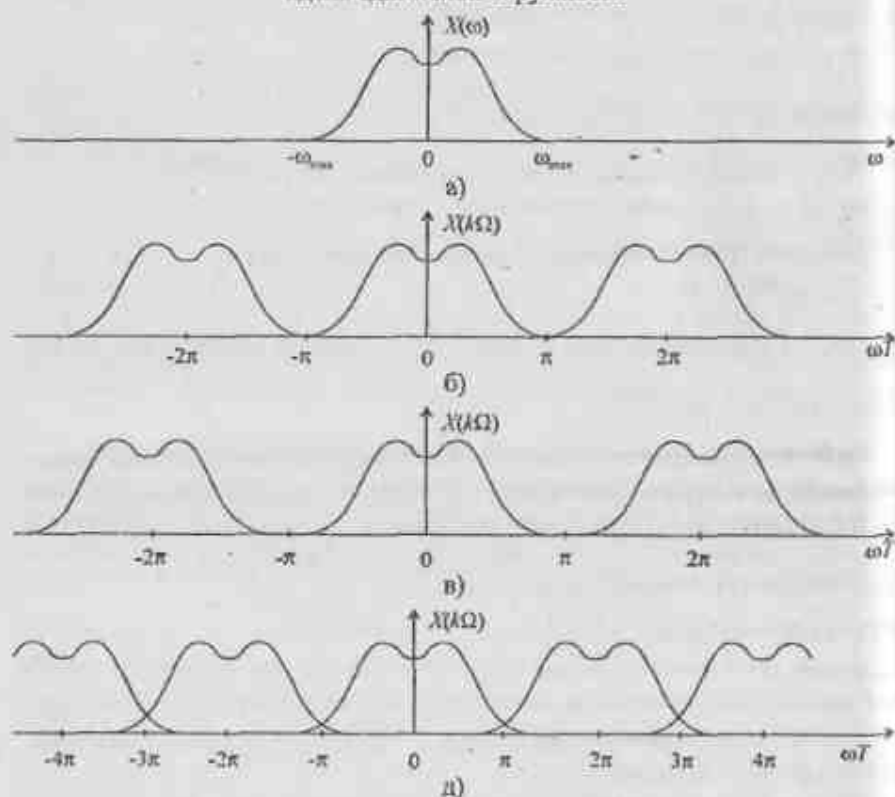


Рис. 3.15. Виды дискретизированных спектров

Следовательно, спектр  $X(k\Omega)$  дискретизированного сигнала представляет собой последовательность спектров  $X(\omega)$  (рис. 3.15,а) исходного сигнала  $x(t)$ , сдвинутых относительно друг друга на величину  $2\pi$  (рис. 3.15,б) вдоль оси  $\omega T$ . Если шаг выборки  $T < 2\pi/\omega_{\max} = 1/F_{\max}$ , то отдельные спектры не перекрываются (рис. 3.15,в). Если последнее условие не выполняется, т.е.  $T > 2\pi/\omega_{\max} = 1/F_{\max}$ , то происходит наложение спектров, как показано на рис. 3.15,г.

3.6.2. Определим основные свойства ДПФ [26, 32, 33].

**Линейность** – если  $X(k\Omega)$  и  $Y(k\Omega)$  есть ДПФ последовательностей  $x(nT)$  и  $y(nT)$  соответственно, то ДПФ последовательности  $ax(nT) + by(nT)$ , где  $a$  и  $b$  произвольные константы, равно  $aX(k\Omega) + bY(k\Omega)$ .

**Сдвиг** – пусть  $X(k\Omega)$  – ДПФ последовательности  $x(nT)$ , а последовательность  $y(nT)$  получается из последовательности  $x(nT)$  путем сдвига (в случае конечной последовательности – кругового сдвига) на  $n_0$  отсчетов.

Тогда ДПФ последовательности  $y(nT)$  равно  $Y(k\Omega) = X(k\Omega)W_N^{-nk_0}$ , т.е. амплитудный спектр исходной последовательности остается без изменения, а получает изменение только фазовый спектр. Аналогичный результат справедлив для сдвига коэффициентов ДПФ. Если  $X(k\Omega)$  и  $Y(k\Omega)$  есть ДПФ последовательностей  $x(nT)$  и  $y(nT)$  соответственно и  $Y(k\Omega) = X(k\Omega - k_0\Omega)$ , то  $y(nT) = x(nT)W_N^{-nk_0}$ .

**Свойства симметрии** – если последовательность  $x(nT)$  является действительной, то ее ДПФ удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$\operatorname{Re}[X(k\Omega)] = \operatorname{Re}[X((N-k)\Omega)]; \quad \operatorname{Im}[X(k\Omega)] = -\operatorname{Im}[X((N-k)\Omega)];$$

$$|X(k\Omega)| = |X((N-k)\Omega); \quad \arg X(k\Omega) = -\arg X((N-k)\Omega).$$

ДПФ симметричной последовательности  $x(nT) = x((N-n)T)$  является действительным.

**Круговая свертка** – в отличие от аналоговой обработки сигналов, характеризующейся линейной (апериодической) сверткой, цифровая обработка характеризуется круговой сверткой, возникающей из-за периодичности и конечности числа отсчетов дискретизируемых сигналов.

Пусть  $\hat{x}(nT)$  и  $\hat{y}(nT)$  имеют ДПФ  $\hat{X}(k\Omega)$  и  $\hat{Y}(k\Omega)$  соответственно. Если последовательность  $\hat{u}(nT)$  равна круговой свертке последовательностей  $\hat{x}(nT)$  и  $\hat{y}(nT)$

$$\hat{u}(nT) = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{x}(mT) \hat{y}[(n-m)T], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

то ее ДПФ равно  $\hat{U}(k\Omega) = \hat{X}(k\Omega)\hat{Y}(k\Omega)$ .

Последнее выражение по сути аналогично выражению для аналоговой свертки сигналов в частотной области.

Если  $\hat{u}(nT) = \hat{x}(nT)\hat{y}(nT)$ , то, соответственно, ДПФ  $\hat{u}(nT)$  будет равно круговой свертке  $\hat{X}(k\Omega)$  и  $\hat{Y}(k\Omega)$

$$\hat{U}(k\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{X}(m\Omega) \hat{Y}[(k-m)\Omega], \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

которая аналогична по сути аналоговой свертке в частотной области спектров произведения двух сигналов.

*Сопряженная формула обращения* – ОДПФ можно вычислить с помощью формулы для прямого ДПФ

$$\hat{x}(nT) = \hat{P}^*(nT), \quad \text{где } \hat{P}(nT) = \frac{1}{N} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}^*(k\Omega) W_N^{nk} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

а знак \* сверху означает комплексное сопряжение.

3.6.3. Рассмотрим ОДПФ от произведений ДПФ, для которого соответствующим аналоговым результатом является свертка

$$\hat{u}(mT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}(k\Omega) \hat{Y}(k\Omega) \exp(j2\pi km/N),$$

где  $\hat{X}(k\Omega)$  и  $\hat{Y}(k\Omega)$  являются ДПФ последовательностей  $\hat{x}(nT)$  и  $\hat{y}(nT)$  соответственно, имеющих равное число точек  $N$ .

Подставляя определения  $\hat{X}(k\Omega)$  и  $\hat{Y}(k\Omega)$ , получим

$$\hat{u}(mT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}(nT) \exp(-j2\pi kn/N) \right] \times \left[ \sum_{l=0}^{N-1} \hat{y}(lT) \exp(-j2\pi kl/N) \right] \exp(j2\pi km/N).$$

Это выражение можно записать как тройную сумму по  $k$ ,  $n$  и  $l$ . Если изменить порядок суммирования таким образом, чтобы сумма по  $k$  стала са-

мой внутренней, то можно  $\hat{x}(nT)\hat{y}(lT)$  вынести из под знака суммы и получить

$$\hat{u}(mT) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}(nT) \hat{y}(lT) \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \exp(j2\pi k(m-l-n)/N) \right]. \quad (3.20)$$

Сумма в скобках равна нулю для всех  $l$  и  $n$  за исключением комбинаций  $l$  и  $n$  удовлетворяющей условию

$$l = ((m-n)),$$

для которой сумма в скобках равна  $N$ .

Таким образом, выражение (3.20) сводится к выражению

$$\hat{u}_m = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}_n \hat{y}_{((m-n))} = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{y}_n \hat{x}_{((m-n))}. \quad (3.21)$$

в котором для простоты применены обозначения переменных с помощью индексов.

Таким образом показано, что произведение ДПФ есть ДПФ от круговой свертки. Смысл выражения (3.21) иллюстрируется рис. 3.16, где последовательность  $x(nT)$  с пятью точками, обозначенная  $x_n$ , циклически свертывается с последовательностью  $y_n$  также с пятью точками. Можно рассматривать одну или обе последовательности как периодически продолжающиеся (светлые точки) или же можно рассматривать их расположенными вдоль окружности.

На линии 1 рис. 3.16 показана последовательность  $x_n$ , а на линии 2 периодически продолженная последовательность  $y_n$ . На линии 3, представляющей сверточную сумму  $u_0$  последовательность  $y$  перевернута во времени и умножается на соответствующий член последовательности  $x$ . На линиях с 4 по 7 показано, как сдвигается перевернутая во времени последовательность  $y$  для вычисления  $u_1, u_2, u_3$  и  $u_4$ . Когда отсчет  $y_m$  выдвигается из интервала вправо, тот же отсчет вдвигается в диапазон с левой стороны.

Рис. 3.16 иллюстрирует, почему круговая свертка иногда называется *периодической*. В противоположность этому соответствующее свойство непрерывного преобразования Фурье может быть названо *аперiodической* сверткой. В большинстве задач, где используется свертка, имеется в виду аперiodическая свертка.

Аперiodическая свертка может быть легко получена из круговой путем добавления нулевых отсчетов в обрабатываемые последовательности «спереди» или «сзади» и количество которых должно быть не меньше количества значащих отсчетов для каждой из них.

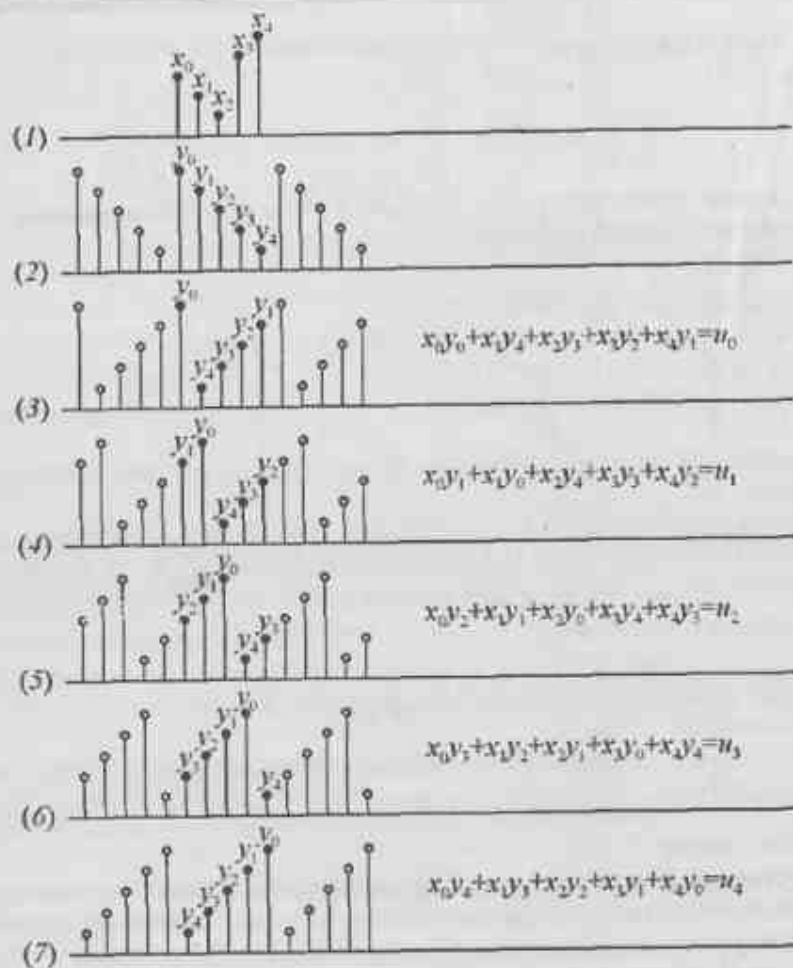


Рис. 3.16. Пример периодической или круговой свертки

3.6.4. В реальных случаях значительно проще производить расчет спектра дискретизированного сигнала исходя не из спектра непрерывного сигнала, а из дискретной последовательности, которая всегда имеет конечное число отсчетов. В этом случае, при числе отсчетов  $N$ , ДПФ описывается выражением (3.18).

В некоторых случаях удобно рассчитывать коэффициенты Фурье  $X(k\Omega)$  в точках  $k\Omega$  согласно выражения

$$\hat{X}(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \exp(-j2\pi kn/N),$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1)/2$  при нечетных значениях  $N$  и  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, N/2$  при четных значениях  $N$ .

Поскольку количество отсчетов сигнала одинаково как по времени так и по частоте, частотный интервал между соседними отсчетами определяется из условия

$$\Omega = \frac{\omega_{\max}}{N} = \frac{2\pi}{NT}.$$

Произведение  $NT$  представляет собой длительность анализируемой реализации. ДПФ позволяет представить точные значения спектральных составляющих в точках  $k\Omega$ .

Очевидно, что значения коэффициентов Фурье в дискретных точках частотной оси совпадает со значениями непрерывного спектра в этих же точках. В промежутках между этими значениями по частотной оси для дискретного случая значения спектральных составляющих неизвестны и могут быть определены только путем использования соответствующих интерполяционных полиномов, в частности, функций вида  $\sin x/x$ .

### 3.7. Выводы

Рассмотренный математический аппарат позволяет описывать в компактной форме как характеристики линейных цифровых систем, так и цифровых сигналов. Показано, что аппарат  $Z$ -преобразования играет в ЦОС ту же роль, что и преобразование Лапласа для описания аналоговых сигналов, систем и цепей.

Установлена взаимнооднозначная связь между точками на  $p$ -плоскости и  $Z$ -плоскости. Следует обратить внимание на то, что левая половина  $p$ -плоскости является внутренней частью окружности бесконечного радиуса, а окружность на  $Z$ -плоскости имеет единичный радиус. Внутри окружности единичного радиуса на  $Z$ -плоскости отображается вся левая часть  $p$ -плоскости, т.е. окружность бесконечно большого радиуса отображается в окружность конечного радиуса. Указанный вид отображения при выполнении условий теоремы Котельникова не приводит к информационным потерям. Однако при этом происходят искажения АЧХ и частотных шкал, которые могут быть заранее учтены.

Определены особенности вычисления спектральных коэффициентов Фурье в дискретных точках частотной оси. Показано, что в случае, когда количество отсчетов во временной области равно количеству отсчетов в частотной и является величиной конечной для двух реализаций, их свертка имеет то же количество отсчетов и носит круговой характер. Для получения

периодической свертки из круговой свертки, которая характерна для описания взаимодействия аналоговых систем или цепей с сигналами, достаточно добавить «спереди» или «сзади» каждой реализации нулевые отсчеты, количество которых должно быть не менее количества значащих.

Показано, что для описания линейных дискретных систем и сигналов во временной области может использоваться математический аппарат конечных разностей, который является дискретным аналогом дифференциальных уравнений. Через свойства Z-преобразования показана связь между отсчетами во временной области и значениями функции в области переменной  $z$ .

## 4. ЛИНЕЙНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЯЧЕЙКИ

### 4.1. Вводные замечания

Линейные цифровые системы, как было показано ранее, удовлетворяют принципу суперпозиции. Очевидно, что эти системы не могут даже для идеального случая рассматриваться как строго линейные вследствие того, что оперируют с величинами, составляющих счетное множество, а операции интегрирования и дифференцирования выполняются приближенно [34]. Однако с достаточной для практики точностью данное ограничение устраняется тем, что количество разрядов, с которыми оперирует устройство обработки, настолько велико, что можно пренебречь отличиями от непрерывных величин, а эффекты квантования учитываются введением дополнительных шумов, интенсивность которых связана с величиной младшего разряда. Также повышение точности выполнения операций при дифференцировании и интегрировании может быть получено либо повышением частоты дискретизации, либо применением соответствующих форм конформных отображений.

На основании вышеизложенного видно, что многие понятия линейных непрерывных систем находят применение для описания линейных цифровых систем.

Основными характеристиками линейных цифровых систем являются их передаточные функции, описывающие поведение систем в частотной области в установившемся режиме, и импульсные характеристики, описывающие поведение этих же систем во временной области (переходные процессы).

Аналогично тому, как аналоговые линейные системы описываются в частотной области отношением полиномов соответствующего порядка в  $s$ -плоскости, так и линейные цифровые системы описываются отношением полиномов соответствующего порядка в  $Z$ -плоскости.

Анализ показал, что в том случае, когда передаточная функция линейной цифровой системы реализуется в виде соответствующих комбинаций полиномов первого и второго порядков, которые описывают передаточные

функции линейных цифровых элементарных ячеек, уровень шумов вычислений будет минимален [26, 34].

Будем полагать, что все рассматриваемые в данном разделе виды линейных цифровых элементарных ячеек и, на их основе, систем осуществляют обработку входных последовательностей в режиме работы «скользящее» окно. Под режимом обработки «скользящее» окно понимают такой режим обработки, когда после каждого поступающего на вход линейной цифровой ячейки или системы входного отсчета на ее выходе появится соответствующий выходной отсчет.

В свою очередь, под режимом работы линейной цифровой системы «искалущее» окно понимается такой режим обработки, когда на вход поступает отрезок входной реализации, начало и конец которого известны, и после обработки на ее выходе появляется отрезок реализации, начало и конец которого, также известны.

Очевидно, что в некоторых случаях можно рассматривать режим работы «скользящее» окно, как режим работы «скачущее» окно, когда входная реализация, состоящая из заданного числа отсчетов, сдвигается на один отсчет от испытания к испытанию. Такой режим обработки иногда называется режимом обработки «скачущее» окно с перекрытием, причем количество отсчетов, на которые осуществляется сдвиг, может быть произвольным.

В данном разделе рассматриваются линейные цифровые элементарные ячейки, на основе которых могут быть реализованы все виды линейных цифровых систем. Обработка в этих ячейках осуществляется в режиме работы «скользящее» окно, а входные и выходные данные могут представляться как в комплексной, так и в действительной формах.

#### 4.2. Линейные цифровые системы

4.2.1. Пусть  $h(n) = \hat{h}_n$  дискретная импульсная характеристика дискретной линейной системы, возбуждаемой единичной импульсной функцией. Тогда выходной сигнал  $\hat{y}_n$  на произвольную входную последовательность  $\hat{x}_n$  будет определяться дискретной сверткой

$$\hat{y}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{h}_{n-m} \hat{x}_m = \hat{h}_n * \hat{x}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{x}_m \hat{h}_{n-m} = \hat{x}_n * \hat{h}_n,$$

где знак (\*) означает знак дискретной свертки.

Каузальной (причинной) дискретной системой является система значения  $\hat{y}_n$  на выходе которой в момент времени  $n$  зависит только от значений на входе  $\hat{x}_m$ , где  $m \leq n$ . Из этого следует, что  $\hat{h}_m = 0$  если  $\hat{x}_m = 0$  при  $m < 0$  [35].

Для дискретной линейной системы с импульсной характеристикой  $\hat{h}_n$  ее Z-преобразование будет определяться выражением

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{h}_n z^{-n} = Z\{\hat{h}_n\}, \quad (4.1)$$

где  $z$  — комплексная переменная,  $H(z)$  — дискретная системная функция, которая определена для тех значений  $z$ , при которых сумма в (4.1) сходится.

Функцию  $H(z)$  в (4.1) можно рассматривать как двустороннее Z-преобразование последовательности  $\hat{h}_n$ .

Если  $\hat{h}_n = 0$  при  $n < 0$ , то (4.1) преобразуется в одностороннее Z-преобразование

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{h}_n z^{-n}.$$

Для этого случая оба преобразования эквивалентны.

Функция  $H(z)$  является дробно-рациональной функцией от  $z$  и имеет вид отношения полиномов. При этом полагается, что степень полинома в числителе  $M \leq N$ , где  $N$  — степень полинома знаменателя. Корни  $\hat{z}_{00}, \hat{z}_{01}, \dots, \hat{z}_{0M}$  полинома в числителе и корни  $\hat{z}_{p1}, \hat{z}_{p2}, \dots, \hat{z}_{pN}$  полинома в знаменателе называются соответственно нулями и полюсами функции  $H(z)$ .

Отметим, что как следует из [34], если  $h_n$  физически реализуема, действительна и устойчива, то имеется соотношение между логарифмом модуля и фазой передаточной функции  $H(z)$  при  $z = \exp(j\omega T)$  (в полярной системе координат) в виде

$$\log_{10} |H[\exp(j\omega T)]| = h_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \arg\{H[\exp(j\varphi)]\} \operatorname{ctg}[(\varphi - \omega T)/2] d\varphi,$$

$$\arg\{H[\exp(j\omega T)]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log_{10} |H[\exp(j\varphi)]| \operatorname{ctg}[(\varphi - \omega T)/2] d\varphi.$$

Требование, чтобы  $\log_{10} |H[\exp(j\omega T)]|$  и  $\arg\{H[\exp(j\omega T)]\}$  были бы парой преобразования Гильберта, часто называют условием минимальности фазы системы. Аналогично, минимально-фазовая последовательность — это последовательность, преобразование Фурье которой имеет минимальную фазу.

Минимально-фазовой линейной системой называется каузальная система, у которой все полюсы системной функции  $H(z)$  лежат внутри единичной окружности в Z-плоскости, а нули внутри и на окружности, т.е.

$|\dot{z}_{pm}| < 1$  и  $|\dot{z}_{0m}| \leq 1$ . Для устойчивости системы все полюсы должны удовлетворять условию  $|\dot{z}_{pm}| < 1$ .

Другая форма записи условия минимальности фазы (в декартовой системе координат) может быть представлена в виде соотношений (2.8) и (2.9).

4.2.2. Положим, что некоторая каузальная дискретная линейная система описывается линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\sum_{m=0}^N \dot{a}_m \dot{y}_{n-m} = \sum_{m=0}^M \dot{b}_m \dot{x}_{n-m}, \quad (4.2)$$

которое связывает входную  $\dot{x}_n$  и выходную  $\dot{y}_n$  последовательности, причем  $n \geq 0$ ,  $M \leq N$ . Коэффициенты  $\dot{a}_0, \dot{a}_1, \dots, \dot{a}_N$  и  $\dot{b}_0, \dot{b}_1, \dots, \dot{b}_M$  полностью характеризуют эту систему и они могут быть как комплексными, так и действительными.

Z-преобразование, соответствующее уравнению (4.2), имеет следующий вид

$$Y(z) \sum_{m=0}^N \dot{a}_m z^{-m} = X(z) \sum_{m=0}^M \dot{b}_m z^{-m},$$

где использовано свойство свертки, указанное в табл. 3.1.

Степени  $z^{-1}$  соответствуют последовательным значениям индекса времени, т.е.  $z^{-1}$  есть оператор задержки на один отсчет.

Из последнего равенства нетрудно получить системную функцию  $H(z)$ , связывающую вход и выход, причем обычно полагают  $\dot{a}_0 = 1$

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \left( \sum_{m=0}^M \dot{b}_m z^{-m} \right) / \left( 1 + \sum_{m=1}^N \dot{a}_m z^{-m} \right), \quad (4.3)$$

которая является рациональной функцией от  $z^{-1}$ .

Одна из эквивалентных факторизованных форм функции (4.3) имеет вид

$$H(z) = \left[ \dot{b}_0 \prod_{m=1}^M (1 - \dot{z}_{0m} z^{-1}) \right] / \left[ \prod_{m=1}^N (1 - \dot{z}_{pm} z^{-1}) \right], \quad (4.4)$$

Коэффициент  $\dot{b}_0$  может рассматриваться как масштабирующий.

Передающая функция (4.4) на Z-плоскости цифровой линейной системы при условии, что  $\dot{b}_0 = 1$ , может быть представлена в виде отношения полиномов

$$H(z) = \frac{(z - r_{01} e^{j\varphi_{01}})(z - r_{02} e^{j\varphi_{02}}) \dots (z - r_{0M} e^{j\varphi_{0M}})}{(z - r_{p1} e^{j\varphi_{p1}})(z - r_{p2} e^{j\varphi_{p2}}) \dots (z - r_{pN} e^{j\varphi_{pN}})} = \frac{(1 - r_{01} e^{j\varphi_{01}} z^{-1})(1 - r_{02} e^{j\varphi_{02}} z^{-1}) \dots (1 - r_{0M} e^{j\varphi_{0M}} z^{-1})}{(1 - r_{p1} e^{j\varphi_{p1}} z^{-1})(1 - r_{p2} e^{j\varphi_{p2}} z^{-1}) \dots (1 - r_{pN} e^{j\varphi_{pN}} z^{-1})}, \quad (4.5)$$

где  $M \leq N$ ,  $\dot{z}_{0m} = r_{0m} \exp(j\varphi_{0m})$ ,  $\dot{z}_{pm} = r_{pm} \exp(j\varphi_{pm})$ .

Системную функцию (4.3) можно также записать в форме разложения на элементарные дроби. Если положить, что  $M < N$ , а кратные полюсы отсутствуют, то

$$H(z) = \sum_{m=1}^N \dot{r}_m / (1 - \dot{z}_{pm} z^{-1}) = \sum_{m=1}^N \dot{r}_m z / (z - \dot{z}_{pm}), \quad (4.6)$$

где  $\dot{r}_m$  — вычеты, определяемые из теоремы о вычетах по выражению [36]

$$\dot{r}_m = \left[ H(z)(z - \dot{z}_{pm}) / z \right]_{z=\dot{z}_{pm}}.$$

Как показано в [15, 36], подвергая обратному Z-преобразованию функцию (4.6), получим импульсную характеристику дискретной линейной системы, которая при нулевых начальных условиях представляет собой сумму дискретных экспонент

$$\dot{h}_n = \begin{cases} \sum_{m=1}^N \dot{r}_m \dot{z}_{pm}^n & \text{при } n \geq 0, \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

В зависимости от вида записи системной функции  $H(z)$  техническая ее реализация может быть представлена в виде прямой формы (по выражению (4.3)), последовательной или каскадной (по выражениям (4.4) и (4.5)), параллельной (по выражению (4.6)) и параллельно-последовательной.

Очевидно, что минимальное количество операций умножения обеспечивает последовательная структура, так как только в ней отсутствует операция умножения на те или иные коэффициенты.

Структурные схемы указанных соединений изображены на рис. 4.1:

а) последовательное соединение —  $H(z) = \prod_{i=1}^N H_i(z)$ ;

б) параллельное соединение —  $H(z) = \sum_{m=1}^N \dot{r}_m H_m(z)$ , где  $\dot{r}_m$  — весовые ко-

эффициенты;

в) параллельно-последовательное соединение -  $H(z) = \sum_{i=1}^K \dot{y}_i \prod_{j=1}^R H_j(z)$ .

При этом предполагается, что  $H_j(z)$  являются передаточными функциями элементарных ячеек, составляющих ту или иную структуру и описываются либо полиномами первой степени (с действительными или комплексными коэффициентами), либо второй степени (с действительными коэффициентами) [15].

Отметим, что линейные цифровые системы также называют цифровыми фильтрами (ЦФ), особенности расчета которых будут рассмотрены позднее.

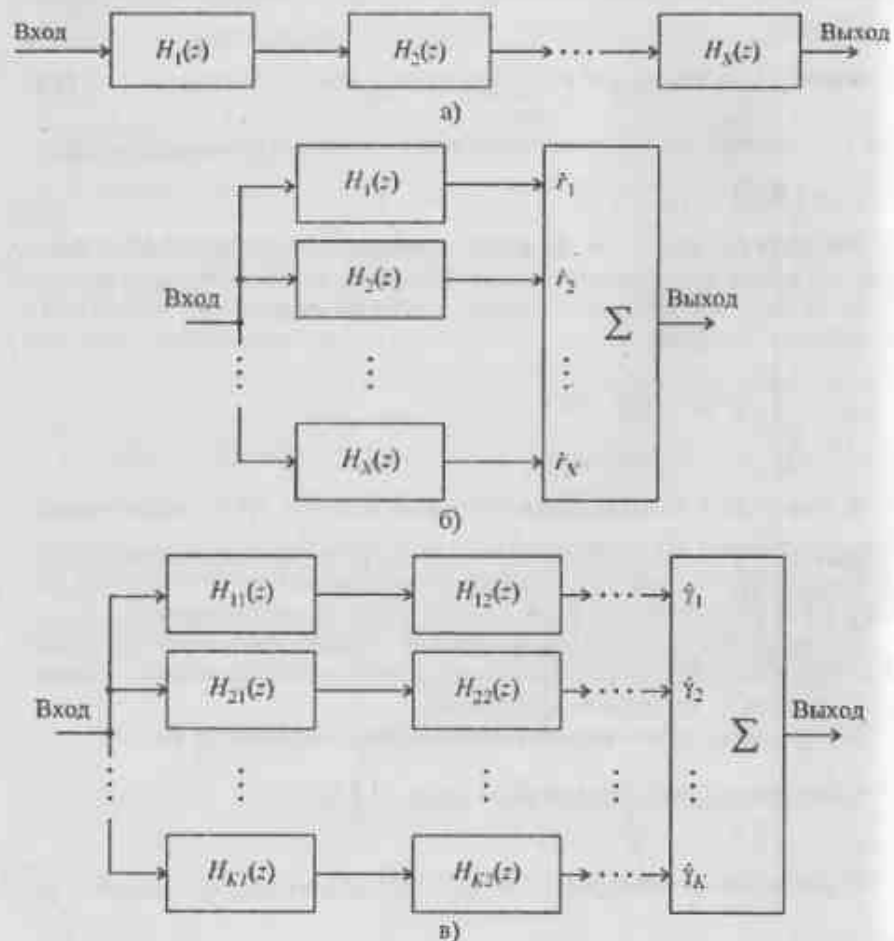


Рис. 4.1. Структурные схемы реализации передаточных функций  $H(z)$

4.2.3. Заданные виды АЧХ могут быть реализованы путем соответствующего соединения выбранных цифровых элементарных ячеек. При этом, в зависимости от заданных требований к входному и выходному процессам возможен выбор их ряда. Под цифровой элементарной ячейкой будем понимать функционально законченный узел, реализующий операции вычисления комплексного нуля и комплексного полюса или комплексно-сопряженных нулей и комплексно-сопряженных полюсов передаточной функции.

Можно представить четыре способа образования цифровых элементарных ячеек [1].

4.2.3.1. Входной процесс - отсчеты комплексные, передаточная функция - комплексная. Алгоритм обработки во временной области

$$\dot{y}_m = \dot{y}_m + \dot{D}y_m = \sum_n (\dot{x}_n \dot{h}_{m-n} - \dot{x}_n^* \dot{h}_{m-n}^*)T + j \sum_n (\dot{x}_n \dot{h}_{m-n} + \dot{x}_n^* \dot{h}_{m-n}^*)T, \quad (4.7)$$

где  $\dot{x}_n = \text{Re } \dot{x}_n$  и  $\dot{x}_n^* = \text{Im } \dot{x}_n$  - отсчеты квадратурных составляющих комплексного входного процесса  $\dot{x}_n = \dot{x}_n + j\dot{x}_n^*$ ;  $T$  - период дискретизации, который в дальнейшем полагаем равным единице;  $\dot{y}_m = \dot{y}_m + j\dot{y}_m^*$  - комплексные выходные отсчеты, квадратурные составляющие которых  $\dot{y}_m = \text{Re } \dot{y}_m$  и  $\dot{y}_m^* = \text{Im } \dot{y}_m$ ;  $\dot{h}_n = \text{Re } \dot{h}_n$  и  $\dot{h}_n^* = \text{Im } \dot{h}_n$  - квадратурные значения комплексной импульсной характеристики цифровой элементарной линейной системы  $\dot{h}_n = \dot{h}_n + j\dot{h}_n^*$ .

4.2.3.2. Входной процесс - отсчеты комплексные, передаточная функция - действительная. Алгоритм обработки во временной области имеет вид

$$\dot{y}_m = \dot{y}_m + j\dot{y}_m^* = \sum_n \dot{x}_n \dot{h}_{m-n} + j \sum_n \dot{x}_n^* \dot{h}_{m-n} \quad (4.8)$$

и описывает обработку сигналов в двух независимых квадратурных каналах с одинаковыми импульсными характеристиками.

4.2.3.3. Входной процесс - отсчеты вещественные (или только мнимые), передаточная функция - комплексная.

Алгоритм обработки во временной области

$$\dot{y}_m = \dot{y}_m + j\dot{y}_m^* = \sum_n \dot{x}_n \dot{h}_{m-n} + j \sum_n \dot{x}_n^* \dot{h}_{m-n} \quad (4.9)$$

и описывает обработку сигналов по алгоритму Герцеля [26].

4.2.3.4. Входной процесс - отсчеты вещественные, передаточная функция - вещественная.

Алгоритм обработки во временной области имеет вид

$$\dot{y}_m = \sum_n \dot{x}_n \dot{h}_{m-n} \quad (4.10)$$



Рассмотренные выражения (4.7) – (4.10) описывают в общем виде алгоритмы, осуществляющие обработку сигналов в режиме работы, называемым «скользящим» весовым суммированием.

Из всего многообразия элементарных цифровых ячеек, на основе которых реализуются те или иные линейные цифровые системы, на практике применяются ячейки, описываемые выражениями (4.7) и (4.8), и которые называются соответственно цифровыми комплексными ячейками (ЦКЯ) и цифровыми биквадратными (действительными) ячейками [37]. Ячейки, описываемые выражением (4.9), применяются в ряде специальных устройств цифровой фильтрации. Отметим, что при синтезе цифровых ФНЧ и ФВЧ находят применение ячейки, алгоритм работы которых описывается соотношением (4.10).

### 4.3. Цифровые комплексные ячейки

Существуют ЦКЯ первого порядка, которые могут быть реализованы с бесконечными импульсными характеристиками (БИХ):

- тангенсная ЦКЯ первого вида (рекурсивная с прямой связью);
- тангенсная ЦКЯ второго вида (рекурсивная с прямой связью);
- синусная ЦКЯ (рекурсивная без прямой связи);
- квазитангенсная ЦКЯ (рекурсивная с прямой связью).

и ЦКЯ первого порядка с конечными импульсными характеристиками (КИХ), к которым относятся:

- ЦКЯ с КИХ первого вида;
- ЦКЯ с КИХ второго вида.

Отметим, что ЦФ, реализуемые на основе соответствующих рекурсивных ЦКЯ, носят аналогичное название. ЦФ на основе КИХ-ячеек называют нерекурсивными, а иногда – косинусными [38]. Все эти ЦКЯ функционируют по алгоритму (4.7).

4.3.1. Рассмотрим тангенсную ЦКЯ первого вида первого порядка, которая во временной области описывается линейным разностным уравнением (4.2), если положить в нем  $N=1$ ,  $a_0=1$ ,  $a_1=-z_p$ ,  $M=1$ ,  $b_0=1$ ,  $b_1=-z_{01}$ , и которое будет

$$y_n = x_n - z_{01}x_{n-1} + z_p y_{n-1}. \quad (4.11)$$

Передаточная функция на Z-плоскости элементарного цифрового звена, называемого тангенсной ЦКЯ первого вида первого порядка, если положить в уравнении (4.3)  $M=1$ ,  $b_0=1$ ,  $b_1=-z_{01}$ ,  $N=1$ ,  $a_1=-z_p$ , будет [12]

$$H(z) = \frac{1 - z_{01}z^{-1}}{1 - z_p z^{-1}} = \frac{1 - r_{01}e^{j\varphi_{01}}z^{-1}}{1 - r_p e^{j\varphi_p}z^{-1}}, \quad (4.12)$$

где  $r_{01}$ ,  $r_p$  – значения модулей нуля и полюса;  $\varphi_{01}$  и  $\varphi_p$  – фазовые углы в полярных координатах нуля и полюса на Z-плоскости, отсчитываемые от действительной оси, причем цифры возле нуля обозначают вид ЦКЯ.

Рассмотренная ЦКЯ является базовой ячейкой при проектировании ЦФ на основе использования билинейного преобразования и поэтому такая ЦКЯ часто называется тангенсной, а ЦФ на ее основе, как указывалось, – тангенсными.

Структурная схема тангенсной ЦКЯ первого вида первого порядка представлена на рис. 4.2.

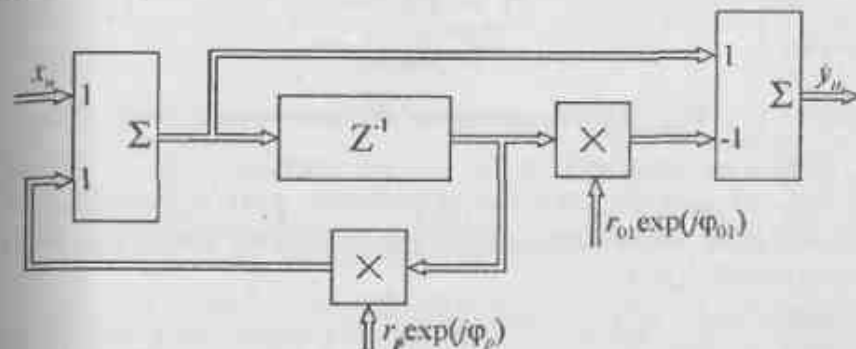


Рис. 4.2. Структурная схема тангенсной ЦКЯ первого вида первого порядка

4.3.2. Существует также тангенсная ЦКЯ второго вида первого порядка [12].

Разностное уравнение, описывающее ее работу во временной области, получается, если положить в (4.2)  $N=1$ ,  $a_0=1$ ,  $a_1=-z_p$ ,  $M=1$ ,  $b_0=z_{02}$ ,  $b_1=-1$  и которое будет

$$y_n = z_{02}x_n - x_{n-1} + z_p y_{n-1}. \quad (4.13)$$

Передаточная функция этой ячейки на Z-плоскости, если положить в (4.3)  $M=1$ ,  $b_0=z_{02}$ ,  $b_1=-1$ ,  $N=1$ ,  $a_1=-z_p$ , описывается выражением

$$H(z) = \frac{z_{02} - z^{-1}}{1 - z_p z^{-1}} = \frac{r_{02}e^{j\varphi_{02}} - z^{-1}}{1 - r_p e^{j\varphi_p}z^{-1}}. \quad (4.14)$$

Аналогичным образом цифры возле нуля означают вид ЦКЯ. Структурная схема такой ячейки имеет вид, изображенный на рис. 4.3.

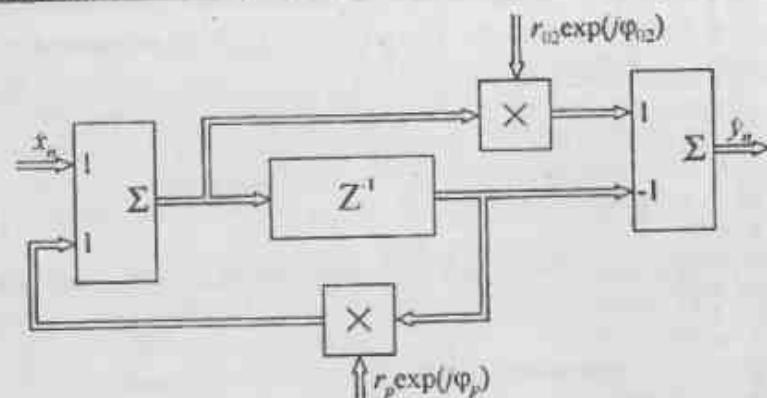


Рис. 4.3. Структурная схема тангенсной ЦКЯ второго вида первого порядка

Сравнение выражений (4.12) с (4.14) показывает, что если нуль  $z_{01} = r_{01} \exp(j\varphi_{01})$  находится внутри единичного круга на  $Z$ -плоскости, то для получения той же передаточной функции нуль  $z_{02}$  должен находиться вне единичного круга, т.е.

$$r_{01} \exp(j\varphi_{01}) = r_{02}^{-1} \exp(-j\varphi_{02}) = r_0 \exp(j\varphi_0).$$

Видно, что модульное значение нуля  $r_{02} > 1$ , если  $r_{01} < 1$ , и в этом случае использование арифметики с фиксированной запятой, при технической реализации алгоритма, приводит к реализационным затруднениям. При этом нерекурсивная ячейка является неминимально-фазовой, т.к. нуль находится вне единичного круга на  $Z$ -плоскости.

Анализ показывает, что форма АЧХ нерекурсивной ячейки второго вида не изменяется, если вместо величины  $r_{02}^{-1}$  использовать величину  $r_{02}$ .

Тогда АЧХ обеих видов нерекурсивных ячеек имеют одинаковую форму при  $r_{01} = r_{02} = r_0$ , и, следовательно, для обоих видов ЦКЯ целесообразно использовать величины  $|r_0| \leq 1$ . При этом для получения одинаковых АЧХ должно выполняться условие  $\varphi_{01} = -\varphi_{02}$  и наоборот. КИХ-ячейки в обоих случаях являются минимально-фазовыми, т.к. нули располагаются внутри единичного круга на  $Z$ -плоскости или на единичной окружности.

ЦКЯ по выражению (4.14) позволяет реализовывать неминимально-фазовые ЦФ, имеющие постоянный коэффициент передачи по амплитуде во всем диапазоне частот и заданную ФЧХ, определяемую положением нулей и полюсов.

Тангенсные ЦКЯ обоих видов могут быть представлены в виде каскадного соединения чисто рекурсивной ячейки (называемой также синусной) и нерекурсивных, как показано на рис. 4.4.

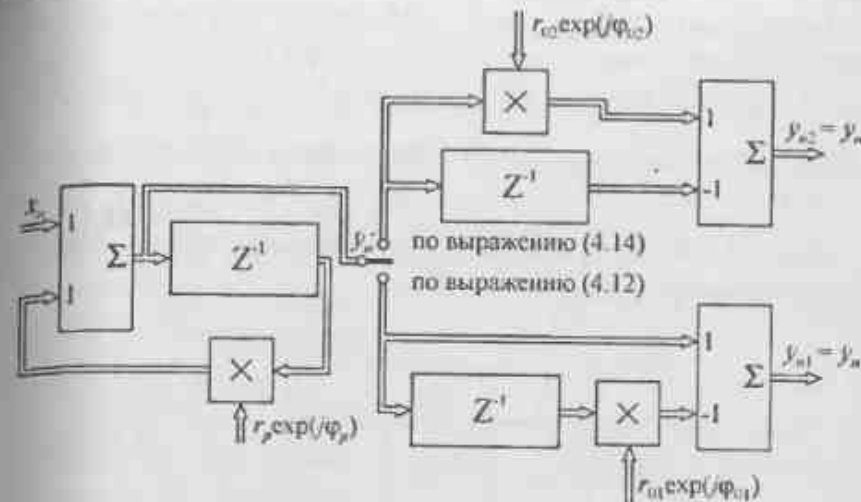


Рис. 4.4. Структурная схема каскадного соединения рекурсивной и нерекурсивных ЦКЯ

Рекурсивная ЦКЯ без прямой связи является базовой при проектировании узкополосных, относительно частоты дискретизации, цифровых синусных ФНЧ и ПФ. Из рис. 4.4 видно, что затраты оборудования на реализацию тангенсной ЦКЯ в два раза больше, чем синусной.

4.3.3. Рассмотрим основные характеристики элементарной синусной (рекурсивной без прямой связи) ЦКЯ, которая описывается во временной области рекуррентным линейным разностным уравнением первого порядка [12, 26].

Положим в (4.2)  $N = 1$ ,  $\hat{a}_0 = 1$ ,  $\hat{a}_1 = -z_p$ ,  $M = 0$ ,  $\hat{b}_0 = 1$ .

Тогда будем иметь

$$\hat{y}_n = \hat{x}_n + z_p \hat{y}_{n-1}. \quad (4.15)$$

Раскрывая выражение (4.15) для  $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \dots$ , и полагая  $\hat{y}_{-1} = 0$ , нетрудно видеть, что выходной отклик будет

$$\begin{aligned} \hat{y}_0 &= \hat{x}_0; \\ \hat{y}_1 &= \hat{x}_1 + z_p \hat{y}_0 = \hat{x}_1 + z_p \hat{x}_0; \\ \hat{y}_2 &= \hat{x}_2 + z_p \hat{y}_1 = \hat{x}_2 + z_p (\hat{x}_1 + z_p \hat{x}_0) = \hat{x}_2 + z_p \hat{x}_1 + z_p^2 \hat{x}_0; \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\hat{y}_n = \hat{x}_n + z_p \hat{x}_{n-1} + \dots + z_p^n \hat{x}_0 = \sum_{i=0}^n z_p^i \hat{x}_{n-i}$$

и представляет собой геометрическую прогрессию.

Если входным сигналом является единичная ступенчатая функция (единичный скачок), то последовательность  $\hat{x}_n = 1$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ . В этом случае последнее равенство в (4.16) принимает вид  $\hat{y}_n = (1 - \hat{z}_p^{n+1}) / (1 - \hat{z}_p)$ .

Для больших  $n$  решение стремится к установившемуся значению для  $|\hat{z}_p| < 1$   
 $\hat{y}_n = 1 / (1 - \hat{z}_p)$ . (4.17)

На рис. 4.5 показан отклик  $\hat{y}_n = y_n$  на единичный скачок  $\hat{x}_n = 1$  при различных значениях  $\hat{z}_p = r_p$ .

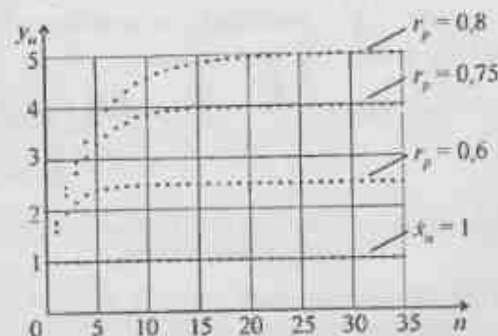


Рис. 4.5. Отклик на единичный скачок синусной ЦКЯ при различных значениях  $\hat{z}_p = r_p$

Видно сходство кривых с откликом интегрирующей RC-цепи на единичный скачок.

На рис. 4.6 изображена укрупненная функциональная схема синусной ЦКЯ первого порядка.

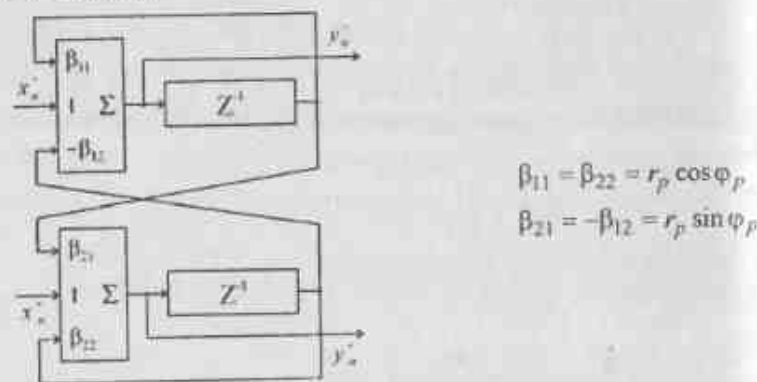


Рис. 4.6. Укрупненная функциональная схема синусной ЦКЯ

Для получения отклика цифровой цепи в установившемся режиме в качестве испытательного сигнала используется цифровой синусональный сигнал вида

$$\hat{x}_n = \exp(j2\pi kn / N), \quad (4.18)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . В этом случае отклик цифровой цепи при изменении величины  $k = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$  позволяет получать дискретные отсчеты АЧХ. При выборе величины  $N \gg 1$ , дискретность положения тестового сигнала на оси частот может быть сделана сколь угодно малой.

Полагая в (4.3)  $M=0$ ,  $\hat{x}_0 = 1$ ,  $N=1$ ,  $\hat{a}_1 = -\hat{z}_p$ , получаем передаточную функцию на Z-плоскости в виде

$$H(z) = 1 / (1 - \hat{z}_p z^{-1}), \quad (4.19)$$

С учетом вышесказанного, АЧХ синусной ЦКЯ первого порядка при значении полюса в (4.16) равного величине  $\hat{z}_p = r_p \exp(j\varphi_p)$ , где  $r_p$  — модуль,  $\varphi_p$  — фаза,  $z^{-1} = e^{-j\omega T}$ , будет

$$H(\omega T) = \frac{1}{\sqrt{1 + r_p^2 - 2r_p \cos(\omega T - \varphi_p)}}. \quad (4.20)$$

Нормированная АЧХ этой ЦКЯ имеет вид

$$\frac{H(\omega T)}{H_{\max}} = \frac{1 - r_p}{\sqrt{1 + r_p^2 - 2r_p \cos(\omega T - \varphi_p)}}. \quad (4.21)$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) будет

$$\Phi(\omega T) = -\arctg \frac{r_p \sin(\omega T - \varphi_p)}{1 - r_p \cos(\omega T - \varphi_p)}. \quad (4.22)$$

На рис. 4.7 изображена АЧХ данной цепи при различных значениях  $r_p$  в нормированном виде при  $\varphi_p = 0$  и  $\varphi_p \neq 0$ . Видно, что если  $\varphi_p \neq 0$ , то АЧХ сдвигается на величину  $\varphi_p$  вдоль частотной оси без изменения формы АЧХ, а изменения  $r_p$  приводят к ее изменениям.

Полосы пропускания АЧХ на уровне 0,707 в нормированном виде будет [39]

$$2\Delta\varphi_{0,7} = 2\Delta\omega T_{0,7} = 2(1 - r_p) / \sqrt{r_p} \text{ (рад)}. \quad (4.23)$$

При  $r_p \geq 0,753$  с погрешностью менее 1%  $\sqrt{r_p} \approx 0,5(1 + r_p)$ , откуда выражение (4.23) преобразуется к виду

$$2\Delta\varphi_{0,7} = 4(1 - r_p) / (1 + r_p) \text{ (рад)}. \quad (4.24)$$

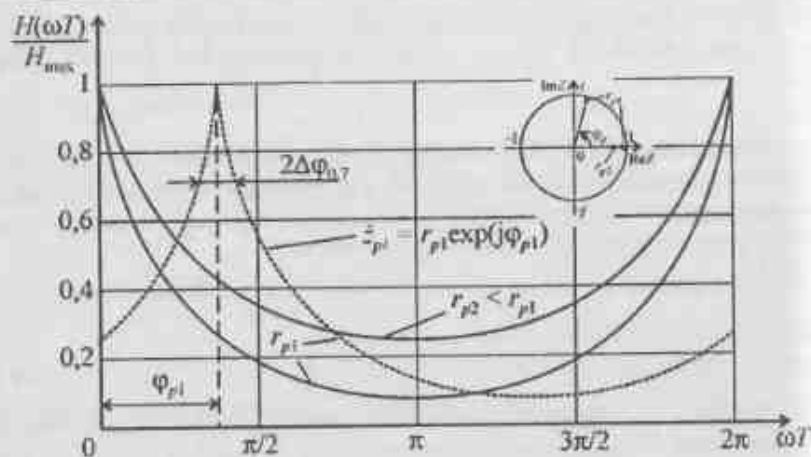


Рис. 4.7. Нормированная АЧХ синусной ЦКЯ

Число эффективно обрабатываемых входных отсчетов  
 $N = 2,3 / (1 - r_p)$ . (4.25)

Уравнения (4.19) и (4.20) могут быть интерпретированы геометрически на единичной окружности в Z-плоскости так, как показано на рис. 4.8.

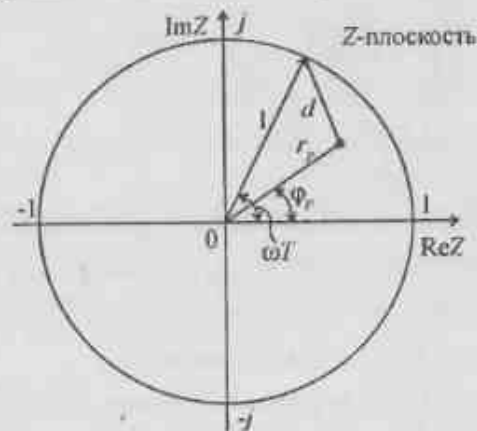


Рис. 4.8. Геометрическое представление влияния расположения полюса на Z-плоскости на форму АЧХ синусной ЦКЯ

Данное представление позволяет более наглядно показать влияние расположения полюса на АЧХ линейной системы [26]. Из рассмотрения рис. 4.8 видно, что модуль  $H(\omega T)$  есть величина равная  $1/d$ , а знаменатель

выражения (4.20) описывает соотношение, которым связаны стороны косого треугольника. Угол  $\omega T - \varphi_p$  характеризует точку АЧХ на частотной оси  $\omega T$ , которой соответствует величина  $H(\omega T) = 1/d$  [26].

Аналогичным образом можно определить через положение нуля  $z_0$  на Z-плоскости форму и расположение АЧХ на частотной оси  $\omega T$  нерекурсивной ЦКЯ. В этом случае  $H(\omega T) = d$  при условии, что один катет равен величине  $r_0$ , а не  $r_p$ , а угол будет  $\omega T - \varphi_0$ .

4.3.4. Рассмотрим основные характеристики нерекурсивных ЦКЯ первого и второго видов первого порядка.

4.3.4.1. Разностное уравнение, описывающее нерекурсивную ЦКЯ первого вида первого порядка, получается из (4.2), если положить  $N = 0$ ,  $\hat{a}_0 = 1$ ,  $M = 1$ ,  $\hat{b}_0 = 1$ ,  $\hat{b}_1 = -z_{01}$ , в виде

$$\hat{y}_n = \hat{x}_n - z_{01} \hat{x}_{n-1}. \quad (4.26)$$

Укрупненная функциональная схема нерекурсивной ЦКЯ первого вида первого порядка, реализующей алгоритм по выражению (4.26), изображена на рис. 4.9.

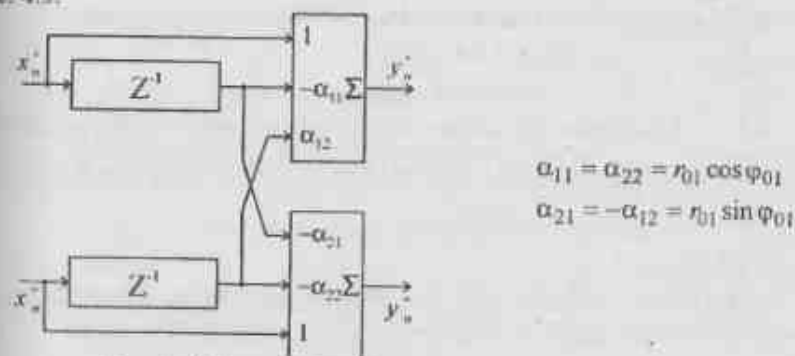


Рис. 4.9. Укрупненная функциональная схема КИХ-ячейки первого вида первого порядка

Передаточную функцию этой ЦКЯ на Z-плоскости получим, положив в (4.3)  $M = 1$ ,  $\hat{b}_0 = 1$ ,  $\hat{b}_1 = -z_{01}$ ,  $N = 1$ ,  $\hat{a}_1 = 0$ , откуда

$$H(z) = 1 - z_{01} z^{-1}. \quad (4.27)$$

АЧХ этой ЦКЯ для  $z_{01} = r_{01} \exp(j\varphi_{01})$ , подставляемого в (4.27), будет

$$H(\omega T) = \sqrt{1 + r_{01}^2 - 2r_{01} \cos(\omega T - \varphi_{01})} \quad (4.28)$$

и которая изображена при различных значениях  $r_{01}$  и  $\varphi_{01}$  на рис. 4.10.

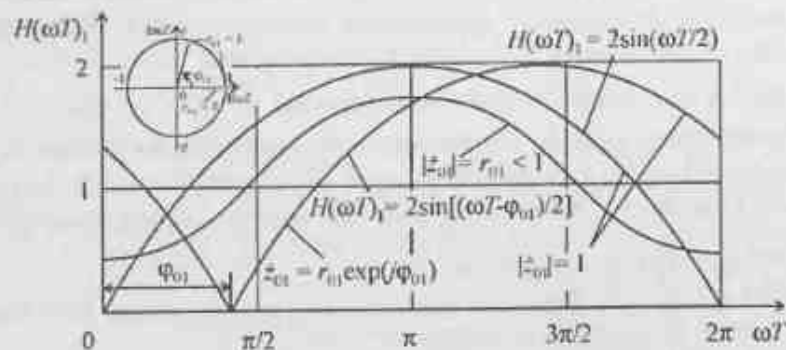


Рис. 4.10. Формы АЧХ КИХ-ячейки первого вида первого порядка

Нормированная АЧХ этой ЦКЯ, получаемая из (4.28) при  $\cos(\omega T - \varphi_{01}) = -1$ , имеет вид

$$\frac{H(\omega T)_1}{H_{\max}} = \frac{\sqrt{1 + r_{01}^2 - 2r_{01} \cos(\omega T - \varphi_{01})}}{1 + r_{01}} \quad (4.29)$$

ФЧХ нерекурсивной ЦКЯ первого вида первого порядка будет

$$\Phi(\omega T)_1 = -\operatorname{arctg} \frac{r_{01} \sin(\omega T - \varphi_{01})}{1 - r_{01} \cos(\omega T - \varphi_{01})} \quad (4.30)$$

4.3.4.2. Разностное уравнение, описывающее нерекурсивную ЦКЯ второго вида первого порядка, получается из (4.2) если положить  $N = 0$ ,  $a_0 = 1$ ,  $M = 1$ ,  $b_0 = z_{02}$ ,  $b_1 = -1$ , в виде

$$\hat{y}_n = \hat{x}_n z_{02} - \hat{x}_{n-1} \quad (4.31)$$

Укрупненная функциональная схема нерекурсивной ЦКЯ второго вида, реализующей алгоритм по выражению (4.31), изображена на рис. 4.11.

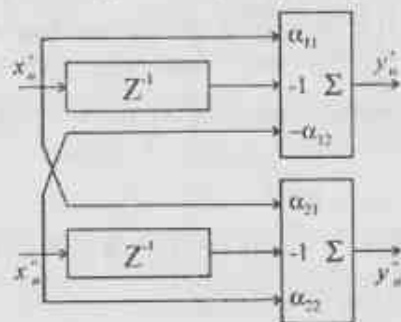


Рис. 4.11. Укрупненная функциональная схема КИХ-ячейки второго вида

Передаточную функцию этой ЦКЯ на Z-плоскости получим, положив в (4.3)  $M = 1$ ,  $b_0 = z_{02}$ ,  $b_1 = -1$ ,  $N = 1$ ,  $a_1 = 0$ , откуда

$$H(z)_2 = z_{02} - z^{-1} \quad (4.32)$$

АЧХ этой ЦКЯ для  $z_{02} = r_{02} \exp(j\varphi_{02})$ , подставляемого в (4.32), будет

$$H(\omega T)_2 = \sqrt{1 + r_{02}^2 - 2r_{02} \cos(\omega T + \varphi_{02})} \quad (4.33)$$

и которая изображена на рис. 4.12.

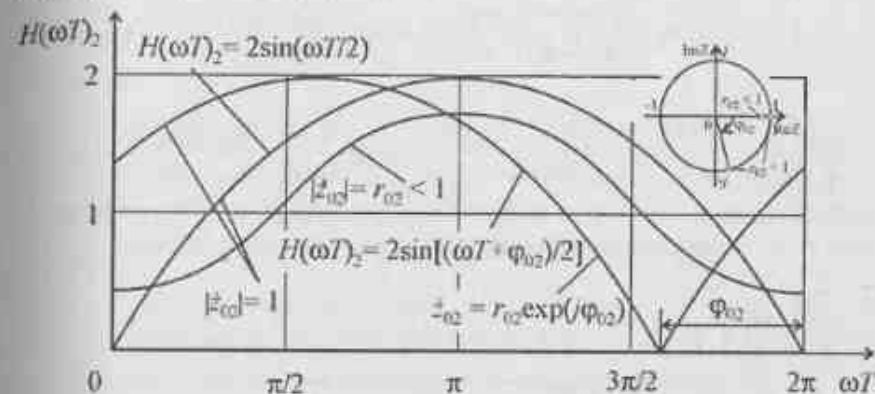


Рис. 4.12. Формы АЧХ КИХ-ячейки второго вида первого порядка

Как указывалось ранее, для получения идентичных видов АЧХ при использовании КИХ-ячеек обоих видов необходимо выполнение условия  $|r_{01}| = |r_{02}| = r_0$  и  $\varphi_{01} = -\varphi_{02} = \varphi_0$ , что приводит к совпадению выражений (4.28) и (4.33).

Нормированная АЧХ этой ЦКЯ, получаемая из (4.33), при  $\cos(\omega T + \varphi_{02}) = -1$  имеет вид

$$\frac{H(\omega T)_2}{H_{\max}} = \frac{\sqrt{1 + r_{02}^2 - 2r_{02} \cos(\omega T + \varphi_{02})}}{1 + r_{02}} \quad (4.34)$$

и при указанных выше условиях совпадает с выражением (4.29).

ФЧХ нерекурсивной ЦКЯ второго вида первого порядка будет

$$\Phi(\omega T)_2 = -\operatorname{arctg} \frac{\sin \omega T - r_{02} \sin \varphi_{02}}{\cos \omega T + r_{02} \cos \varphi_{02}} \quad (4.35)$$

4.3.5. Нормированные АЧХ тангенсных ЦКЯ, изображенных на рис. 4.2 и рис. 4.3, с учетом представления их в виде каскадного соединения синусной и соответствующей КИХ-ячейки, нормированные АЧХ которых описы-

ваются выражениями (4.21) и (4.29), (4.34), при указанных выше условиях равенства величин  $r_0$  и  $\varphi_0$  имеют вид

$$\frac{H(\omega T)}{H_{\max}} = \frac{(1-r_p)\sqrt{1+r_0^2-2r_0\cos(\omega T-\varphi_0)}}{(1+r_0)\sqrt{1+r_p^2-2r_p\cos(\omega T-\varphi_p)}} \quad (4.36)$$

ФЧХ соответствующих тангенсных ЦКЯ с учетом выражений (4.22), (4.30) и (4.35) будут иметь вид

$$\Phi(\omega T)_1 = -\operatorname{arctg} \frac{r_p \sin(\omega T - \varphi_p)}{1 - r_p \cos(\omega T - \varphi_p)} - \operatorname{arctg} \frac{r_{01} \sin(\omega T - \varphi_{01})}{1 - r_{01} \cos(\omega T - \varphi_{01})} \quad (4.37)$$

$$\Phi(\omega T)_2 = -\operatorname{arctg} \frac{r_p \sin(\omega T - \varphi_p)}{1 - r_p \cos(\omega T - \varphi_p)} - \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega T - r_{02} \sin \varphi_{02}}{\cos \omega T + r_{02} \cos \varphi_{02}} \quad (4.38)$$

На рис. 4.13 и рис. 4.14 изображены нормированные АЧХ тангенсных ЦКЯ при различных соотношениях между  $\varphi_p$  и  $\varphi_0$  при значениях  $r_0 = 1$ .

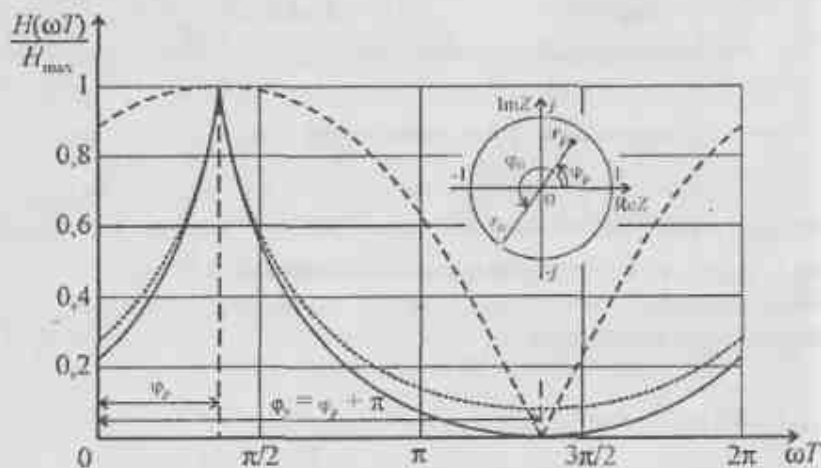


Рис. 4.13. АЧХ тангенсных ЦКЯ при параметре  $\varphi_0 = \varphi_p + \pi$

Видно, что наличие прямой связи в тангенсных ЦКЯ, по сравнению с синусными ЦКЯ приводит к наличию нуля, сужению АЧХ в полосе пропускания, большему подавлению в полосе задержания при реализации простейшего ПФ или ФНЧ и также позволяет реализовать простейший РФ или ФВЧ.

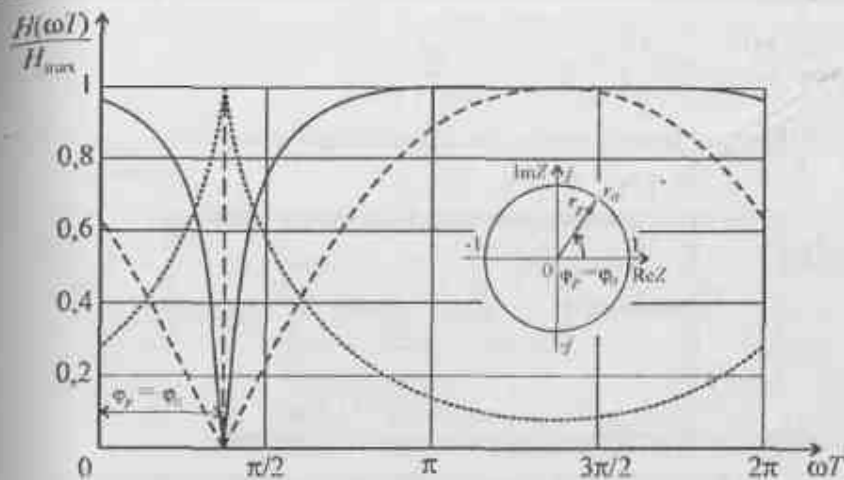


Рис. 4.14. АЧХ тангенсных ЦКЯ при параметре  $\varphi_0 = \varphi_p$

4.3.6. Рассмотрим свойства предложенной в [40] квазитангенсной ЦКЯ. Разностное уравнение, описывающее квазитангенсную ЦКЯ первого порядка, получается из (4.2), если положить  $N = 1$ ,  $\hat{a}_0 = 1$ ,  $\hat{a}_1 = \hat{z}_p$ ,  $M = 1$ ,  $\hat{b}_0 = 1$ ,  $\hat{b}_1 = \hat{z}_p$ . Тогда будем иметь

$$\hat{y}_n = \hat{x}_n + \hat{z}_p \hat{x}_{n-1} + \hat{z}_p \hat{y}_{n-1} \quad (4.39)$$

Если положить в (4.3)  $N = 1$ ,  $\hat{a}_1 = -\hat{z}_p$ ,  $M = 1$ ,  $\hat{b}_0 = 1$ ,  $\hat{b}_1 = \hat{z}_p$ , то передаточная функция этой ячейки на  $Z$ -плоскости будет

$$H(z) = \frac{1 + \hat{z}_p z^{-1}}{1 - \hat{z}_p z^{-1}} = \frac{1 + r_p e^{j\varphi_p} z^{-1}}{1 - r_p e^{j\varphi_p} z^{-1}} \quad (4.40)$$

и совпадает с (4.11) при  $r_{01} = r_p$  и  $\varphi_{01} = \varphi_p + \pi$ . Следовательно, данная ЦКЯ позволяет получить АЧХ, близкую по форме к АЧХ, изображенной на рис. 4.13 при значениях  $r_p$  близких к единице.

АЧХ данной ячейки описывается выражением

$$H(\omega T) = \frac{\sqrt{1+r_p^2+2r_p\cos(\omega T-\varphi_p)}}{\sqrt{1+r_p^2-2r_p\cos(\omega T-\varphi_p)}} \quad (4.41)$$

Нормированная АЧХ квазитангенсной ЦКЯ имеет вид

$$\frac{H(\omega T)}{H_{\max}} = \frac{(1-r_p) \sqrt{1+r_p^2+2r_p \cos(\omega T - \varphi_p)}}{(1+r_p) \sqrt{1+r_p^2-2r_p \cos(\omega T - \varphi_p)}} \quad (4.42)$$

Структурная схема квазитангенсной ЦКЯ изображена на рис. 4.15.

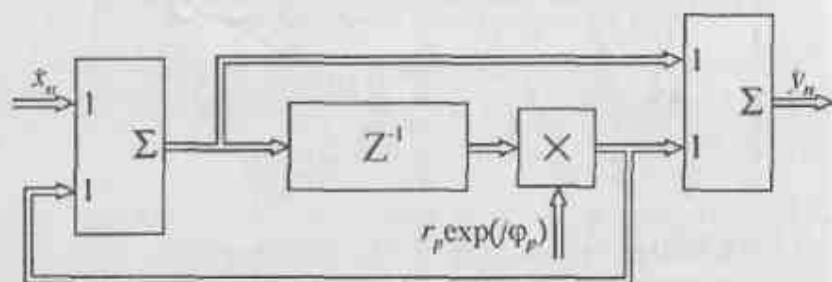


Рис. 4.15. Структурная схема квазитангенсной ЦКЯ

Рассмотрим свойства данной ЦКЯ.

Свойство 1.  $H(-z) = 1/H(z)$ .

Свойство 2. АЧХ  $H(\omega T)$ , ФЧХ  $\Phi(\omega T)$  и функция групповой задержки  $\tau(\omega T)$  (являющаяся производной ФЧХ по частоте) имеют соответственно вид

$$H(\omega T) = \frac{1+r_p^2+2r_p \cos(\omega T - \varphi_p)}{1+r_p^2-2r_p \cos(\omega T - \varphi_p)}$$

$$\Phi(\omega T) = -\arctg \frac{2r_p \sin(\omega T - \varphi_p)}{1-r_p^2}$$

$$\tau(\omega T) = \frac{2r_p \cos(\omega T - \varphi_p)}{(1-r_p^2)^2 + 4r_p^2 \sin^2(\omega T - \varphi_p)}$$

Свойство 3. Максимальные, средние и минимальные коэффициенты передачи на частотах  $\omega T = \varphi_p$ ,  $\omega T = \varphi_p \pm \pi/2$ ,  $\omega T = \varphi_p \pm \pi$  принимают соответственно значения  $H(\omega T) = H_{\max} = (1+r_p)/(1-r_p)$ ,  $H(\omega T) = 1$ ,

$$H(\omega T) = H_{\min} = H_{\max}^{-1}$$

Свойство 4. Степень отклонения АЧХ тангенсной ЦКЯ от квазитангенсной ЦКЯ определяется выражением

$$\Delta H(\omega T) = \sqrt{r_p^2 + \frac{(1-r_p)^2}{4 \cos^2(\omega T/2)}}$$

На рис. 4.16 изображен график зависимости отклонения АЧХ тангенсной ЦКЯ от квазитангенсной ЦКЯ при разных  $r_p$ .

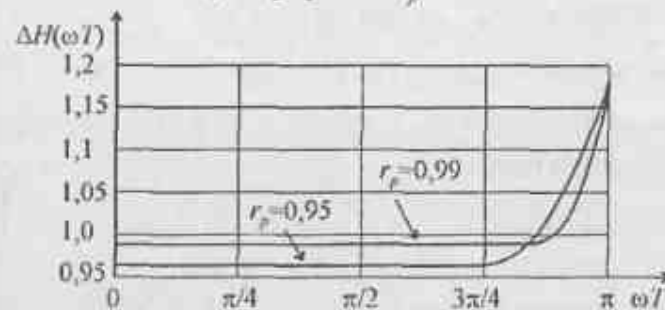


Рис. 4.16. График зависимости отклонения АЧХ тангенсной от квазитангенсной ЦКЯ

Нетрудно видеть, что для практически интересных случаев, отличие  $\Delta H(\omega T)$  менее 0,5% при  $r_p = 0,99$ . Последнее имеет важное значение, поскольку позволяет при технической реализации устройств на основе квазитангенсной ЦКЯ использовать разработанные методы синтеза для устройств на основе тангенсной, в частности, в вопросах анализа устойчивости, определение уровня шумов вычислений и выбора длины разрядной сетки. Затраты оборудования квазитангенсной ячейки сравнимы с затратами оборудования для синусной ячейки, а параметры АЧХ сравнимы с тангенсной.

#### 4.4. Функциональные схемы цифровых комплексных ячеек

Функциональные схемы рассмотренных ЦКЯ могут быть достаточно просто получены путем решения уравнений (4.11), (4.12), (4.16), (4.24), (4.29) и (4.37) при представлении левых частей в виде

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\text{Re} Y(z) + j \text{Im} Y(z)}{\text{Re} X(z) + j \text{Im} X(z)} = \frac{Y^+(z) + j Y^-(z)}{X^+(z) + j X^-(z)}$$

где  $\text{Re} Y(z) = Y^+(z)$ ,  $\text{Im} Y(z) = Y^-(z)$ ,  $\text{Re} X(z) = X^+(z)$  и  $\text{Im} X(z) = X^-(z)$ .

Рассмотрим получение функциональной схемы на примере синусной ЦКЯ, передаточная функция которой на Z-плоскости имеет вид

$$H(z) = \frac{Y^+(z) + j Y^-(z)}{X^+(z) + j X^-(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1} r_p e^{j\varphi_p}} = \frac{1}{1 - z^{-1} r_p \cos \varphi_p - j z^{-1} r_p \sin \varphi_p}$$

Раскроем последнее выражение в виде

$$\begin{aligned}
 X'(z) + jX''(z) &= [Y'(z) + jY''(z)] [1 - z^{-1}r_p \cos \varphi_p - jz^{-1}r_p \sin \varphi_p] = \\
 &= Y'(z) - Y'(z)z^{-1}r_p \cos \varphi_p + Y''(z)z^{-1}r_p \sin \varphi_p + \\
 &+ j[Y''(z) - Y''(z)z^{-1}r_p \cos \varphi_p - Y'(z)z^{-1}r_p \sin \varphi_p].
 \end{aligned}$$

Приравняв действительные и мнимые части и разрешая относительно  $Y'(z)$  и  $Y''(z)$ , будем иметь

$$Y'(z) = X'(z) - Y'(z)z^{-1}r_p \cos \varphi_p - Y''(z)z^{-1}r_p \sin \varphi_p,$$

$$Y''(z) = X''(z) + Y'(z)z^{-1}r_p \cos \varphi_p + Y''(z)z^{-1}r_p \sin \varphi_p.$$

Выполняя обратное Z-преобразование над последними выражениями, получаем

$$y_n = x_n + y_{n-1}r_p \cos \varphi_p - y_{n-1}r_p \sin \varphi_p = x_n + \beta_{11}y_{n-1} - \beta_{12}y_{n-1},$$

$$y_n = x_n + y_{n-1}r_p \cos \varphi_p + y_{n-1}r_p \sin \varphi_p = x_n + \beta_{22}y_{n-1} + \beta_{21}y_{n-1}.$$

Функциональная схема синусной ЦКЯ имеет вид, изображенный на рис. 4.17 [13, 41, 42].

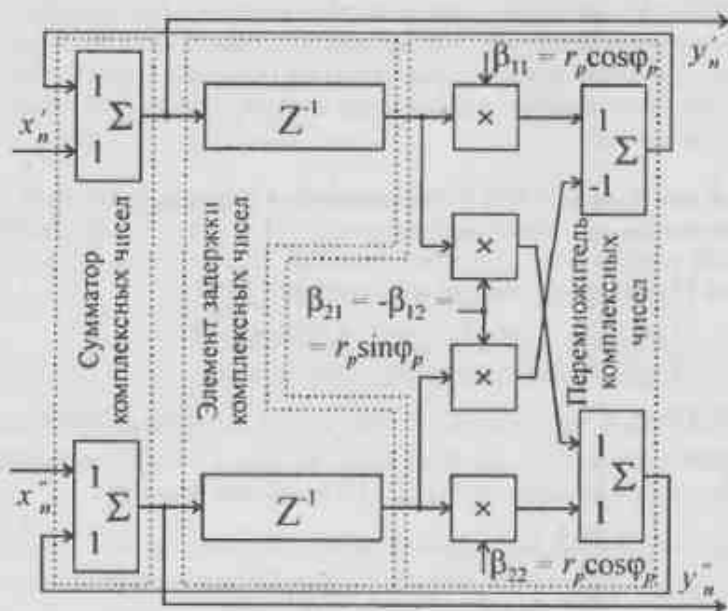


Рис. 4.17. Функциональная схема синусной ЦКЯ первого порядка

Сравнение левой части рис. 4.4 с рис. 4.17 показывает, что сумматор комплексных чисел состоит из двух сумматоров действительных чисел, элемент задержки комплексных чисел состоит из двух элементов задержки действительных чисел, а перемножитель комплексных чисел состоит из четырех перемножителей действительных чисел, сумматора и вычитателя действительных чисел.

Отметим, что временная задержка, которая осуществляется элементом задержки комплексных чисел, может быть осуществлена за счет времени выполнения операций перемножения двух комплексных чисел.

Аналогичным образом получаются другие виды функциональных схем. Функциональные схемы тангенсной ЦКЯ первого и второго видов изображены на рис. 4.18 и рис. 4.19 соответственно.

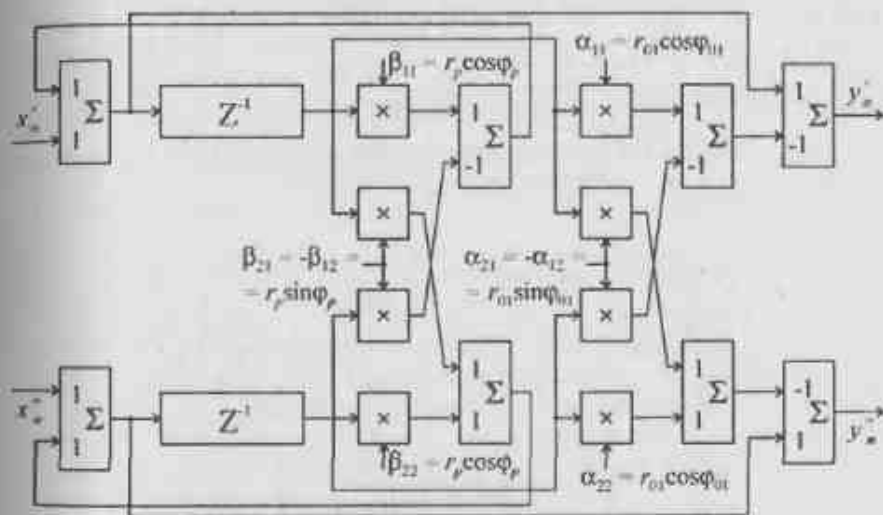


Рис. 4.18. Функциональная схема тангенсной ЦКЯ первого вида первого порядка

Аналогично можно получить функциональные схемы комплексных КИХ-ячеек.

На рис. 4.20 и рис. 4.21 изображены функциональные схемы двух видов комплексных КИХ-ячеек.

На рис. 4.22 изображена функциональная схема квазитангенсной ЦКЯ.

Видно, что все изображенные функциональные схемы состоят из простейших типовых узлов, а именно – сумматоров действительных чисел, элементов задержки действительных чисел и перемножителей действительных чисел.



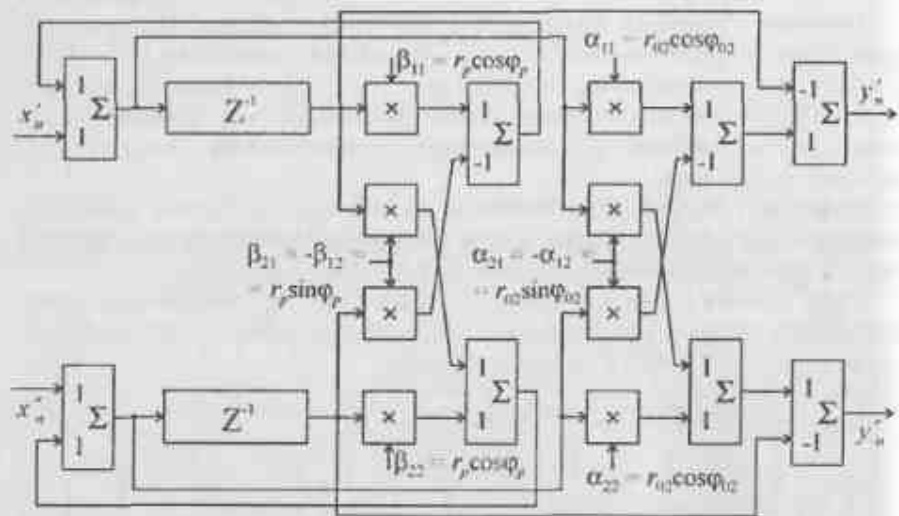


Рис. 4.19. Функциональная схема тангенсной ЦКЯ второго вида первого порядка

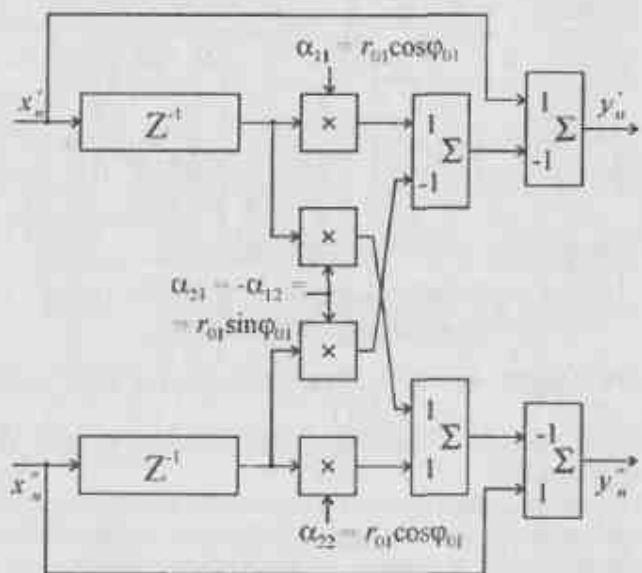


Рис. 4.20. Функциональная схема КИХ-ячейки первого вида первого порядка

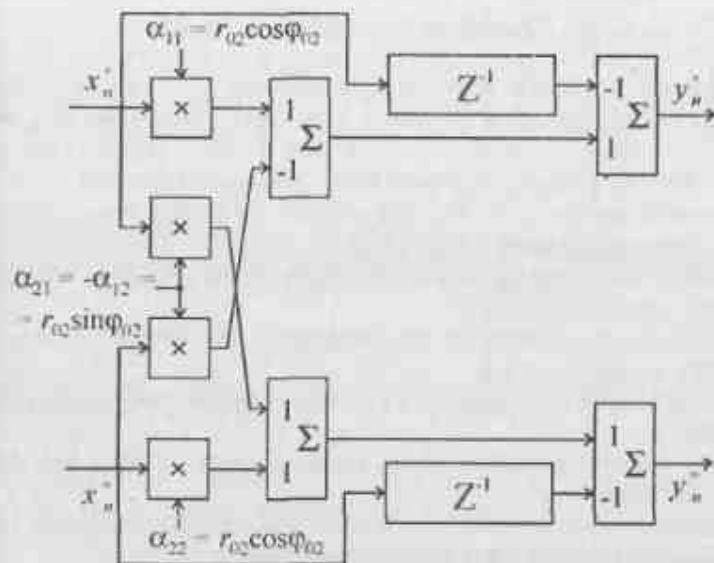


Рис. 4.21. Функциональная схема КИХ-ячейки второго вида первого порядка

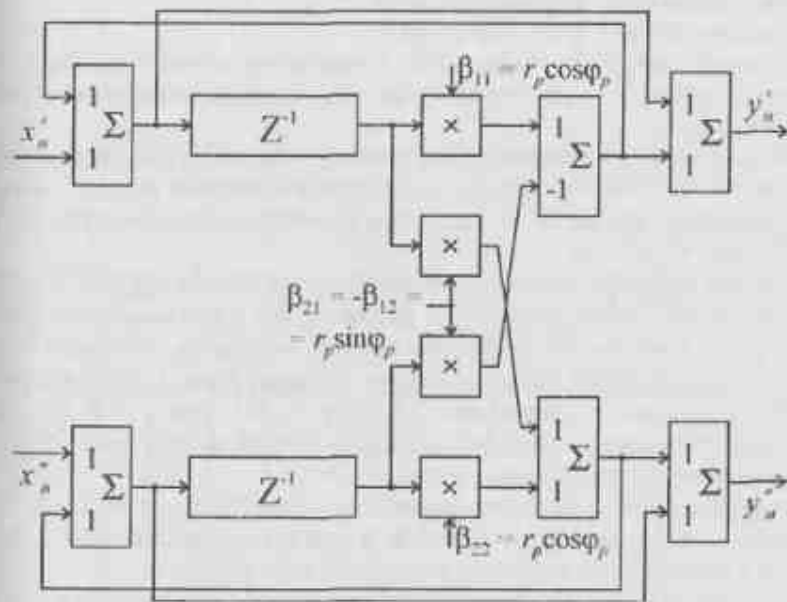


Рис. 4.22. Функциональная схема квазитангенсной ЦКЯ первого порядка

#### 4.5. Цифровые биквадратные ячейки

4.5.1. Цифровые биквадратные (действительные) ячейки являются элементарными ячейками второго порядка с действительными коэффициентами. Эти ячейки могут быть представлены в виде каскадного соединения двух элементарных ячеек первого порядка, полюса и нули которых являются или одинаковыми и действительными или комплексно-сопряженными друг другу.

Аналогично рассмотренным комплексным ячейкам, биквадратные ячейки могут быть реализованы с БИХ в виде:

- действительная тангенсная ячейка первого вида второго порядка (рекурсивная с прямой связью);
- действительная тангенсная ячейка второго вида второго порядка (рекурсивная с прямой связью);
- действительная синусная ячейка второго порядка (рекурсивная без прямой связи);
- действительная квазитангенсная ячейка второго порядка (рекурсивная с прямой связью);
- биквадратная ячейка второго порядка реализующая алгоритм Герцеля (рекурсивная с прямыми комплексными связями).

Также, аналогично, биквадратные ячейки могут быть реализованы с КИХ в виде:

- действительные с КИХ первого вида;
- действительные с КИХ второго вида.

На основе этих ячеек могут быть реализованы соответствующие ЦФ, имеющие название по виду используемых при их построении биквадратных ячеек [45–47].

Биквадратные тангенсные ячейки первого вида, синусные, КИХ-ячейки первого и второго видов и ячейки, реализующие алгоритм Герцеля, исторически появились раньше ЦКЯ и подробно рассмотрены в работах [26, 28, 29, 32–35, 37–39, 43, 45–50].

Все виды биквадратных ячеек находят применение для обработки видеосигналов, поступающих, например, с вибрационных датчиков, амплитудных детекторов и тому подобных источников действительных сигналов. В том случае, когда входной сигнал является комплексным и представляется своими квадратурными составляющими, то в соответствии с (4.8) для обработки используются два идентичных канала, каждый из которых состоит из соответствующих биквадратных ячеек.

Отметим, что на практике наибольшее распространение среди биквадратных ячеек получили тангенсная первого вида, синусная и КИХ первого вида, которые и будут рассматриваться подробно.

4.5.2. Алгоритм работы биквадратной тангенсной ячейки первого вида, обрабатывающей действительную или мнимую квадратурную составляющую входного сигнала, описывается линейным разностным уравнением

#### 4. Линейные цифровые элементарные ячейки

второго порядка, которое получается из (4.2), если положить  $N=2$ ,  $\hat{a}_0=1$ ,

$$\hat{a}_1 = \beta_1 = 2r_p \cos \varphi_p, \quad \hat{a}_2 = \beta_2 = -r_p^2, \quad M=2, \quad \hat{b}_0=1, \quad \hat{b}_1 = -\alpha_1 = -2r_0 \cos \varphi_0; \\ \hat{b}_2 = -\alpha_2 = r_0^2. \quad \text{Тогда будем иметь}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_n &= \dot{y}_n + j\dot{y}_n = \dot{x}_n - \alpha_1 \dot{x}_{n-1} - \alpha_2 \dot{x}_{n-2} - \beta_1 \dot{y}_{n-1} - \beta_2 \dot{y}_{n-2} = \\ &= \dot{x}_n - 2r_0 \cos \varphi_0 \dot{x}_{n-1} + r_0^2 \dot{x}_{n-2} - 2r_p \cos \varphi_p \dot{y}_{n-1} + r_p^2 \dot{y}_{n-2} = \\ &= (\dot{x}_n + j\dot{x}_n) - \alpha_1 (\dot{x}_{n-1} + j\dot{x}_{n-1}) - \alpha_2 (\dot{x}_{n-2} + j\dot{x}_{n-2}) - \\ &\quad - \beta_1 (\dot{y}_{n-1} + j\dot{y}_{n-1}) - \beta_2 (\dot{y}_{n-2} + j\dot{y}_{n-2}) = \\ &= \dot{x}_n - 2r_0 \cos \varphi_0 \dot{x}_{n-1} + r_0^2 \dot{x}_{n-2} - 2r_p \cos \varphi_p \dot{y}_{n-1} + r_p^2 \dot{y}_{n-2} + \\ &\quad + j(\dot{x}_n - 2r_0 \cos \varphi_0 \dot{x}_{n-1} + r_0^2 \dot{x}_{n-2} - 2r_p \cos \varphi_p \dot{y}_{n-1} + r_p^2 \dot{y}_{n-2}). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Структурная схема биквадратной ячейки первого вида, обрабатывающей квадратурные составляющие, имеет вид, изображенный на рис. 4.23.

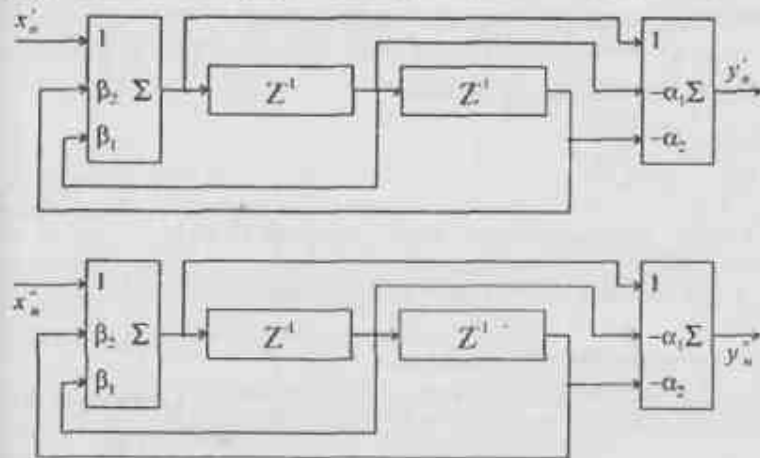


Рис. 4.23. Структурная схема биквадратной тангенсной ячейки

Видно, что алгоритмы и структуры, описывающие обработку во временной области квадратурных составляющих входного сигнала, одинаковы как для действительной составляющей, так и для мнимой, независимы друг от друга и соответствуют выражению (4.8). Поэтому в дальнейшем характеристики биквадратной ячейки будут определяться только для одного из каналов обработки, если не будет оговариваться особо, т.е.  $y_{n-m} = y_{n-m}$  и  $\dot{x}_{n-m} = x_{n-m}$ .

Передающая функция биквадратной ячейки на  $Z$ -плоскости, если положить в (4.3)  $M=2$ ,  $\hat{b}_0=1$ ,  $\hat{b}_1=-\alpha_1=-2r_0 \cos \varphi_0$ ,  $\hat{b}=-\alpha_2=r_0^2$ ,  $N=2$ ,  $\hat{a}_1=-\beta_1=-2r_p \cos \varphi_p$ ,  $\hat{a}_2=-\beta_2=r_p^2$  или в (4.4)  $M=2$ ,  $\hat{b}_0=1$ ,  $\hat{z}_{01}=r_0 e^{j\varphi_0}$ ,  $\hat{z}_{02}=r_0 e^{-j\varphi_0}$ ,  $N=2$ ,  $\hat{z}_{p1}=r_p e^{j\varphi_p}$ ,  $\hat{z}_{p2}=r_p e^{-j\varphi_p}$ , примет вид

$$H(z) = \frac{1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2}}{1 - \beta_1 z^{-1} - \beta_2 z^{-2}} = \frac{(1 - \hat{z}_{01} z^{-1})(1 - \hat{z}_{02} z^{-1})}{(1 - \hat{z}_{p1} z^{-1})(1 - \hat{z}_{p2} z^{-1})} = \frac{1 - 2r_0 \cos \varphi_0 z^{-1} + r_0^2 z^{-2}}{1 - 2r_p \cos \varphi_p z^{-1} + r_p^2 z^{-2}} = \frac{z^2 - 2r_0 \cos \varphi_0 z + r_0^2}{z^2 - 2r_p \cos \varphi_p z + r_p^2} \quad (4.44)$$

Подставляя в (4.44) величину  $z^{-1} = \exp(-j\omega T)$  и разрешая относительно независимой переменной  $\omega T$ , получим АЧХ в виде

$$H(\omega T) = \sqrt{\frac{[1 + r_0^2 - 2r_0 \cos(\omega T - \varphi_0)][1 + r_0^2 - 2r_0 \cos(\omega T + \varphi_0)]}{[1 + r_p^2 - 2r_p \cos(\omega T - \varphi_p)][1 + r_p^2 - 2r_p \cos(\omega T + \varphi_p)]}} \quad (4.45)$$

В нормированном виде АЧХ будет

$$\frac{H(\omega T)}{H_{\max}} = \frac{(1 - r_p)^2}{(1 + r_0)^2} \times \sqrt{\frac{[1 + r_0^2 - 2r_0 \cos(\omega T - \varphi_0)][1 + r_0^2 - 2r_0 \cos(\omega T + \varphi_0)]}{[1 + r_p^2 - 2r_p \cos(\omega T - \varphi_p)][1 + r_p^2 - 2r_p \cos(\omega T + \varphi_p)]}} \quad (4.46)$$

Фазочастотная характеристика имеет вид

$$\Phi(\omega T) = -\operatorname{arctg} \frac{r_p \sin(\omega T - \varphi_p)}{1 - r_p \cos(\omega T - \varphi_p)} - \operatorname{arctg} \frac{r_p \sin(\omega T + \varphi_p)}{1 - r_p \cos(\omega T + \varphi_p)} - \operatorname{arctg} \frac{r_0 \sin(\omega T - \varphi_0)}{1 - r_0 \cos(\omega T - \varphi_0)} - \operatorname{arctg} \frac{r_0 \sin(\omega T + \varphi_0)}{1 - r_0 \cos(\omega T + \varphi_0)} \quad (4.47)$$

Биквадратная тангенсная ячейка, как и тангенсная ЦКЯ, может быть представлена в виде каскадного соединения биквадратной синусной ячейки и биквадратной КИХ-ячейки.

4.5.3. Биквадратная синусная ячейка во временной области описывается разностным уравнением (4.2) при  $N=2$ ,  $\hat{a}_0=1$ ,  $\hat{a}_1=-\beta_1=-2r_p \cos \varphi_p$ ,  $\hat{a}_2=-\beta_2=r_p^2$ ,  $M=0$ ,  $\hat{b}_0=1$ , которое принимает вид

$$y_n = x_n - \beta_1 y_{n-1} - \beta_2 y_{n-2} = x_n - 2r_p \cos \varphi_p y_{n-1} + r_p^2 y_{n-2} \quad (4.48)$$

Полагая в (4.3)  $M=0$ ,  $\hat{b}_0=1$ ,  $N=2$ ,  $\hat{a}_1=-\beta_1=-2r_p \cos \varphi_p$ ,  $\hat{a}_2=-\beta_2=r_p^2$  и в выражении (4.4)  $M=1$ ,  $\hat{b}_0=1$ ,  $\hat{z}_{01}=0$ ,  $N=2$ ,  $\hat{z}_{p1}=r_p e^{j\varphi_p}$ ,  $\hat{z}_{p2}=r_p e^{-j\varphi_p}$  передающую функцию на  $Z$ -плоскости можно записать в виде

$$H(z) = \frac{1}{(1 - r_p e^{j\varphi_p} z^{-1})(1 - r_p e^{-j\varphi_p} z^{-1})} = \frac{1}{1 - \beta_1 z^{-1} - \beta_2 z^{-2}} = \frac{1}{1 - 2r_p \cos \varphi_p z^{-1} + r_p^2 z^{-2}} \quad (4.49)$$

Структурная схема биквадратной синусной ячейки изображена на рис. 4.24.

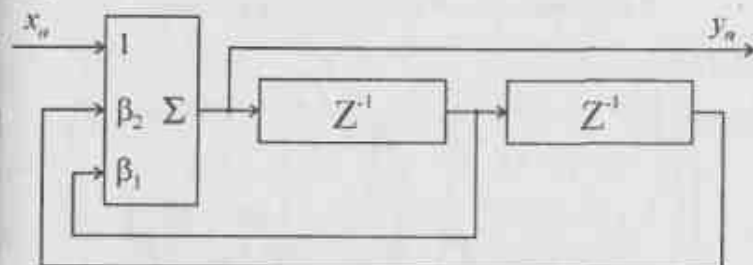


Рис. 4.24. Структурная схема биквадратной синусной ячейки

АЧХ биквадратной синусной ячейки имеет вид

$$H(\omega T) = \frac{1}{\sqrt{[1 + r_p^2 - 2r_p \cos(\omega T - \varphi_p)][1 + r_p^2 - 2r_p \cos(\omega T + \varphi_p)]}} \quad (4.50)$$

Нормированная АЧХ этой ячейки

$$\frac{H(\omega T)}{H_{\max}} = \frac{(1 - r_p)^2}{\sqrt{[1 + r_p^2 - 2r_p \cos(\omega T - \varphi_p)][1 + r_p^2 - 2r_p \cos(\omega T + \varphi_p)]}} \quad (4.51)$$

Фазочастотная характеристика записывается следующим образом

$$\Phi(\omega T) = -\operatorname{arctg} \frac{r_p \sin(\omega T - \varphi_p)}{1 - r_p \cos(\omega T - \varphi_p)} - \operatorname{arctg} \frac{r_p \sin(\omega T + \varphi_p)}{1 - r_p \cos(\omega T + \varphi_p)} \quad (4.52)$$

Формы АЧХ биквадратной синусной ячейки при разных величинах  $r_p$  и  $\varphi_p$  изображены на рис. 4.25 и рис. 4.26 соответственно.

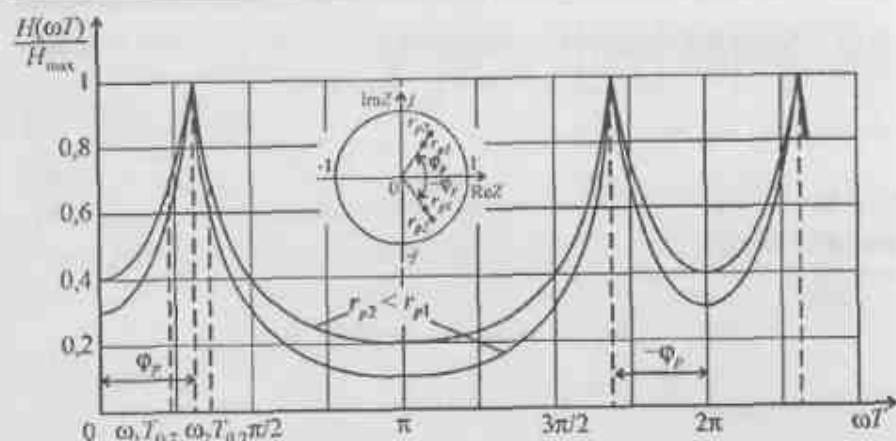


Рис. 4.25. Виды АЧХ биквадратной синусоидальной ячейки в зависимости от величины  $r_p$  при  $\varphi_p = \text{const}$

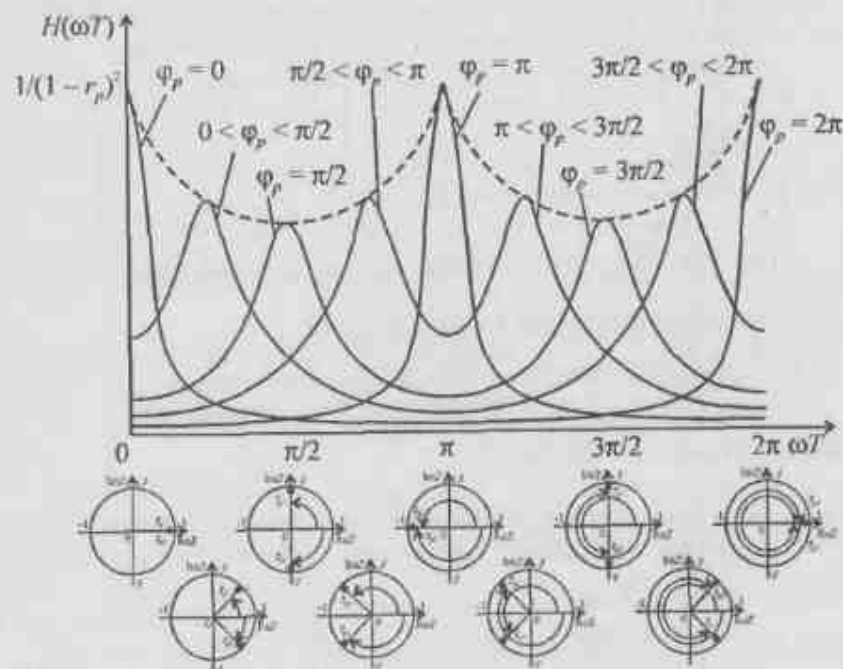


Рис. 4.26. Виды АЧХ биквадратной синусоидальной ячейки в зависимости от величины  $\varphi_p$  при  $r_p = \text{const}$

Анализ выражения (4.50) и рис. 4.26 показывает, что изменение величин  $\varphi_p$  при  $r_p = \text{const}$  приводит к изменению максимального значения  $H(\omega T)$  (штриховая линия соединяет точки максимумов) и изменению ширины полосы пропускания АЧХ на обусловленном заранее уровне [39, 48–50].

Следовательно, для получения одинаковых полос пропускания для различных значений  $\varphi_p$  необходимо изменять величину  $r_p$  [50].

Поскольку АЧХ рассматриваемой ячейки является функцией симметричной, следовательно, ее поведение можно рассматривать в диапазоне нормированных частот  $\omega T \in [0, \pi]$ .

Определим взаимосвязь величин  $\varphi_p$  и  $r_p$ , при которых полоса пропускания остается величиной постоянной на уровне

$$\frac{H(\omega T)}{H_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

где  $\varepsilon$  – заранее заданный уровень.

Подставляя последнее уравнение в (4.51), найдем граничные частоты, которым соответствует величина  $\varepsilon$

$$\cos \omega_1 T_{\varepsilon} = \frac{(1 + r_p^2) \cos \varphi_p + \varepsilon(1 - r_p) \sin \varphi_p}{2r_p}$$

$$\cos \omega_2 T_{\varepsilon} = \frac{(1 + r_p^2) \cos \varphi_p - \varepsilon(1 - r_p) \sin \varphi_p}{2r_p}$$

Обычно величина  $\varepsilon = 1$  и граничные точки на оси частот, которые показаны на рис. 4.25, определяются из выражений

$$\cos \omega_1 T_{0,7} = \frac{(1 + r_p^2) \cos \varphi_p + (1 - r_p) \sin \varphi_p}{2r_p}; \quad (4.53)$$

$$\cos \omega_2 T_{0,7} = \frac{(1 + r_p^2) \cos \varphi_p - (1 - r_p) \sin \varphi_p}{2r_p}. \quad (4.54)$$

Решая совместно уравнения (4.53) и (4.54), получаем следующие выражения для определения величины  $r_p$

$$r_p = \frac{\cos \omega_1 T_{0,7} - \sqrt{\cos^2 \omega_1 T_{0,7} - \cos^2 \varphi_p + \sin^2 \varphi_p}}{\cos \varphi_p - \sin \varphi_p}$$

при  $0 < \varphi_p < \pi/4$  и  $3\pi/4 \leq \varphi_p < \pi$ ;

$$r_p = \frac{\cos \omega_2 T_{0,7} + \sqrt{\cos^2 \omega_2 T_{0,7} - \cos^2 \varphi_p + \sin^2 \varphi_p}}{\cos \varphi_p + \sin \varphi_p}$$

при  $\pi/4 \leq \varphi_p < 3\pi/4$ .

На рис. 4.27 изображены траектории полюсов передаточной функции биквадратной синусной ячейки на  $Z$ -плоскости в первом квадранте, обеспечивающих постоянство полосы пропускания на уровне 0,707. Штриховая кривая показывает положение полюсов на  $Z$ -плоскости биквадратной синусной ячейки при котором уровень «седловины» между двумя максимумами АЧХ равен величине 0,707 от максимального значения при различных значениях  $\varphi_p$  [48]. Отметим, что при этом сохраняется несимметричность формы АЧХ в полосе пропускания относительно точки ее максимума.

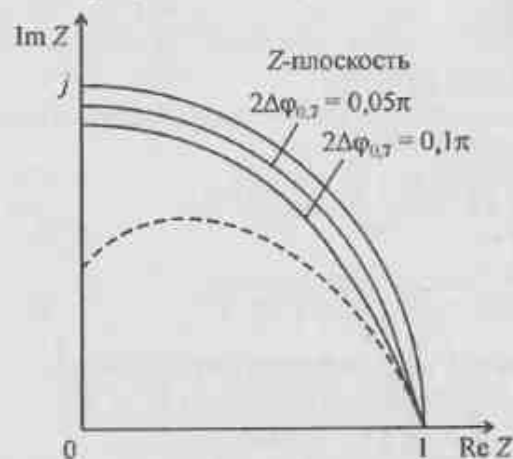


Рис. 4.27. Траектории полюсов передаточной функции биквадратной синусной ячейки с постоянной полосой пропускания по диапазону

4.5.4. Получение биквадратной ячейки необходимого наименования может быть осуществлено также путем преобразования соответствующей ЦКЯ. В частности, получение биквадратной синусной ячейки может быть получено из синусной ЦКЯ путем приравнивания в ней коэффициента передачи одного из входов нулю и не использования одного из выходов.

Покажем это.

Пусть вход  $\text{Im } \dot{x}_n = 0$ , используется только выход  $\text{Re } \dot{y}_n$  и обозначим  $\beta_3 = r_p \cos \varphi_p$ ,  $\beta_4 = r_p \sin \varphi_p$ ,  $\beta_6 = r_p \cos \varphi_p$ ,  $\beta_7 = r_p \sin \varphi_p$  на одноименных входах сумматоров реального и мнимого каналов. Тогда структурная схема будет иметь вид, изображенный на рис. 4.28.

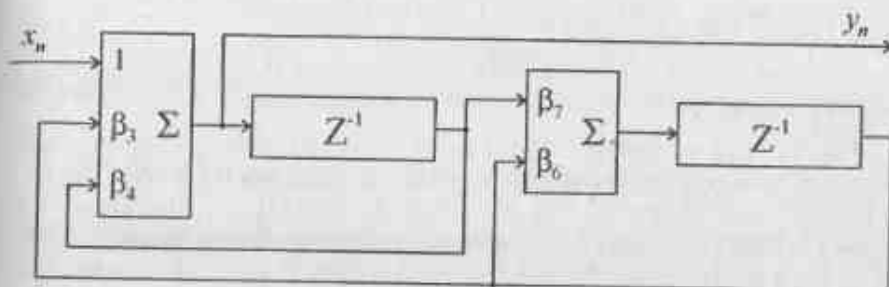


Рис. 4.28. Структурная схема преобразованной ЦКЯ

Как показано в [39], такая схема называется канонической схемой второго порядка второго вида с дополнительной отрицательной обратной связью. Приравнивая  $\beta_7 = 1$ , получаем передаточную функцию данной структурной схемы в виде

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - (\beta_3 + \beta_6)z + (\beta_3\beta_6 - \beta_4)}$$

Полагая  $\beta_3 = \beta_6 = \beta$ ,  $\beta_4 = -\gamma$ , где  $\gamma > 0$ , получаем последнее выражение в виде

$$H(z) = \frac{z^2}{(z - \beta)^2 + \gamma} = \frac{z^2}{(z - z_{p1})(z - z_{p2})}$$

Тогда нетрудно получить значения полюсов в виде

$$z_{p1,2} = \beta \pm j\sqrt{\gamma} = \sqrt{\beta^2 + \gamma} \exp \left\{ \pm j \arccos \left[ \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \gamma}} \right] \right\} = r_p \exp(\pm j\varphi_p)$$

В том случае, если в структурной схеме на рис. 4.28 положить  $\beta_6 = 0$ , приходим к структурной схеме биквадратной синусной ячейки, которая изображена на рис. 4.17.

4.5.5. Рассмотрим биквадратную КИХ-ячейку. Данная ячейка во временной области описывается линейным разностным уравнением второго порядка, которое получается из (4.2), если положить  $N=2$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $M=2$ ,  $\dot{b}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_1 = -\alpha_1 = -2r_0 \cos \varphi_0$ ,  $\dot{b}_2 = -\alpha_2 = r_0^2$ . Тогда будем иметь

$$y_n = x_n - \alpha_1 x_{n-1} - \alpha_2 x_{n-2} = x_n - 2r_0 \cos \varphi_0 x_{n-1} + r_0^2 x_{n-2}. \quad (4.55)$$

Полагая в (4.3)  $M=2$ ,  $\dot{b}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_1 = -\alpha_1 = -2r_0 \cos \varphi_0$ ,  $\dot{b}_2 = -\alpha_2 = r_0^2$ ,  $N=1$ ,  $\dot{a}_1 = 0$  или в (4.4)  $M=2$ ,  $\dot{b}_0 = 1$ ,  $\dot{z}_{01} = r_0 e^{j\varphi_0}$ ,  $\dot{z}_{02} = r_0 e^{-j\varphi_0}$ ,  $N=1$ ,  $\dot{z}_{p1} = 0$ , передаточную функцию на  $Z$ -плоскости запишем в виде

$$H(z) = (1 - z_{01}z^{-1})(1 - z_{02}z^{-1}) = (1 - r_0 e^{j\varphi_0} z^{-1})(1 - r_0 e^{-j\varphi_0} z^{-1}) = 1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2} = 1 - 2r_0 \cos \varphi_0 z^{-1} + r_0^2 z^{-2} \quad (4.56)$$

Структурная схема биквадратной КИХ-ячейки первого вида изображена на рис. 4.29.

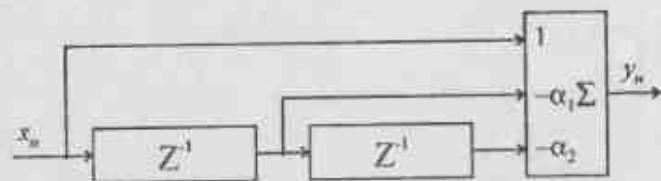


Рис. 4.29. Структурная схема биквадратной КИХ-ячейки первого вида

АЧХ рассматриваемой КИХ-ячейки описывается выражением

$$H(\omega T) = \sqrt{1 + r_0^2 - 2r_0 \cos(\omega T - \varphi_0)} \sqrt{1 + r_0^2 - 2r_0 \cos(\omega T + \varphi_0)} \quad (4.57)$$

Нормированная АЧХ будет

$$\frac{H(\omega T)}{H_{\max}} = \frac{\sqrt{1 + r_0^2 - 2r_0 \cos(\omega T - \varphi_0)} \sqrt{1 + r_0^2 - 2r_0 \cos(\omega T + \varphi_0)}}{(1 + r_0^2)} \quad (4.58)$$

Фазочастотная характеристика имеет вид

$$\Phi(\omega T) = -\arctg \frac{r_0 \sin(\omega T - \varphi_0)}{1 - r_0 \cos(\omega T - \varphi_0)} - \arctg \frac{r_0 \sin(\omega T + \varphi_0)}{1 - r_0 \cos(\omega T + \varphi_0)}$$

На практике наиболее часто биквадратные КИХ-ячейки используются при значениях  $r_0 = 1$ .

На рис. 4.30 изображены различные виды АЧХ биквадратной КИХ-ячейки при различных значениях  $\varphi_0$ . Видно, что и как для биквадратной синусной ячейки, форма и максимальные значения ее АЧХ зависят от величины  $\varphi_0$  при  $r_0 = \text{const}$ , в частности, при  $r_0 = 1$ . Диапазон однозначности АЧХ КИХ-ячейки по оси частот равен  $\omega T \in [0, \pi]$ .

4.5.6. Рассмотрим биквадратную ячейку, реализующую алгоритм Герцеля, описываемого в соответствии с выражением (4.9). Положим, в (4.2)  $N = 2$ ,  $\hat{\alpha}_0 = 1$ ,  $\hat{\alpha}_1 = \beta_1 = 2r_p \cos \varphi_p$ ,  $\hat{\alpha}_2 = \beta_2 = -r_p^2$ ,  $M = 1$ ,  $\hat{h}_0 = 1$ ,  $\hat{h}_1 = -z_{01} = -r_0 e^{-j\varphi_0} = -r_0 \cos \varphi_0 + j \sin \varphi_0$ ,  $\hat{y}_n = \hat{y}_n + j \hat{y}_n'$ ,  $\hat{x}_n = x_n$ . Тогда описание работы ячейки во временной области будет

$$\begin{aligned} \hat{y}_n &= \hat{y}_n + j \hat{y}_n' = x_n - z_{01} x_{n-1} - \beta_1 y_{n-1} - \beta_2 y_{n-2} = \\ &= x_n - r_0 \cos \varphi_0 x_{n-1} - 2r_p \cos \varphi_p y_{n-1} + r_p^2 y_{n-2} + j r_0 \sin \varphi_0 x_{n-1} \end{aligned}$$

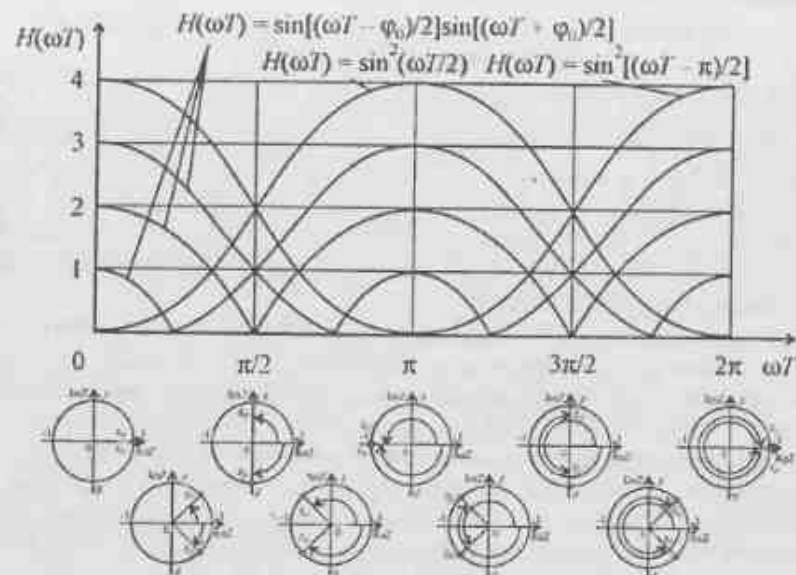


Рис. 4.30. Виды АЧХ биквадратной КИХ-ячейки в зависимости от величины  $\varphi_0$  при  $r_0 = 1$

Передаточная функция на  $Z$ -плоскости если положить в (4.3)  $M = 1$ ,  $\hat{h}_0 = 1$ ,  $\hat{h}_1 = -z_0 = -r_0 e^{j\varphi_0} = -r_0 \cos \varphi_0 + j r_0 \sin \varphi_0$ ,  $N = 2$ ,  $\hat{\alpha}_1 = -\beta_1 = -2r_p \cos \varphi_p$ ,  $\hat{\alpha}_2 = -\beta_2 = r_p^2$  примет вид

$$H(z) = \frac{1 - z_0 z^{-1}}{1 - \beta_1 z^{-1} - \beta_2 z^{-2}} = \frac{1 - r_0 \cos \varphi_0 z^{-1} + j r_0 \sin \varphi_0 z^{-1}}{1 - 2r_p \cos \varphi_p z^{-1} + r_p^2 z^{-2}}$$

Структурная схема биквадратной ячейки, реализующей алгоритм Герцеля и находящей ограниченное применение, изображена на рис. 4.31.

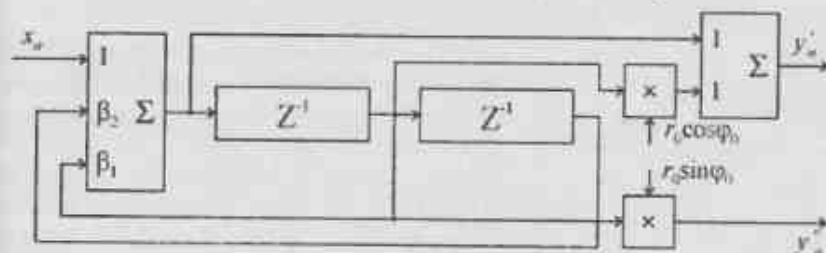


Рис. 4.31. Структурная схема биквадратной ячейки, реализующей алгоритм Герцеля

4.6. Связь частоты дискретизации со свойствами сигналов и видами цифровых линейных систем

Как было показано в главе 2, выбор частоты дискретизации квадратурных составляющих входного сигнала должен осуществляться из условий выполнения теоремы Котельникова. В тоже время, учет свойств обрабатываемых сигналов и возможностей, присущих той или иной конфигурации цифровой линейной системы, позволяет оптимизировать величину частоты дискретизации. Следовательно, рассмотрение особенностей дискретизации тех или иных видов сигналов, является актуальным при реализации соответствующих линейных систем.

Анализ видов обрабатываемых сигналов показал, что радиосигналы могут быть представлены либо в виде квадратурных составляющих комплексного сигнала, либо в виде квадратурных составляющих действительного сигнала. Отличительной особенностью комплексных (аналитических) сигналов является отсутствие спектральных составляющих в области отрицательных частот. Подобные сигналы могут быть обработаны либо при помощи цифровой линейной цепи с комплексными коэффициентами, либо с действительными. Спектр комплексного (аналитического) сигнала может быть представлен в виде, изображенном на рис. 4.32.



Рис. 4.32. Пример расположения дискретизированного спектра комплексного (аналитического) сигнала и АЧХ цифровой комплексной синусной ячейки

С другой стороны, АЧХ цифровой комплексной синусной ячейки, изображенной на рис. 4.6 и рис. 4.17, описываемой выражением (4.33), имеет вид, изображенный на рис. 4.7, и в виде штриховой линии на рис. 4.32. Анализ рис. 4.32 показывает, что в случае обработки комплексного сигнала при помощи комплексной цифровой линейной системы однозначность сохраняется в пределах  $[0 - 2\pi]$ . Поскольку дискретизация сигнала, представленного в виде квадратурных составляющих, ведется в обоих каналах одновременно, то частота дискретизации может в пределе выбираться равной мак-

4. Линейные цифровые элементарные ячейки

симальной частоте спектра сигнала, т.е.  $F_{\Delta} = F_{\max}$  в каждом канале, как показано на рис. 2.4 и на рис. 4.32.

В том случае, когда обработка комплексного сигнала ведется при помощи цифровых линейных цепей второго порядка (биквадратных ячеек), структурная схема одной из которых изображена на рис. 4.24, то для выполнения условия однозначности по частоте между спектральной плотностью и АЧХ такой цепи необходимо выбирать частоту дискретизации в каждом квадратурном канале  $F_{\Delta} = 2F_{\max}$ , как показано на рис. 4.33, причем АЧХ биквадратной синусной ячейки изображена штриховой линией. Однозначность в этом случае сохраняется в диапазоне  $[0 - \pi]$ .



Рис. 4.33. Пример расположения дискретизированного спектра комплексного (аналитического) сигнала и АЧХ биквадратной синусной ячейки

В том случае, когда входной сигналов в каждом квадратурном канале является действительным, и применяется цифровая линейная система с комплексными коэффициентами, то частота дискретизации должна выбираться из условия  $F_{\Delta} = 2F_{\max}$ . Диапазон однозначности по частоте устройства обработки составляет  $[0 - 2\pi]$ , а действительный сигнал имеет спектральные составляющие в диапазонах  $[-\pi - 0]$  и  $[0 - \pi]$ . Вследствие периодического характера спектральных плотностей из-за эффекта дискретизации, обработка может производиться в диапазоне  $[0 - \pi]$ , как показано на рис. 4.34, причем АЧХ комплексной синусной ячейки изображена пунктиром.

Отметим, что поскольку в этом случае положительные и отрицательные составляющие спектральной плотности действительного сигнала одинаковы, то можно применять линейные системы на основе биквадратных ячеек в двух квадратурных каналах. В этом случае частота дискретизации выбирается из условия  $F_{\Delta} = 2F_{\max}$ , а диапазон однозначности равен  $[0 - \pi]$ , как показано на рис. 4.35, причем АЧХ биквадратной синусной ячейки изображена пунктиром.



Рис. 4.34. Пример расположения дискретизированного спектра действительного сигнала и АЧХ комплексной синусной ячейки



Рис. 4.35. Пример расположения дискретизированного спектра действительного сигнала и АЧХ биквадратной синусной ячейки

Таким образом, проведенный анализ по выбору частоты дискретизации показал зависимость ее величины от вида обрабатываемого сигнала и вида используемых цифровых линейных систем. При этом осуществляется обработка квадратурных составляющих обрабатываемого сигнала, что исключает неопределенность, связанную с незнанием его начальной фазы.

В табл. 4.1 показана связь частоты дискретизации с параметрами обрабатываемого сигнала и цифровых линейных систем.

Отметим, что в качестве примера комплексного (аналитического) сигнала может быть приведен связной сигнал однополосной модуляции (ОБП-АМ). Другим примером является радиолокационный сигнал, кото-

рый имеет доплеровское смещение с известным априори направлением этого смещения [37, 51]. В этом случае диапазон однозначности равен  $[0 \div 2\pi]$  ( $[-\pi \div \pi]$ ).

Таблица 4.1

Связь частоты дискретизации с параметрами сигнала и устройства обработки

Вид используемого входного сигнала / Вид используемой линейной системы	Комплексный (аналитический) сигнал	Действительный сигнал
С комплексными коэффициентами	Частота дискретизации $F_d = F_{\max}$ Диапазон однозначности $[-\pi \div \pi]$ ( $[0 \div 2\pi]$ )	Частота дискретизации $F_d = 2F_{\max}$ Диапазон однозначности $[-\pi/2 \div \pi/2]$ ( $[0 \div \pi]$ )
С действительными коэффициентами	Частота дискретизации $F_d = 2F_{\max}$ Диапазон однозначности $[-\pi/2 \div \pi/2]$ ( $[0 \div \pi]$ )	Частота дискретизации $F_d = 2F_{\max}$ Диапазон однозначности $[-\pi/2 \div \pi/2]$ ( $[0 \div \pi]$ )

Следует сказать, что полученные частоты дискретизации имеют предельный характер. В реальности получить такие величины нельзя, так как при преобразовании аналогового сигнала в цифровой используются фильтрующие цепи, импульсные характеристики которых далеки от вида функции  $D = \text{sinc}(x) = \sin x / x$  ( $-\infty < x < \infty$ ), которые использовались при выводе теоремы Котельникова [13].

Отличие реальных фильтрующих цепей от идеальных, а также учет того, что обрабатываемая реализация всегда имеет начало и конец (а, следовательно, ее спектральная плотность теоретически занимает всю полосу частот), приводит к тому, что частоту дискретизации увеличивают относительно получаемой из условия выполнения теоремы Котельникова в 2-5 раз и более в каждом квадратурном канале. Это приводит к более жестким требованиям к устройствам УВХ АЦП и быстродействию используемых цифровых функциональных узлов вычислителя.

Поэтому рациональный выбор частоты дискретизации для получения максимально возможного диапазона однозначности обрабатываемых частот позволяет понизить требования к узлам устройства обработки.



## 4.7. Выводы

Рассмотренные в данной главе цифровые элементарные ячейки являются основными узлами, обеспечивающими получение тех или иных передаточных функций или импульсных характеристик. Проведенный анализ показал, что наиболее эффективная реализация заданных частотно-избирательных свойств линейных цифровых систем по критерию минимума вычислительных затрат достигается при каскадном соединении тех или других видов элементарных ячеек.

Рассмотрены различные виды элементарных ячеек. Представленные результаты показали, что рекурсивные ЦКЯ (синусные) являются цифровыми аналогами интегрирующих аналоговых RC-цепей (при  $\varphi_p = 0$ ) или колебательных систем в виде параллельного колебательного контура (при  $\varphi_p \neq 0$ ). В свою очередь, нерекурсивные КИХ-ячейки могут рассматриваться как цифровые аналоги дифференцирующих аналоговых RC-цепей (при  $\varphi_0 = 0, r_0 = 1$ ) или колебательных систем в виде последовательного колебательного контура (при  $\varphi_0 \neq 0, r_0 = 1$ ).

Видно, что рассмотренные алгоритмы, описывающие работу ЦКЯ, осуществляют соответствующим образом поворот вектора, описывающего отсчет входного сигнала, на требуемый угол  $\varphi_p$  или  $\varphi_0$  и тем самым осуществляется компенсация вращения вектора входного сигнала таким образом, чтобы обеспечить либо процесс его накопления, либо подавления. При этом осуществляется «внутри» ЦКЯ компенсация вращения декартовых координат  $\text{Re } x$  и  $\text{Im } x$ , изображенных на рис. 2.1,а таким образом, что можно рассматривать указанные процедуры или накопления или подавления входного сигнала в одной точке частотной оси, т.е. при  $\Omega_p = 0$ . Следовательно, всю обработку можно рассматривать в декартовых координатах  $\text{Re } x$  и  $\text{Im } x$ , как показано на рис. 2.1,б.

Также видно, что АЧХ всех рассмотренных ЦКЯ в диапазоне частот  $\omega T \in [0, 2\pi]$  имеют только один нуль и/или полюс.

По сравнению с рассмотренными ЦКЯ всех видов, предназначенными для обработки комплексных (аналитических) сигналов и имеющих симметричные АЧХ относительно центральной частоты настройки, биквадратные ячейки имеют неодинаковый коэффициент передачи на центральной частоте при перестройке по частотному диапазону, а также изменяющуюся полосу пропускания на обусловленном уровне.

Данные недостатки, а также сложность организации пересчета коэффициентов при реализации на биквадратных ячейках адаптивных алгоритмов, позволяет сделать вывод о более высокой эффективности ЦКЯ для обработки комплексных сигналов.

В то же время, построение ПФ или РФ для обработки действительных сигналов можно осуществлять только с использованием биквадратных ячеек, несмотря на их недостатки.

В некоторых случаях используют биквадратные ячейки и при обработке сигналов, представимых в виде квадратурных компонент. Однако такое техническое решение сопряжено с большими затратами оборудования, с проигрышами в частотах дискретизации и в полосах обрабатываемых частот по сравнению с применением ЦКЯ для решения аналогичных задач.

Следовательно, рациональный выбор частоты дискретизации с учетом видов используемых линейных цепей позволяет получать максимально возможный диапазон однозначности обрабатываемых частот и понизить требования к быстродействию узлов устройств обработки.

## 5. РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ ОБРАБОТКИ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЯЧЕЙКАХ

### 5.1. Вводные замечания

Как было показано в [15], при построении цифровых устройств обработки сигналов важнейшей задачей является обеспечение такой производительности, чтобы можно было обеспечить требуемую полосу обрабатываемых частот. Условно все вычислители можно разделить по производительности на следующие группы.

Вычислители, производительность которых намного превышает темп поступления информации. В этом случае вычислитель может обрабатывать информацию от нескольких источников данных, либо осуществлять несколько режимов обработки входного процесса. Подобный режим работы носит название режима обработки с разделением времени.

Вычислители, производительность узлов которых близка или равна темпу поступающей информации. При этом один вычислитель может обрабатывать только один процесс и осуществлять операции, свойственные только одному режиму обработки.

Вычислители, производительность узлов которых ниже темпа поступления информации и которые позволяют организовать требуемый вид обработки только за счет организации распараллеленной обработки информации.

Под *распараллеливанием* будем понимать одновременную обработку по  $m$  отсчетам непрерывно поступающих на вход данных, которые могут параллельно обрабатываться в  $k$  параллельно работающих устройствах обработки, в каждом из которых реализуется свой алгоритм обработки. При этом темп поступления информации более высокий, чем быстродействие используемых вычислительных узлов.

Сравнительный анализ показывает, что первый случай может быть реализован при использовании универсальных однопроцессорных ЦВМ, второй случай удовлетворяет условию создания специализированного вычислителя, а последний случай находит удовлетворительное разрешение только тогда, когда используется многопроцессорный вычислитель.

Известные режимы обработки сигналов («скачущее» и «скользящее» окно) не зависят от вида используемого вычислителя, а определяются только алгоритмом обработки.

Рассмотренные элементарные цифровые ячейки, реализующие алгоритм работы «скользящее» окно, позволяют обрабатывать отсчеты, поступающие на вход последовательно друг за другом по мере выполнения операций в узлах ячеек.

Поэтому обработка распараллеленных данных в режиме «скользящее» окно путем непосредственного вычисления дискретного аналога интеграла свертки требует рассмотрения соответствующих алгоритмов и структур.

### 5.2. Распараллеливание входных данных

Рассмотрим подготовку входных данных для распараллеленной подачи на входы устройства. Структурная схема устройства, осуществляющего реализацию распараллеливания входных данных, изображена на рис. 5.1 [12, 52].

Поступающие с выходов быстродействующих АЦП квадратурных каналов многозарядные отсчеты квадратурных составляющих  $x_n$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$  записываются через первый входной коммутатор в первую память, выполненную на быстродействующих регистрах, с частотой дискретизации  $F_\delta$ , определяемую полосой обрабатываемых частот. Количество отсчетов  $m$ , записываемых в память, определяется требуемой степенью распараллеливания, зависящей от соотношения частоты дискретизации и предельной частоты поступления отсчетов информации на вход отдельного цифрового функционального узла.

После записи  $m$  отсчетов в первую память первый входной коммутатор переключается так, что вторая группа из  $m$  отсчетов начинает поступать во вторую память, идентичную первой. Одновременно, все  $m$  отсчетов с  $m$  выходов первой памяти через первый выходной коммутатор поступают на  $m$  входов цифрового многопроцессорного вычислителя. При этом время поступления информации на многопроцессорный вычислитель по каждому входу равно времени записи  $m$  отсчетов во вторую быстродействующую память, т.е. частота поступления отсчетов  $F_T = F_\delta/m$ .

После окончания записи второй группы из  $m$  отсчетов во вторую память, третья группа из  $m$  отсчетов начинает поступать в свободную от информации первую память через первый входной коммутатор с частотой  $F_\delta$ . Вторая группа из  $m$  отсчетов из второй памяти через первый входной коммутатор поступает с частотой  $F_T = F_\delta/m$  по каждому из  $m$  входов на обработку в многопроцессорный вычислитель.

Далее процесс повторяется. Таким образом, на каждом входе многопроцессорного вычислителя появляется отсчет в  $m$  раз реже, чем поступает с выходов АЦП квадратурных каналов. Группы входных отсчетов могут быть представлены в виде

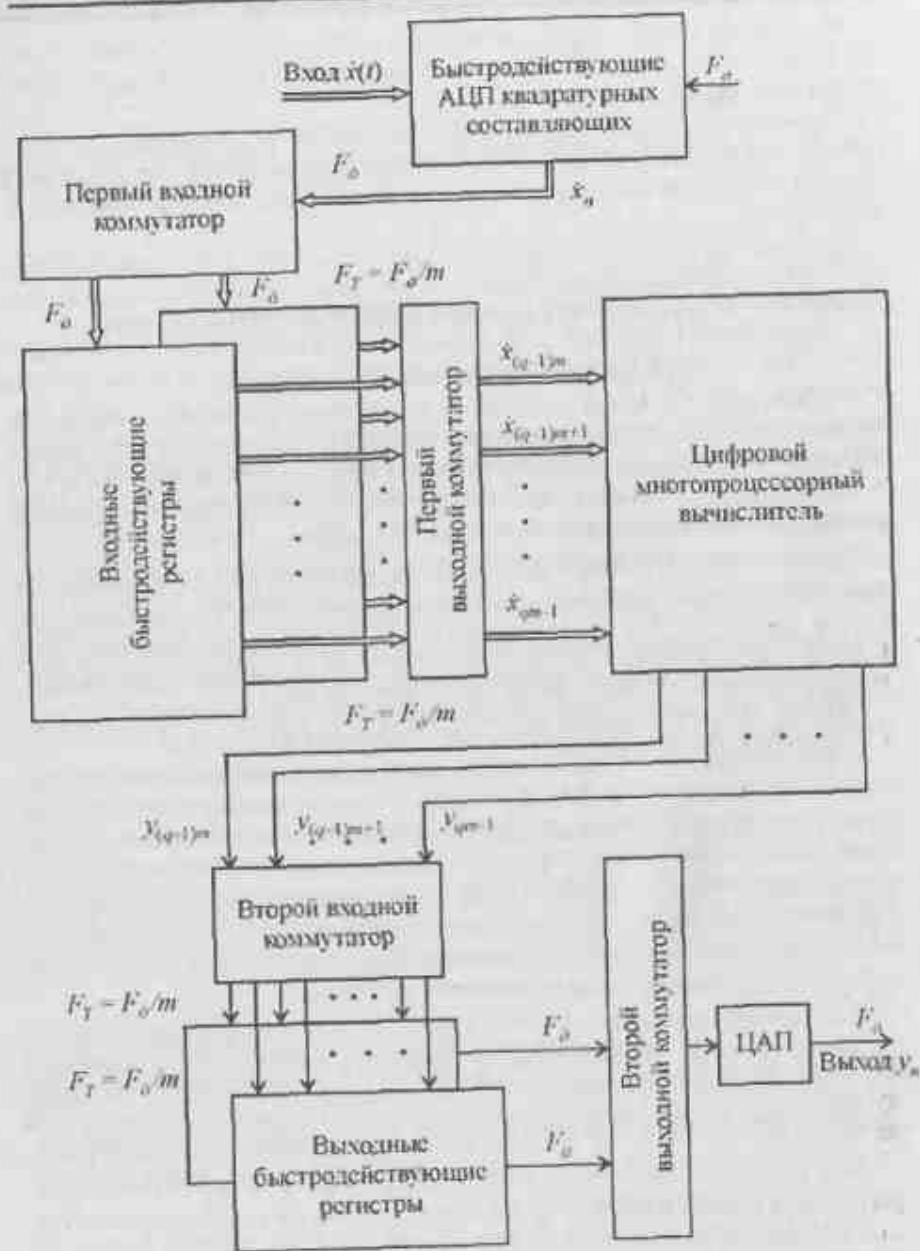


Рис. 5.1. Структурная схема устройства распараллеливания данных

5. Распараллеливание обработки на элементарных ячейках

$$\begin{matrix}
 \hat{x}_0 & \hat{x}_m & \dots & \hat{x}_{(q-1)m} & \dots \\
 \hat{x}_1 & \hat{x}_{m+1} & \dots & \hat{x}_{(q-1)m+1} & \dots \\
 \hat{x}_2 & \hat{x}_{m+2} & \dots & \hat{x}_{(q-1)m+2} & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \hat{x}_{m-1} & \hat{x}_{2m-1} & \dots & \hat{x}_{qm-1} & \dots
 \end{matrix}
 \tag{5.1}$$

Здесь  $q = 1, 2, 3, \dots$  — номер группы распараллеленных отсчетов.

После обработки первая группа  $m$  выходных отсчетов поступит параллельно через второй входной коммутатор на первую выходную быстродействующую память. После окончания записи второй входной коммутатор переключается так, чтобы вторая группа из  $m$  выходных отсчетов поступила параллельно во вторую память. Одновременно отсчеты из первой группы выходных отсчетов через второй выходной коммутатор поступают на ЦАП последовательно друг за другом с частотой  $F_0$  и далее на выход.

После записи второй группы из  $m$  отсчетов во вторую выходную память, второй выходной коммутатор подключается таким образом, что последовательно друг за другом на выход начинают поступать отсчеты из второй группы. Одновременно, в первую выходную память параллельно поступают  $m$  отсчетов третьей группы. Далее процесс повторяется.

Видно, что группы выходных отсчетов представляются на входах второго входного коммутатора в виде

$$\begin{matrix}
 y_0 & y_m & \dots & y_{(q-1)m} & \dots \\
 y_1 & y_{m+1} & \dots & y_{(q-1)m+1} & \dots \\
 y_2 & y_{m+2} & \dots & y_{(q-1)m+2} & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 y_{m-1} & y_{2m-1} & \dots & y_{qm-1} & \dots
 \end{matrix}
 \tag{5.2}$$

Здесь полагаем, что выходные отсчеты представляют собой модульные значения обработанных данных. Очевидно, что в выходные быстродействующие регистры выходные отсчеты поступают параллельно группами с частотой  $F_T = F_0/m$ , а с их выходов — с частотой  $F_0$ , т.е. в  $m$  раз быстрее.

Это и позволяет за счет увеличения затрат оборудования обеспечить обработку процессов, полоса которых превышает быстродействие используемых цифровых функциональных узлов в  $m$  раз.

Уровень информационной связи между группами выходных отсчетов (5.2) определяется организацией вычислительного процесса в многопроцессорном вычислителе над группами входных данных (5.1).

### 5.3. Метод распараллеливания рекурсии для режима работы «скользящее» окно

Анализ работы элементарных цифровых ячеек, проведенный в главе 4, показал, что вычислительный процесс в них организован на основе режима обработки данных «скользящее» окно.

5.3.1. Известно, что широкий класс функций аппроксимируется рядами вида

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^m \dot{x}_i \dot{z}_{0p}^{m-i},$$

которые могут быть представлены в виде схемы (скобок) Горнера [4, 53]

$$\dot{y} = \dot{x}_m + \dot{z}_{0p}(\dot{x}_{m-1} + \dot{z}_{0p}(\dot{x}_{m-2} + \dots + \dot{z}_{0p}(\dot{x}_1 + \dot{z}_{0p}\dot{x}_0)\dots)).$$

Рассматриваемая функция может описывать алгоритм работы как рекурсивной, так и нерекурсивной ячеек. В зависимости от того, что описывает рассматриваемый полином, соответствующим образом используется индекс «0» или «m» в параметре  $\dot{z}_{0p}$ .

Реализация данной схемы включает в себя  $m$  операций перемножения и сложения, которые выполняются последовательно во времени по конвейерной схеме по мере поступления как входных распараллеленных данных  $\dot{x}_i$ , так и операндов  $\dot{z}_{0p}$  в соответствующие моменты времени.

Отметим, что длительность переходного процесса, в зависимости от алгоритма обработки, может как превышать степень параллелизма в заданное число раз, так и быть меньше ее.

Рассмотрим рекуррентный алгоритм и некоторые общие принципы организации обработки групп распараллеленных входных данных в режиме работы вычислителя «скользящее» окно [12, 15, 54–57]. Одним из основных требований при этом является необходимость обеспечения информационных связей между полученными в результате обработки группами выходных данных.

Очевидно, что вычисление модульных значений обработанных квадратных составляющих не скажется на алгоритме, обеспечивающем информационную связь между группами выходных данных. Поэтому для общего случая будем рассматривать алгоритм, обеспечивающий информационную связь между группами комплексных выходных отсчетов.

Будем полагать, что за счет структурной организации вычислительного процесса в многопроцессорном вычислителе, время выполнения каждой операции соответствующим функциональным узлом будет одинаковым.

5.3.2. Для рекурсивного фильтра (элементарной ячейки) число отсчетов импульсной характеристики всегда превышает ширину распараллеленного

### 5. Распараллеливание обработки на элементарных ячейках

алгоритма. При этом решение задачи распараллеливания основано на использовании схемы Горнера и проводится следующим образом.

На первом этапе «раскрывается» алгоритм работы устройства во временной области в виде системы уравнений. В частности, для уравнения линейной рекурсии первого порядка вида  $\dot{y}_n = \dot{x}_n + \dot{z}_p \dot{y}_{n-1}$ , полученного из (4.15), будем иметь для  $m$ -кратного распараллеливания следующую систему состоящую из  $m$  уравнений при условии, что  $\dot{y}_{-1} = \dot{x}_{-1} = 0$ .

$$\dot{y}_0 = \dot{x}_0;$$

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 + \dot{z}_p \dot{x}_0;$$

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_2 + \dot{z}_p(\dot{x}_1 + \dot{z}_p \dot{x}_0) = \dot{x}_2 + \dot{z}_p \dot{x}_1 + \dot{z}_p^2 \dot{x}_0;$$

$$\dots$$

$$\dot{y}_{m-1} = \dot{x}_{m-1} + \dot{z}_p(\dot{x}_{m-2} + \dots + \dot{z}_p(\dot{x}_1 + \dot{z}_p \dot{x}_0)\dots) =$$

$$= \dot{x}_{m-1} + \dot{z}_p \dot{x}_{m-2} + \dots + \dot{z}_p^{m-2} \dot{x}_1 + \dot{z}_p^{m-1} \dot{x}_0.$$

На втором этапе, учитывая, что все входные данные из первой группы использованы, производится построение системы из  $m$  уравнений с входными данными второй группы с добавлением вычисленного в последнем уравнении выходного отсчета из предыдущей группы со своим весовым коэффициентом:

$$\dot{y}_m = \dot{x}_m + \dot{z}_p \dot{y}_{m-1};$$

$$\dot{y}_{m+1} = \dot{x}_{m+1} + \dot{z}_p(\dot{x}_m + \dot{z}_p \dot{y}_{m-1}) = \dot{x}_{m+1} + \dot{z}_p \dot{x}_m + \dot{z}_p^2 \dot{y}_{m-1};$$

$$\dot{y}_{m+2} = \dot{x}_{m+2} + \dot{z}_p(\dot{x}_{m+1} + \dot{z}_p(\dot{x}_m + \dot{z}_p \dot{y}_{m-1})) =$$

$$= \dot{x}_{m+2} + \dot{z}_p \dot{x}_{m+1} + \dot{z}_p^2 \dot{x}_m + \dot{z}_p^3 \dot{y}_{m-1};$$

$$\dots$$

$$\dot{y}_{2m-1} = \dot{x}_{2m-1} + \dot{z}_p(\dot{x}_{2m-2} + \dots + \dot{z}_p(\dot{x}_m + \dot{z}_p \dot{y}_{m-1})) =$$

$$= \dot{x}_{2m-1} + \dot{z}_p \dot{x}_{2m-2} + \dots + \dot{z}_p^{m-1} \dot{x}_m + \dot{z}_p^m \dot{y}_{m-1}.$$

Видно, что результат, полученный из решения каждого уравнения, поступает на вычисление следующего уравнения и одновременно должен быть использован для добавления к нему вычисленного выходного отсчета с соответствующим весовым коэффициентом из предыдущей группы, полученный в результате решения последнего уравнения этой группы. Отметим, что на первом этапе эта информация, как указывалось, была равна нулю.

Следовательно, организована информационная связь между группами выходных данных. Далее процесс повторяется.

Нетрудно видеть, что число уровней для распараллеленной линейной рекурсии будет равно  $2m + 2$ , а «ширина» равна  $m$ .

На третьем этапе, учитывая возможность конвейерной организации вычислений по схеме Горнера, после окончания выполнения операций на каком-либо уровне над кодами очередной группы данных, следует подавать на этот же уровень коды следующей группы данных.

5.3.3. Рассмотрим распараллеленную синусную ЦКЯ [15, 55, 56]. На рис 5.2 изображена структурная схема синусной ЦКЯ с двукратным распараллеливанием.

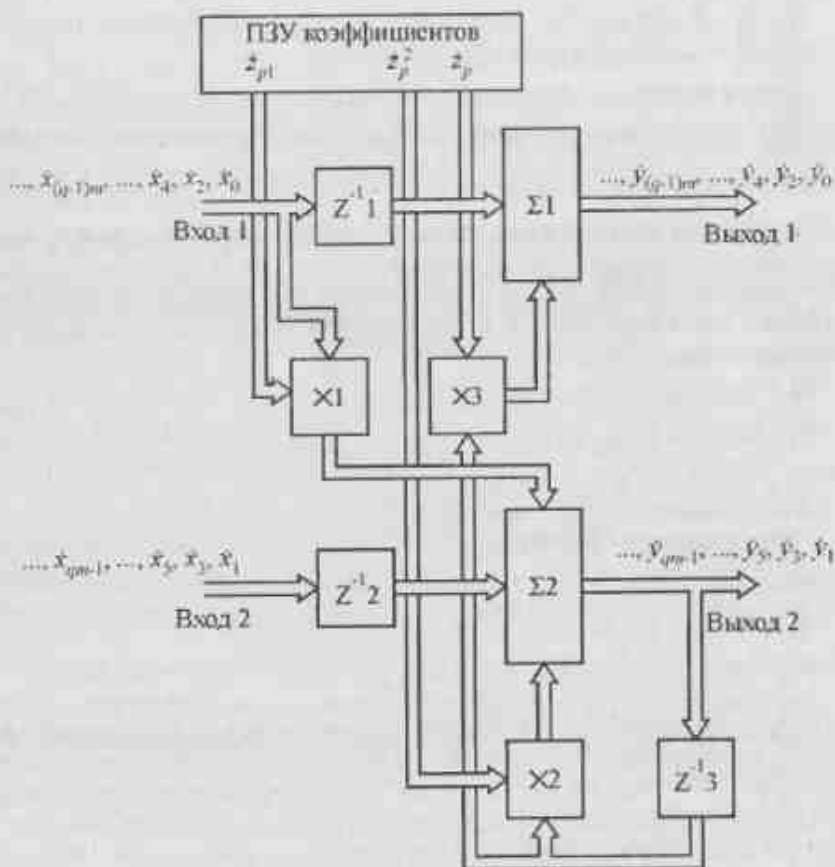


Рис. 5.2. Структурная схема синусной ЦКЯ с двукратным распараллеливанием данных

Работает эта схема следующим образом.

Пусть к моменту времени  $t = 0$  во всех цифровых линиях задержки (ЦЛЗ)  $Z^{-1} 1, 2, 3$ , комплексных чисел записаны нули. В ЦЛЗ  $Z^{-1} 1, 2, 3$  осуществляется задержка на интервал времени равный интервалу  $mT_d$ . Полагаем, что время выполнения операций сложения (в сумматорах комплексных чисел  $\Sigma 1$  и  $\Sigma 2$ ) и перемножения (в перемножителях комплексных чисел – ПКЧ, выполненных в виде блоков  $\times$ ), одинаково и равно  $mT_d$ . Будем также полагать, что подача групп распараллеленных отсчетов осуществляется через интервалы времени  $t = q(mT_d)$ . Без потери общности положим, что  $mT_d = 1$ .

Пусть в момент  $t = 0$  на первый и второй входы устройства поступают коды выборок входной реализации  $\hat{x}_0$  и  $\hat{x}_1$ .

Одновременно из постоянного запоминающего устройства (ПЗУ) на вход ПКЧ1 поступает код числа  $\hat{z}_p = r_p e^{j\varphi_p}$ , а на другом входе этого ПКЧ1 находится код выборки  $\hat{x}_0$ . Одновременно в момент времени  $t = 0$  из ПЗУ на вход ПКЧ2 поступает код числа  $\hat{z}_p^2 = r_p^2 e^{j2\varphi_p}$ , а на его другой вход – число равное нулю с выхода ЦЛЗ  $Z^{-1} 3$ , стоящей в цепи обратной связи. Это же число, равное нулю, поступает на первый вход ПКЧ3, на другой вход которого подается число  $\hat{z}_p = r_p e^{j\varphi_p}$ .

В момент времени  $t = 1$  в перемножителях ПКЧ1, ПКЧ2 и ПКЧ3 происходит перемножение кодов чисел, причем на выходе ПКЧ1 появляется код, соответствующий  $\hat{z}_{p1} \hat{x}_0 = \hat{z}_p \hat{x}_0$ , на выходе ПКЧ2 – код, соответствующий нулю, и на выходе ПКЧ3 – код, также соответствующий нулю.

Также, в момент времени  $t = 1$ , на первый вход  $\Sigma 1$ , выход которого является первым выходом устройства, поступает задержанный в ЦЛЗ  $Z^{-1} 1$  код числа  $\hat{x}_0$ , а на соответствующий вход  $\Sigma 2$ , выход которого является вторым выходом устройства, из ЦЛЗ  $Z^{-1} 2$  поступает код числа  $\hat{x}_1$ .

В момент времени  $t = 2$  происходит суммирование кодов в  $\Sigma 1$  и  $\Sigma 2$ , в результате чего на первом и втором выходах одновременно появляются коды чисел

$$\hat{y}_0 = \hat{x}_0,$$

$$\hat{y}_1 = \hat{x}_1 + \hat{z}_p \hat{x}_0 = \hat{x}_1 + \hat{z}_p \hat{y}_0,$$

причем код числа  $\hat{y}_1$  одновременно поступает на ЦЛЗ  $Z^{-1} 3$ .

В этот же момент времени  $t=2$  на входы устройства поступает вторая группа отсчетов  $\hat{x}_2$  и  $\hat{x}_3$ , первый из которых поступает в ЦЛЗ  $Z^{-1}1$  и на ПКЧ1, а второй – в ЦЛЗ  $Z^{-1}2$ .

В момент времени  $t=3$  происходит перемножение кодов чисел в перемножителях ПКЧ1, ПКЧ2, ПКЧ3, в результате чего на их выходах появляются коды чисел, соответствующие величинам  $\hat{z}_p \hat{x}_2$ ,  $\hat{z}_p \hat{x}_1$  и  $\hat{z}_p \hat{x}_3$ , и которые поступают на соответствующие сумматоры  $\Sigma 1$  и  $\Sigma 2$ .

В момент времени  $t=4$  на первом и втором выходах устройства, т.е. на выходах  $\Sigma 1$  и  $\Sigma 2$ , появятся коды, соответствующие числам

$$\hat{y}_2 = \hat{x}_2 + \hat{z}_p \hat{x}_1 + \hat{z}_p^2 \hat{x}_0 = \hat{x}_2 + \hat{z}_p \hat{y}_1,$$

$$\hat{y}_3 = \hat{x}_3 + \hat{z}_p \hat{x}_2 + \hat{z}_p^2 \hat{x}_1 + \hat{z}_p^3 \hat{x}_0 = \hat{x}_3 + \hat{z}_p \hat{x}_2 + \hat{z}_p^2 \hat{y}_1.$$

Далее работа устройства повторяется. Из последних выражений видно, что на двух выходах одновременно появляются отфильтрованные отсчеты, между которыми существует информационная связь. Это позволяет обрабатывать процессы в режиме работы «скользящее» окно, полоса которых превышает быстродействие используемых цифровых функциональных узлов в заданное число раз, причем проигрыш в затратах оборудования пропорционален степени распараллеливания.

#### 5.4. Метод распараллеливания КИХ-ячейки для режима работы «скользящее» окно

Поскольку, как известно, любая передаточная функция описывается отношением полиномов [15], то можно рассматривать распараллеленную обработку, как указывалось, раздельно как для нерекурсивных, так и для рекурсивных фильтров и ячеек. Для нерекурсивных фильтров импульсная характеристика имеет ограниченную длительность и также может быть реализована при помощи рассмотренной схемы Горнера. С другой стороны, нерекурсивный фильтр может быть составлен как из ЦКЯ, так и из действительных элементарных ячеек первого и второго порядков. В этом случае для  $m$  – кратного распараллеливания также необходима организация связи между группами выходных отсчетов.

При этом отсчеты внутри группы могут обрабатываться при помощи метода сдвигания [54], который заключается в том, что произведение или сложение двух соседних чисел  $i$ -го уровня дает одно число  $(i+1)$ -го уровня, причем полагается, что входные данные соответствуют нулевому уровню. Следовательно, для нерекурсивной КИХ-ячейки первого порядка число уровней будет равно двум, второго порядка – трем, а ширина распараллеленного алгоритма определяется величиной  $m$ .

Соответствующий алгоритм работы КИХ-ячейки первого вида первого порядка во временной области описывается выражением (4.26) в виде

$$\hat{y}_n = \hat{x}_n - \hat{z}_0 \hat{x}_{n-1} = \hat{x}_n + \hat{z}_0 \hat{x}_{n-1}, \text{ где } \hat{z}_0 = -\hat{z}_{01} = -r_{01} e^{j\omega_0 n}.$$

Раскроем последнее выражение при условии, что  $\hat{x}_{-1} = 0$ , в виде [15, 56]

$$\hat{y}_{(q-1)m} = \hat{x}_{(q-1)m} + \hat{z}_0 \hat{x}_{(q-1)m-1};$$

$$\hat{y}_{(q-1)m+1} = \hat{x}_{(q-1)m+1} + \hat{z}_0 \hat{x}_{(q-1)m};$$

$$\hat{y}_{(q-1)m+2} = \hat{x}_{(q-1)m+2} + \hat{z}_0 \hat{x}_{(q-1)m+1};$$

$$\dots$$

$$\hat{y}_{qm-1} = \hat{x}_{qm-1} + \hat{z}_0 \hat{x}_{qm-2}.$$

Из последних выражений видно, что в двух соседних уравнениях присутствует отсчет с одинаковым индексом, что позволяет получить на  $m$  выходах одновременно результаты прохождения входного процесса через КИХ-ячейку. Соответственно видно, что запоминание отсчета с индексом  $qm-1$  из предыдущей группы отсчетов для подачи его на обработку в следующую группу отсчетов, позволяет реализовать режим работы «скользящее» окно.

В качестве примера на рис. 5.3 изображена структурная схема цифровой КИХ-ячейки первого вида первого порядка с двукратным распараллеливанием.

Работает устройство следующим образом. Перед моментом времени  $t=0$  во всех ЦЛЗ  $Z^{-1}1$ ,  $Z^{-1}2$ ,  $Z^{-2}3$  записаны нули.

Пусть в момент времени  $t=0$  на первый и второй входы устройства одновременно подаются коды первой группы чисел  $\hat{x}_0$  и  $\hat{x}_1$ , которые поступают на входы ЦЛЗ  $Z^{-1}1$  и 2 и на первые входы ПКЧ1 и 2. Одновременно из ПЗУ на вторые входы ПКЧ1 и 2 поступает код числа  $\hat{z}_0$ .

В момент времени  $t=1$  происходит перемножение входных кодов  $\hat{x}_0$  и  $\hat{x}_1$  в ПКЧ1 и 2 на величину  $\hat{z}_0$  и на их выходах появляются коды чисел  $\hat{z}_0 \hat{x}_0$  и  $\hat{z}_0 \hat{x}_1$  соответственно. Код числа  $\hat{z}_0 \hat{x}_1$  записывается в ЦЛЗ  $Z^{-2}3$ , у которой время задержки в два раза больше чем у ЦЛЗ  $Z^{-1}1$  и ЦЛЗ  $Z^{-1}2$ .

В момент времени  $t=2$  происходит суммирование в сумматоре  $\Sigma 1$  кода  $\hat{x}_0$ , поступившего с выхода ЦЛЗ  $Z^{-1}1$  и кода, равного нулю, поступившего с выхода ЦЛЗ  $Z^{-2}3$ . Одновременно в сумматоре  $\Sigma 2$  происходит суммирование кода  $\hat{z}_0 \hat{x}_0$ , поступившего с выхода ПКЧ1, и кода  $\hat{x}_1$ , поступившего с выхода ЦЛЗ  $Z^{-1}2$ .

На выходах сумматоров  $\Sigma 1$  и  $\Sigma 2$ , которые одновременно являются первым и вторым выходами устройства, появляются соответственно коды

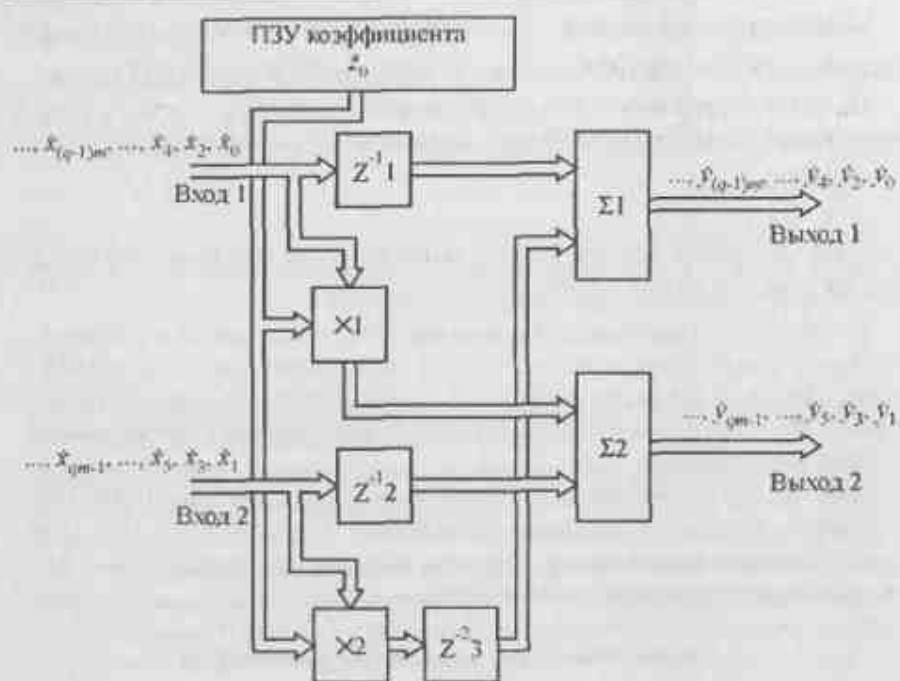


Рис. 5.3. Структурная схема КИХ-ячейки первого порядка первого вида с двукратным распараллеливанием данных

$$y_0 = x_0,$$

$$y_1 = x_1 + z_0 x_0.$$

В этот же момент времени  $t = 2$  на первый и второй входы устройства одновременно подаются коды второй группы чисел  $x_2$  и  $x_3$ , которые поступают на входы ЦЛЗ  $Z^{-1}1$  и 2 и на первые входы ПКЧ1 и 2.

Одновременно из ПЗУ на вторые входы ПКЧ1 и 2 поступает код числа  $z_0$ .

В момент времени  $t = 3$  происходит перемножение входных кодов  $x_2$  и  $x_3$  в ПКЧ1 и 2 на величину  $z_0$  и на их выходах появляются коды чисел  $z_0 x_2$  и  $z_0 x_3$  соответственно. Код числа  $z_0 x_3$  записывается в ЦЛЗ  $Z^{-2}3$ .

В момент времени  $t = 4$  происходит суммирование в сумматоре  $\Sigma 1$  кода  $x_2$ , поступившего с выхода ЦЛЗ  $Z^{-1}1$  и кода, равного  $z_0 x_1$ , поступившего с выхода ЦЛЗ  $Z^{-2}3$ .

Одновременно в сумматоре  $\Sigma 2$  происходит суммирование кода  $z_0 x_2$ , поступившего с выхода ПКЧ1, и кода  $x_3$ , поступившего с выхода ЦЛЗ  $Z^{-1}2$ .

На выходах сумматоров  $\Sigma 1$  и  $\Sigma 2$ , которые одновременно являются первым и вторым выходами устройства, появляются соответственно коды

$$y_2 = x_2 + z_0 x_1,$$

$$y_3 = x_3 + z_0 x_2.$$

В этот же момент времени  $t = 4$  подаются коды третьей группы чисел  $x_4$  и  $x_5$  на первый и второй входы устройства соответственно.

Далее процесс повторяется. Таким образом, в соответствующие моменты времени одновременно появляются коды чисел, прошедших через КИХ-ячейку первого вида первого порядка. Последнее обстоятельство и обеспечивает более высокую скорость обработки процессов в режиме работы «скользящее» окно.

Очевидно, что соединяя соответствующим образом рассмотренные схемы, можно обеспечить заданную передаточную функцию  $K(z)$ . При этом полоса обрабатываемых частот будет в заданное число раз превышать bandwidth используемой элементной базы.

### 5.5. Метод распараллеливания тангенсной ЦКЯ для режима работы «скользящее» окно

Рассмотрим применение данного метода распараллеливания к тангенсной ЦКЯ, описываемой выражением (4.11) и изображенной на рис. 4.2.

Алгоритм работы данного устройства будет

$$y_n = x_n + z_0 x_{n-1} + z_p y_{n-1},$$

где  $z_0 = -z_{01} = -r_{01} \exp(j\varphi_{01})$ ,  $z_p = r_p \exp(j\varphi_p)$ .

Раскрывая последнее выражение для случая  $m$ -кратного распараллеливания при условии, что  $y_{-1} = x_{-1} = 0$ , будем иметь

$$y_0 = x_0;$$

$$y_1 = x_1 + z_0 x_0 + z_p y_0 = x_1 + (z_0 + z_p) y_0;$$

$$y_2 = x_2 + z_0 x_1 + z_p y_1 = x_2 + (z_0 + z_p)(x_1 + z_p y_0);$$

$$y_3 = x_3 + z_0 x_2 + z_p y_2 = x_3 + (z_0 + z_p)(x_2 + z_p x_1 + z_p^2 y_0);$$

$$\dots$$

$$y_{m-1} = x_{m-1} + z_0 x_{m-2} + z_p y_{m-2} =$$

$$= x_{m-1} + (z_0 + z_p)(x_{m-2} + z_p x_{m-3} + z_p^2 x_{m-4} + \dots + z_p^{m-3} x_1 + z_p^{m-2} y_0).$$

Перепишем последнюю систему уравнений в следующем виде:

$$y_0 = x_0 + z_p \cdot 0 + z_0 \cdot 0;$$

$$y_1 = x_1 + z_p y_0 + z_0 x_0 = x_1 + z_p x_0 + z_0 (x_0);$$

$$y_2 = x_2 + z_p y_1 + z_0 x_1 = x_2 + z_p x_1 + z_p^2 x_0 + z_0 (x_1 + z_p x_0);$$

$$y_{m-1} = x_{m-1} + z_p y_{m-2} + z_0 x_{m-2} =$$

$$= x_{m-1} + z_p x_{m-2} + z_p^2 x_{m-3} + \dots + z_p^{m-1} x_0 + z_0 (x_{m-2} + z_p x_{m-3} + \dots + z_p^{m-2} x_0).$$

Анализ данной системы уравнений показывает, что каждое уравнение представляет собой сумму многочленов  $(m-1)$ -й и  $(m-2)$ -й степеней, которые могут быть вычислены по одинаковым правилам, причем в каждом следующем уравнении присутствуют все члены предыдущего с соответствующими коэффициентами. Следовательно, результат  $n$ -й итерации должен зависеть от результата  $(n-m-1)$ -й итерации, где  $m$  — степень распараллеливания, для обеспечения режима работы «скользящее» окно при параллельной обработке данных.

Рассмотрим в качестве примера работу тангенсной ЦКЯ с двукратным распараллеливанием данных ( $m=2$ ), структурная схема которой изображена на рис. 5.4, а временные диаграммы ее работы — на рис. 5.5.

Полагаем, что все операции выполняются за один и тот же интервал времени, равный времени задержки в ЦЛЗ и пусть перед моментом времени  $t=0$  во всех ЦЛЗ записаны нули.

Пусть в момент времени  $t=0$  на входы параллельно поступает первая группа кодов чисел  $x_0$  и  $x_1$ , которые начинают поступать в ЦЛЗ  $Z^{-1}1$  и ЦЛЗ  $Z^{-1}2$  своих каналов. Одновременно из ПЗУ коэффициентов на первый вход ПКЧ1 поступает код числа  $z_{p1} = z_p$ , а на его втором входе находится код выборки  $x_0$ .

Одновременно из ПЗУ коэффициентов поступает код  $z_p^2$  на ПКЧ2, стоящий в цепи обратной связи рекурсивной части устройства, и код числа  $z_p$  на ПКЧ3, на вторых входах которых находятся коды равные нулю, поступающие с выхода ЦЛЗ  $Z^{-1}3$ .

В момент времени  $t=1$  на выходе ПКЧ1 появится код, соответствующий величине  $z_{p1} x_0 = z_p x_0$ , поступающий на первый вход трехходового  $\Sigma 1$ . На второй вход  $\Sigma 1$  поступает с выхода ЦЛЗ  $Z^{-1}2$  код  $x_1$ , на его третий вход, с выхода ПКЧ2 — код  $z_p^2 \cdot 0 = 0$ .

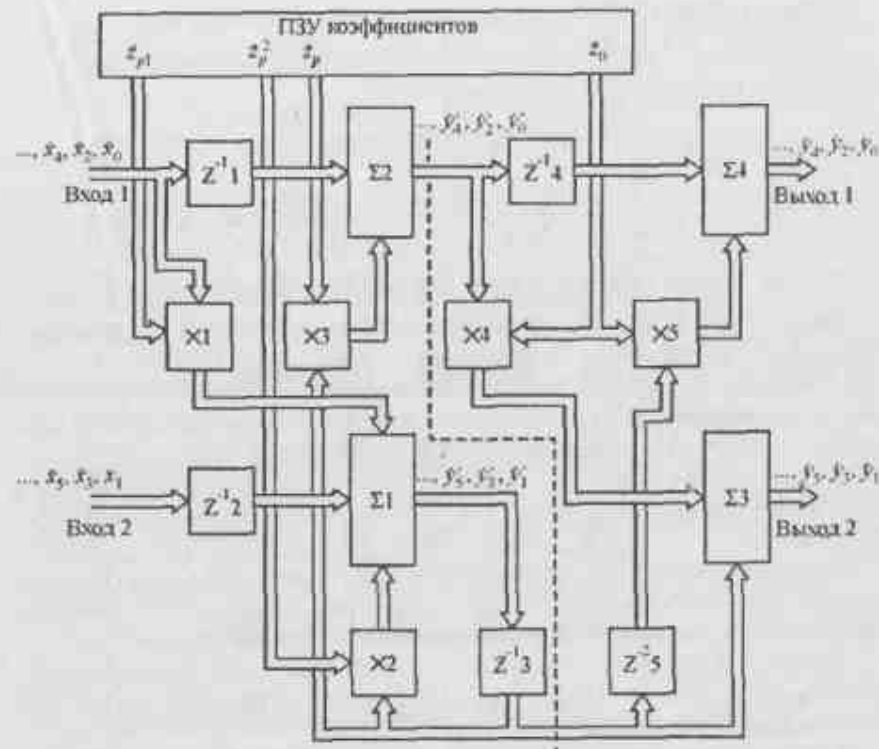


Рис. 5.4. Структурная схема тангенсной ЦКЯ с двукратным распараллеливанием данных

Одновременно, с выхода ЦЛЗ  $Z^{-1}1$  на первый вход двухходового  $\Sigma 2$  поступает код числа  $x_0$ , а на второй его вход поступает с выхода ПКЧ3 — код числа  $z_p \cdot 0 = 0$ , являющийся результатом перемножения кода, равного нулю, поступившего с выхода ЦЛЗ  $Z^{-1}3$  на код числа  $z_p$ .

В момент времени  $t=2$  на выходах  $\Sigma 1$  и  $\Sigma 2$  появятся коды чисел

$$y_0 = x_0 + z_p \cdot 0 = x_0,$$

$$y_1 = x_1 + z_p x_0 + z_p^2 \cdot 0 = x_1 + z_p x_0.$$

При этом код  $y_0$  поступает в ЦЛЗ  $Z^{-1}4$  и ПКЧ4 своего канала, а код  $y_1$  — на ЦЛЗ  $Z^{-1}3$  цепи обратной связи. Одновременно из ПЗУ коэффициентов поступает на вторые входы ПКЧ4 и ПКЧ5 код числа  $z_0$ .



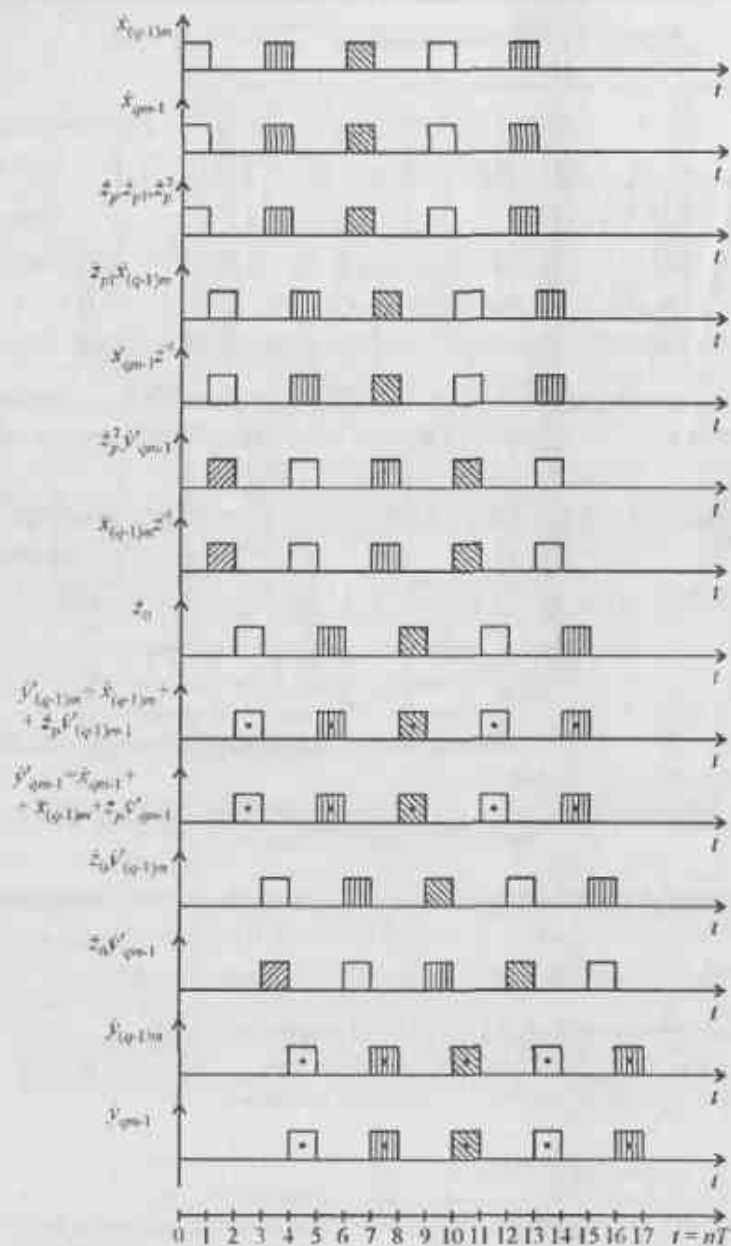


Рис. 5.5. Временные диаграммы работы тангенсной ЦКЯ с двукратным распараллеливанием данных

В момент времени  $t=3$  на входы устройства поступает вторая группа кодов  $\hat{x}_2$  и  $\hat{x}_3$ , которые подаются на соответствующие ЦФЗ  $Z^{-1}1$ , ЦФЗ  $Z^{-1}2$ , а код  $\hat{x}_2$  также поступает на ПКЧ1. Из ПЗУ коэффициентов поступают коды чисел  $\hat{z}_p^1, \hat{z}_p$  и  $\hat{z}_p^2$  на соответствующие входы ПКЧ1, ПКЧ2 и ПКЧ3. На вторых входах ПКЧ2 и ПКЧ3 появляется с выхода ЦФЗ  $Z^{-1}3$  цепи обратной связи код, равный  $\hat{y}_1$ . Этот код также поступает на ЦФЗ  $Z^{-2}5$  с задержкой на два такта и на один из входов выходного  $\Sigma 3$ . На другой вход этого  $\Sigma 3$  поступает с выхода ПКЧ4 код числа  $\hat{z}_0 \hat{y}_0 = \hat{z}_0 \hat{x}_0$ . На входах  $\Sigma 4$  будет изводиться код  $\hat{y}'_0$ , поступивший с выхода ЦФЗ  $Z^{-1}4$  и код, равный нулю, поступивший с выхода ПКЧ5 и являющийся результатом перемножения кода  $\hat{z}_0$  на код, равный нулю, который поступил с выхода ЦФЗ  $Z^{-2}5$ .

В момент времени  $t=4$  на выходе ПКЧ1, т. е. на первом входе трехходового  $\Sigma 1$ , появится код  $\hat{z}_p^1 \hat{x}_2 = \hat{z}_p \hat{x}_2$ , на втором входе  $\Sigma 1$  – код  $\hat{x}_3$ , а на его третьем входе – код  $\hat{z}_p^2 \hat{y}_1 = \hat{z}_p^2 \hat{x}_1 + \hat{z}_p^3 \hat{x}_0$ . На первом входе двухходового СКЧ  $\Sigma 2$  будет код числа  $\hat{x}_2$ , а на его другом входе – код числа  $\hat{z}_p \hat{y}'_1 = \hat{z}_p \hat{x}_1 + \hat{z}_p^2 \hat{x}_0$ .

Одновременно на выходах выходных  $\Sigma 3$  и  $\Sigma 4$  одного и другого каналов появятся коды чисел соответственно

$$\hat{y}'_0 = \hat{x}_0 + \hat{z}_p \cdot 0 = \hat{x}_0,$$

$$\hat{y}'_1 = \hat{x}_1 + \hat{z}_p \hat{x}_0 + \hat{z}_0 \hat{x}_0.$$

В момент времени  $t=5$  на выходах двухходового  $\Sigma 2$  появится код числа

$$\hat{y}'_2 = \hat{x}_2 + \hat{z}_p \hat{y}'_1 + \hat{z}_p^2 \hat{x}_0,$$

поступающий на входы ЦФЗ  $Z^{-1}4$  своего канала и ПКЧ4, на другой вход которого поступает одновременно код числа  $\hat{z}_0$ .

На выходе трехходового  $\Sigma 1$  появится код числа

$$\hat{y}'_3 = \hat{x}_3 + \hat{z}_p \hat{x}_2 + \hat{z}_p^2 \hat{x}_1 + \hat{z}_p^3 \hat{x}_0,$$

который поступит на вход ЦФЗ  $Z^{-1}3$  цепи обратной связи.

В момент времени  $t=6$  на входы устройства поступает третья группа отсчетов  $\hat{x}_4$  и  $\hat{x}_5$ , которые подаются на соответствующие ЦФЗ  $Z^{-1}1$  и  $Z^{-1}2$  и ПКЧ1. Из ПЗУ коэффициентов поступают коды  $\hat{z}_p^1, \hat{z}_p$  и  $\hat{z}_p^2$  на соответ-

входящие входы ПКЧ1, ПКЧ2 и ПКЧ3. На вторых входах ПКЧ2 и ПКЧ3 обоих каналов с выхода ЦЛЗ  $Z^{-1}3$  цепи обратной связи появится код, равный

$$\hat{y}_3 = \hat{x}_3 + \hat{z}_p \hat{x}_2 + \hat{z}_p^2 \hat{x}_1 + \hat{z}_p^3 \hat{x}_0,$$

который также поступает на ЦЛЗ  $Z^{-2}5$  с задержкой на два такта и на один из входов выходного  $\Sigma 3$ . На другой вход этого  $\Sigma 3$  поступает код, равный величине

$$\hat{z}_0 \hat{y}_2 = \hat{z}_0 (\hat{x}_2 + \hat{z}_p \hat{x}_1 + \hat{z}_p^2 \hat{x}_0).$$

Одновременно на входах другого выходного  $\Sigma 4$  появятся коды

$$\hat{y}_2 = \hat{x}_2 + \hat{z}_p \hat{x}_1 + \hat{z}_p^2 \hat{x}_0,$$

$$\hat{z}_0 \hat{y}_1 = \hat{z}_0 (\hat{x}_1 + \hat{z}_p \hat{x}_0).$$

В момент времени  $t=7$  на входах двухвходового  $\Sigma 2$  появятся коды чисел соответственно равные  $\hat{x}_4$  и  $\hat{z}_p \hat{y}_3 = \hat{z}_p \hat{x}_3 + \hat{z}_p^2 \hat{x}_2 + \hat{z}_p^3 \hat{x}_1 + \hat{z}_p^4 \hat{x}_0$ , а на входах трехвходового  $\Sigma 1$  будут коды  $\hat{x}_5$ ,  $\hat{z}_p \hat{x}_4 = \hat{z}_p \hat{x}_4$  и

$$\hat{z}_p^2 \hat{y}_3 = \hat{z}_p^2 \hat{x}_3 + \hat{z}_p^3 \hat{x}_2 + \hat{z}_p^4 \hat{x}_1 + \hat{z}_p^5 \hat{x}_0.$$

Одновременно на выходах выходных сумматоров одного и другого каналов появятся коды чисел соответственно

$$\hat{y}_2 = \hat{x}_2 + \hat{z}_p \hat{x}_1 + \hat{z}_p^2 \hat{x}_0 + \hat{z}_0 (\hat{x}_1 + \hat{z}_p \hat{x}_0),$$

$$\hat{y}_3 = \hat{x}_3 + \hat{z}_p \hat{x}_2 + \hat{z}_p^2 \hat{x}_1 + \hat{z}_p^3 \hat{x}_0 + \hat{z}_0 (\hat{x}_2 + \hat{z}_p \hat{x}_1 + \hat{z}_p^2 \hat{x}_0).$$

Далее работа устройства повторяется. Видно, что после каждых трех тактов работы на двух входах одновременно появляются коды двух чисел, которые удовлетворяют рассмотренной системе уравнений. Это соответствует расширению полосы обрабатываемых частот в два раза в режиме работы «скользящее» окно. Часть схемы на рис. 5.4, расположенная в левой части относительно пунктирной линии, соответствует распараллеленной рекурсивной части схемы (синусной распараллеленной ячейки), а часть, расположенная справа – нерекурсивной ее части (КИХ-ячейки), алгоритмы и структуры которых рассмотрены ранее.

### 5.6. Выводы

В данной главе представлен подход по распараллеливанию элементарных ячеек, обеспечивающих обработку информации в режиме работы «скользящее» окно. Показано, что для обеспечения распараллеленной обработки необходимо произвести предварительную подготовку входной информации таким образом, чтобы частота поступления входных данных на соответствующие входы цифрового многопроцессорного вычислительного устройства

соответствовала бы быстродействию составляющих его цифровых функциональных узлов. Показано, каким образом после обработки должны быть объединены полученные данные, которые могут поступать на выход устройства с частотой, определяемой полосой обрабатываемого процесса.

Рассмотренные алгоритмы распараллеливания обработки в режиме работы «скользящее» окно позволяют получать обработанные группы данных, между которыми имеется информационная связь. При этом в основе рассмотренных алгоритмов распараллеливания используется подход, основанный на применении скобок Горнера.

Помимо рассмотренных распараллеленных структур синусной, КИХ-ячейки и тангенсной ячеек нетрудно получить структуры с  $m$ -кратным распараллеливанием рассмотренных квазитангенсной ЦКЯ, биквадратной и ряда других ячеек, в частности элементарную ячейку распараллеленного вычисления корреляционной функции в режиме работы «скользящее» окно [54, 56].

Прирост полосы обрабатываемых частот достигается за счет увеличения затрат оборудования в многопроцессорном вычислителе. Анализ показывает, что прирост затрат оборудования на единицу полосы прироста обрабатываемых частот (в качестве которой принята предельная полоса частот, определяемая частотой дискретизации, которая может быть обработана соответствующей элементарной ячейкой без распараллеливания данных) составляет для тангенсных ячеек  $3m-1$ , для синусных  $2m-1$ , для квазитангенсных  $(2,2-2,3)m$ , для КИХ-ячеек –  $m$ , где  $m \geq 2$  – степень распараллеливания данных.

## 6. ЦИФРОВЫЕ МНОГОПРОЦЕССОРНЫЕ ФИЛЬТРЫ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

### 6.1. Вводные замечания

Известно, что получение отсчетов выходного сигнала достигается путем прохождения отсчетов входного сигнала через цифровую линейную систему с заданной импульсной характеристикой (во времени), либо с заданным коэффициентом передачи (в частотной области).

Под цифровым многопроцессорным фильтром (ЦМФ) обычно понимают цифровую линейную систему с постоянными коэффициентами, обеспечивающую частотно-избирательные свойства в зависимости от тех или иных требований к параметрам выходного процесса и реализуемую на наборе микропроцессоров.

Создание ЦМФ в общем случае является многокритериальной задачей, в которой необходимо учитывать ряд условий как в области требований по обеспечению заданных характеристик, так и условий оптимизации с точки зрения технико-экономических показателей.

В настоящее время методы синтеза ЦМФ условно можно разбить на две большие группы:

- методы синтеза ЦМФ с бесконечными импульсными характеристиками (БИХ-фильтры);
- методы синтеза ЦМФ с конечными импульсными характеристиками (КИХ-фильтры).

Первая группа методов (для БИХ-фильтров) используется для получения заданных параметров частотной характеристики при помощи тех или иных рациональных функций. Вторая группа методов (для КИХ-фильтров) использует полиномиальную аппроксимацию. Следует сказать, что с технико-экономической точки зрения предпочтение отдано БИХ-фильтрам, если нет необходимости получать специальные формы АЧХ и ФЧХ, которые достаточно просто реализуются при помощи КИХ-фильтров.

Синтез ЦМФ как БИХ, так и КИХ, имеет ряд особенностей, а именно — реализация передаточной функции требуемого вида осуществляется струк-

## 6. Цифровые многопроцессорные фильтры с БИХ

турно-программным путем на соединенных соответствующим образом микропроцессорах [58].

### 6.2. Методы расчета цифровых многопроцессорных фильтров с бесконечными импульсными характеристиками

Синтез ЦМФ с БИХ осуществляется по аналогии с методами расчета аналоговых фильтров (АФ), обладающих теоретически бесконечными по длительности импульсными характеристиками.

Проектирование ЦМФ с БИХ по аналоговому прототипу включает в себя ряд шагов и может быть представлена в виде, изображенном на рис. 6.1а и рис. 6.1б. В дальнейшем будем рассматривать процедуру расчета ЦМФ, изображенную на рис. 6.1б.

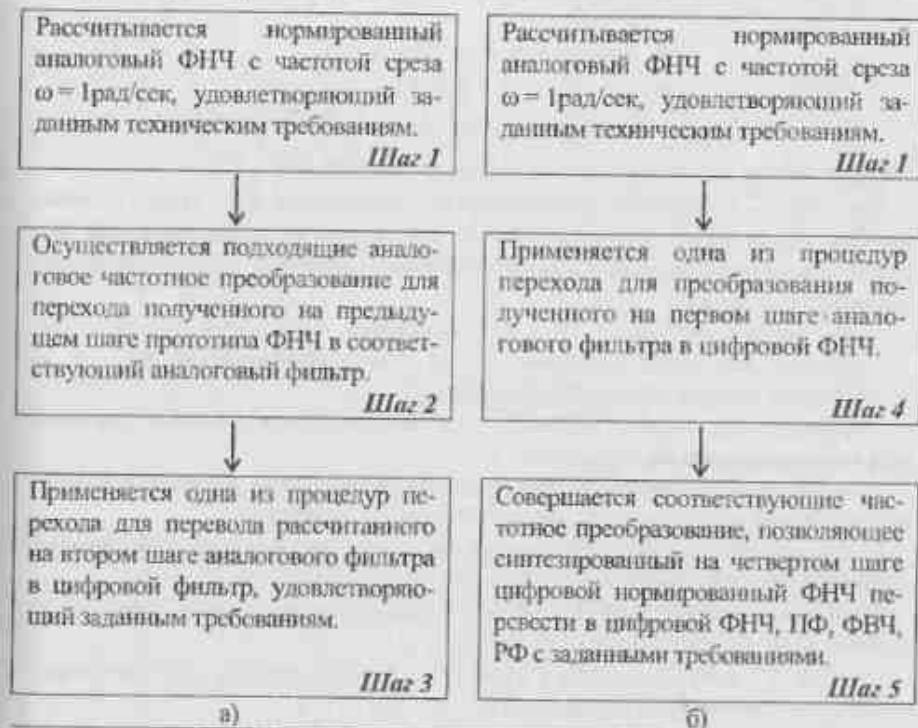


Рис. 6.1. Общие процедуры расчета цифровых многопроцессорных фильтров

Процедура синтеза ЦМФ с БИХ распадается на ряд этапов.

6.2.1. Первый этап заключается в выборе требуемого вида АЧХ ЦМФ в зависимости от решаемой задачи.

Существует четыре вида идеальных АЧХ ЦМФ на основе ЦКЯ:

- фильтры нижних частот (ФНЧ)

$$H_{\text{ФНЧ}}(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq f \leq f_c \\ 0 & \text{при } f_c < f \leq F_0 \end{cases}$$

- фильтры верхних частот (ФВЧ)

$$H_{\text{ФВЧ}}(f) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq f \leq f_c \\ 1 & \text{при } f_c < f \leq F_0 \end{cases}$$

- полосовые фильтры (ПФ)

$$H_{\text{ПФ}}(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } f_n \leq f \leq f_a \\ 0 & \text{при } f < f_n \text{ и } f_a < f \leq F_0 \end{cases}$$

- режекторные фильтры (РФ)

$$H_{\text{РФ}}(f) = \begin{cases} 0 & \text{при } f_n \leq f \leq f_a \\ 1 & \text{при } f < f_n \text{ и } f_a < f \leq F_0 \end{cases}$$

Здесь  $f$  – текущая частота,  $f_c$  – частота среза ФНЧ и ФВЧ,  $f_n$  и  $f_a$  – соответственно нижняя и верхняя частоты среза для ПФ и РФ.

На рис. 6.2 изображены нормированные идеальные АЧХ  $H_{\text{идеал}}(f)$  всех четырех видов ЦМФ на основе ЦКЯ на выходе одного из квадратурных каналов при воздействии комплексного входного сигнала с учетом периодичности по оси частот.

6.2.2. Выбор требуемого вида аппроксимации АЧХ ЦМФ связан с тем, что невозможно получить идеальные АЧХ, изображенные на рис. 6.2.

Известны четыре вида аппроксимации:

- максимально гладкая АЧХ в полосе пропускания и в полосе задержания (аппроксимация Баттерворта);
- пульсации заданного уровня в полосе пропускания и гладкая АЧХ в полосе задержания (аппроксимация Чебышева 1-го типа);
- максимально гладкая АЧХ в полосе пропускания и заданный уровень пульсации в полосе задержания (аппроксимация Чебышева 2-го типа);
- заданные уровни пульсаций в полосе пропускания и полосе задержания (аппроксимация эллиптическими функциями).

На рис. 6.3 изображены АЧХ идеального нормированного ФНЧ и четыре указанных вида аппроксимаций АЧХ.

Отметим, что в литературе фильтры с указанными аппроксимациями АЧХ часто называют соответственно фильтрами Баттерворта, Чебышева 1-го и 2-го типов и эллиптическими. Очевидно, что всего существует 16 видов фильтров.

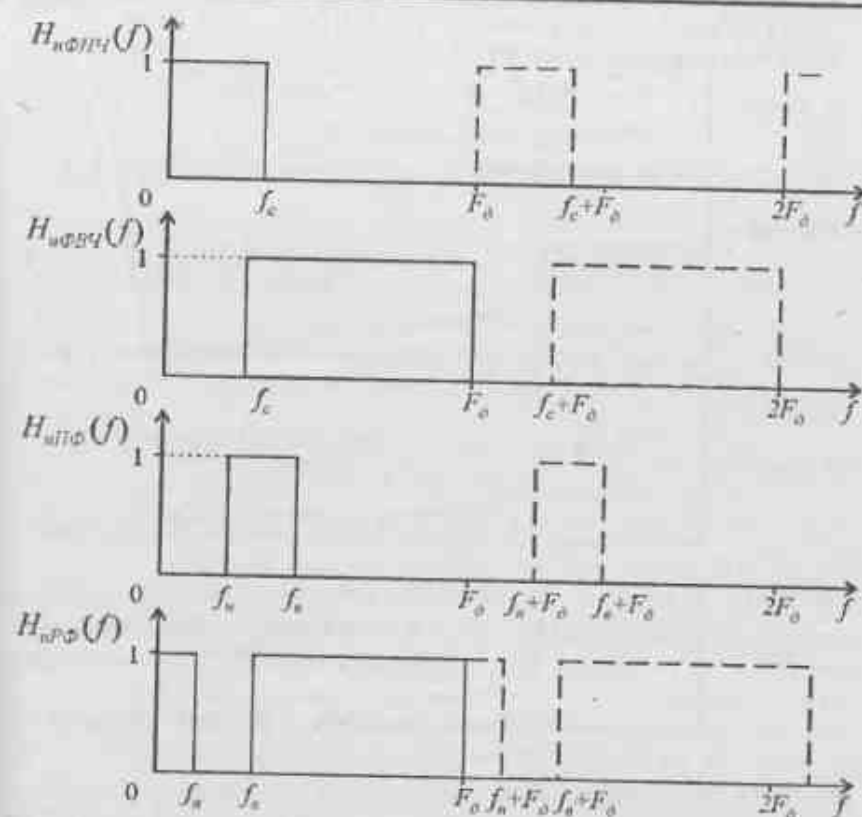


Рис. 6.2. Виды идеальных нормированных АЧХ ЦМФ на основе ЦКЯ на выходе одного из квадратурных каналов при воздействии комплексного входного сигнала

Выбор требуемого вида аппроксимации однозначно связан с затратами оборудования. Очевидно, что в самом общем случае затраты на реализацию фильтра Баттерворта будут больше, чем затраты оборудования на реализацию фильтра на основе эллиптических функций.

6.2.2.1. Наиболее наглядными для понимания являются аппроксимации АЧХ полиномами Баттерворта и Чебышева, которые и рассмотрим далее.

Отметим, что все рассматриваемые виды фильтров являются минимально-фазовыми, т.е. фильтрами, у которых существует взаимно однозначная связь между функцией модуля АЧХ и фазовой функцией.

Для того чтобы оперировать действительными величинами в аналоговой технике используют для синтеза свойства, присущие квадрату модуля комплексного коэффициента передачи цепи.

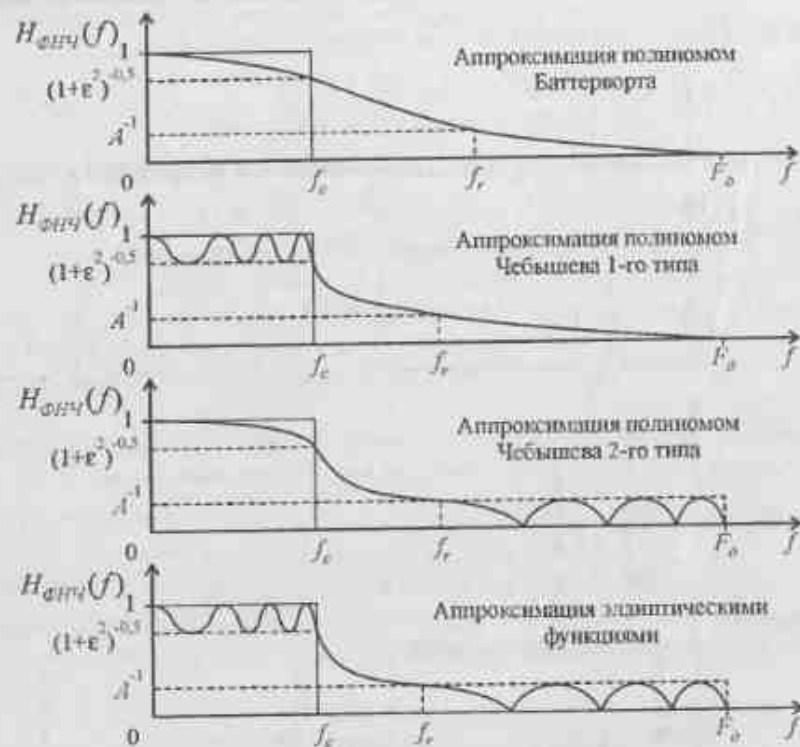


Рис. 6.3. Виды аппроксимаций АЧХ идеального нормированного ФНЧ

Квадрат модуля функции передачи  $H(p)$  определяется выражением ( $p = j\omega$ )

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H^*(j\omega), \quad (6.1)$$

где знак «\*» означает комплексное сопряжение, т.е.

$$H^*(j\omega) = H(j\omega^*) = H(-j\omega).$$

Тогда можно записать (6.1) в виде

$$|H(j\omega)|^2 = H(p)H(-p)|_{p=j\omega}. \quad (6.2)$$

Передаточная функция  $H(p)$  может быть представлена в виде произведения сомножителей первой степени, содержащих полюсы и нули функции

$$H(p) = B \frac{(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0M})}{(p - p_{p1})(p - p_{p2}) \dots (p - p_{pN})},$$

где  $B$  – нормирующий множитель,  $M \leq N$  – порядки полиномов числителя и знаменателя соответственно.

Тогда с учетом (6.2) квадрат модуля будет

$$|H(j\omega)|^2 = B^2 \frac{(\omega^2 + p_{01}^2)(\omega^2 + p_{02}^2) \dots (\omega^2 + p_{0M}^2)}{(\omega^2 + p_{p1}^2)(\omega^2 + p_{p2}^2) \dots (\omega^2 + p_{pN}^2)}. \quad (6.3)$$

Очевидно, что если все  $p_{0i}$  и  $p_{pi}$  вещественны, то вещественна и функция (6.3). Если полюсы и нули  $H(p)$  являются комплексными, то они всегда должны быть представлены в виде комплексно-сопряженных пар.

При указанных условиях выполняется следующая теорема.

**Теорема.** Полиномы числителя и знаменателя квадрата модуля функции передачи представляют собой полиномы от  $\omega$  с вещественными коэффициентами, причем значения этих полиномов больше нуля для всех вещественных значений  $\omega$  [59].

6.2.2.2. Аппроксимация АЧХ нормированного ФНЧ полиномом Баттерворта  $n$ -го порядка осуществляется при помощи соотношения вида

$$|H(j\omega)|^2 = B_n(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.4)$$

где  $B_n(\omega)$  – полином Баттерворта  $n$ -го порядка.

На рис. 6.4 изображены АЧХ ФНЧ, аппроксимированные полиномами Баттерворта соответствующих порядков.



Рис. 6.4. Примеры АЧХ ФНЧ Баттерворта различных порядков

Фильтры (в том числе и ФНЧ) с АЧХ, аппроксимированными полиномами Баттерворта, как указывалось ранее, называются фильтрами Баттерворта. ФНЧ Баттерворта обладают следующими свойствами.

**Свойство 1.**  $|H(j0)|^2 = 1$ ,  $|H(j1)|^2 = 0.5$ ,  $|H(j\infty)|^2 = 0$ .

**Свойство 2.** Функция модуля монотонно убывает с ростом  $\omega$ .

**Свойство 3.** Первые  $(2n-1)$  производных АЧХ ФНЧ Баттерворта  $n$ -го порядка равны нулю при  $\omega = 0$ .

**Свойство 4.** Крутизна АЧХ составляет  $20n$  дБ/декада.

Рассмотрим методику получения передаточной функции модуля.

Этап 1. По заданной функции модуля фильтра Баттерворта  $n$ -го порядка определим

$$H^2(p) = H(p)H(-p) = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=\frac{p}{j}} = \frac{1}{1+\omega^{2n}} \Big|_{\omega=\frac{p}{j}} = \frac{1}{1+(-1)^n p^{2n}} \quad (6.5)$$

Этап 2. Представим  $H^2(p)$  в виде произведения полиномов первого и второго порядков. Из (6.5) следует, что в числителе  $H^2(p)$  нет нулей и он равен единице. Полюсы  $H^2(p)$  обладают квадратной симметрией.

Этап 3. Для построения передаточной функции  $H(p)$  воспользуемся теми сомножителями, которые соответствуют полюсам, лежащим в левой половине  $p$ -плоскости. Произведение этих сомножителей образует знаменатель  $H(p)$ .

Пример. Найти передаточную функцию ФНЧ Баттерворта 3-го порядка.  
Решение.

Этап 1. Из выражения (6.5) следует

$$H(p)H(-p) = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=\frac{p}{j}} = \frac{1}{1-p^6}$$

Этап 2. Представим знаменатель полученного выражения в виде произведения

$$H(p)H(-p) = \frac{1}{1-p^6} = \frac{1}{(p+1)(p^2+p+1)(-p+1)(p^2-p+1)}$$

Этап 3. Воспользуемся сомножителями, расположенными в левой половине  $p$ -плоскости и получим передаточную функцию ФНЧ Баттерворта третьего порядка

$$H(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+p+1)} = \frac{1}{p^3+2p^2+2p+1}$$

Анализ выражения (6.5) показывает, что полюсы функции  $H(p)H(-p)$  являются решением уравнения

$$(-1)^n p^{2n} + 1 = 0.$$

Рассмотрим случай, когда  $n$  четно. Тогда

$$p^{2n} = -1 = \exp[j(2k-1)\pi],$$

где  $k$  – целое число. Следовательно, полюсы  $p_k$  функции  $H(p)H(-p)$  находятся из выражения [36, 61, 62]

$$p_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + j \sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) = \cos\theta_k + j \sin\theta_k, \quad (6.6)$$

где  $\theta_k = \left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ ,  $k=1, 2, \dots, 2n$ .

Отсчет номеров полюсов  $p_k$  ведется от оси  $\text{Re } p$ . Видно, что для четных  $n$  полюсы не лежат на мнимой оси.

В том случае, когда  $n$  – нечетное число, два полюсы всегда лежат на мнимой оси, т.е. при  $\theta_k = \pi/2$  и  $\theta_k = 3\pi/2$  величины  $p_k = j$  и  $p_k = -j$  соответственно. В то же время полюс не должен оказаться на оси  $j\omega$  в  $p$ -плоскости, т.к. это соответствует случаю, когда отсутствует затухание в колебательной системе. Поэтому необходимо, чтобы отсчет номеров полюсов производился от мнимой оси  $\text{Im } p$ .

Для того, чтобы отсчет номеров полюсов начинался от оси  $\text{Im } p$ , вводится величина  $\theta_k = \theta_k + \pi/2$  и подсчитываются номера полюсов лежащих только в левой половине  $p$ -плоскости как для четных, так и для нечетных  $n$ .

Тогда выражение (6.6) преобразуется к виду

$$p_k = -\sin\theta_k + j \cos\theta_k, \quad (6.7)$$

где

$$\theta_k = (2k-1/2n)\pi, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (6.8)$$

На рис. 6.5,а и рис. 6.5,б изображено расположение полюсов аналогового ФНЧ Баттерворта для случаев  $n=4$  и  $n=5$ . На рис. 6.5,а показано, каким образом производится перенумерация полюсов (для четных  $n$  ( $n=4$ )), а на рис. 6.5,б приводится окончательный результат (для нечетных  $n$  ( $n=5$ )).

Видно, что для случая  $n=4$  угол  $\theta = 45^\circ$ , а для  $n=5$  угол  $\theta = 36^\circ$  и один из полюсов расположен на действительной оси. Для нечетных  $n$ , как видно из (6.8), нет полюсов на мнимой оси, т.е. при  $\theta_k = \pi/2$  величина  $p_k = -1$ .

Учитывая, что  $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ , нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \sigma_k &= -\sin\theta_k, \\ \omega_k &= \cos\theta_k. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Учитывая комплексно-сопряженный характер полюсов в  $p$ -плоскости и принимая во внимание (6.9), можно записать

$$\begin{aligned} (p-p_k)(p-p_k^*) &= (p-\sigma_k-j\omega_k)(p-\sigma_k+j\omega_k) = \\ &= p^2 - 2\sigma_k p + \sigma_k^2 + \omega_k^2 = p^2 + 2p \sin\theta_k + 1. \end{aligned} \quad (6.10)$$

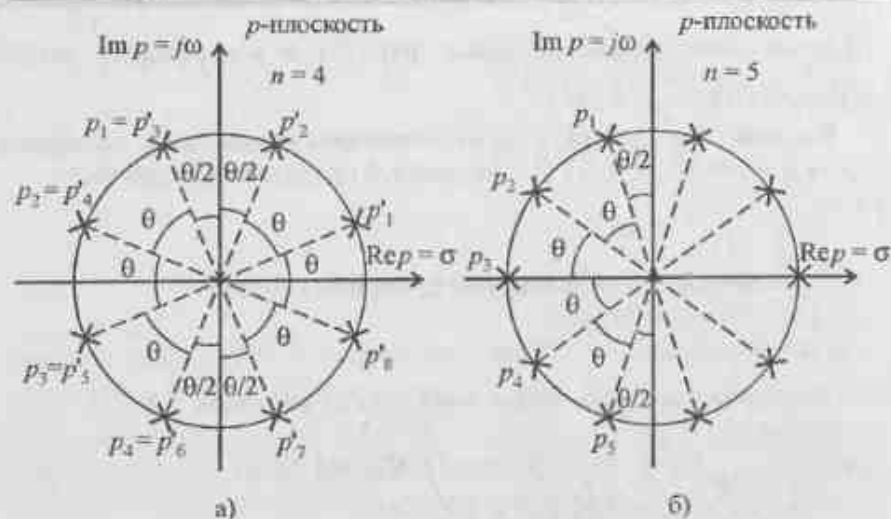


Рис. 6.5. Расположение полюсов ФНЧ Баттерворта на  $p$ -плоскости

Тогда с учетом (6.8) и (6.10) передаточная функция будет

$$H(p) = \prod_{k=1}^{n/2} \frac{1}{p^2 + 2p \sin \theta_k + 1}, \text{ если } n \text{ четно,}$$

и

$$H(p) = \frac{1}{p+1} \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{p^2 + 2p \sin \theta_k + 1}, \text{ если } n \text{ нечетно,}$$

где  $\theta_k$  определяется из (6.8).

В том случае, когда частота среза  $\omega = 1$  рад/сек, то полюсы перемещаются вдоль радиальных линий до соответствующих точек на окружности радиусом  $\omega$ .

В этом случае нормированная передаточная функция ФНЧ Баттерворта (6.4) записывается в виде

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}, \quad (6.11)$$

где  $\omega = 2\pi f$ .

При использовании такой записи не происходит изменения характера диаграммы расположения нулей и полюсов, если не считать изменения масштаба.

Рассмотрим, как определяется требуемый порядок  $n$  передаточной функции (6.11) ФНЧ Баттерворта по заданным требованиям в полосе про-

пускания, определяемой на уровне  $1/(1+\epsilon^2)$  и к переходной полосе, определяемой на уровне  $1/A^2$ .

В самом общем случае  $\epsilon$  может принимать произвольные значения и соответственно функция (6.11) для заданной полосы пропускания будет

$$\frac{1}{1+\epsilon^2} = \frac{1}{1+(f/f_c)^{2n}}$$

Для заданной переходной полосы функция (6.11) будет

$$\frac{1}{A^2} = \frac{1}{1+(f_r/f_c)^{2n}}$$

Пример расположения особых точек представлен на рис. 6.6.



Рис. 6.6. Пример расположения особых точек при расчете ФНЧ Баттерворта

Поделив два последних выражения друг на друга, получаем

$$\frac{(f/f_c)^{2n}}{(f_r/f_c)^{2n}} = \frac{\epsilon^2}{A^2 - 1},$$

откуда

$$\left(\frac{f}{f_r}\right)^n = \sqrt{\frac{\epsilon^2}{A^2 - 1}}$$

Тогда, логарифмируя, будем иметь

$$n = \ln \left( \frac{\sqrt{A^2 - 1}}{\epsilon^2} \right) / \ln \left( \frac{f_r}{f} \right).$$

Обычно полагают, что переходная полоса определяется частотой  $\omega_c = 2\pi f_c$ , на которой функция описываемая выражением (6.11), равна за-

данной величине  $1/(1+\epsilon^2)$ . Отметим, что наиболее часто полагают  $1/(1+\epsilon^2) = 0,5$ , т.е.  $\epsilon = 1$ .

Полагая в последнем выражении  $f = f_c$  для заданной величины  $\epsilon$ , порядок ФНЧ Баттлерворта определим в виде

$$n = \ln \left( \sqrt{\frac{A^2 - 1}{\epsilon^2}} \right) / \ln \left( \frac{f_r}{f_c} \right).$$

При переходе к ЦМФ при помощи билинейного преобразования аналоговая частота должна заменяться на цифровую, т.е.

$$f_A = \operatorname{tg} \pi f_{ц} T.$$

Тогда

$$n \geq \ln \left( \sqrt{\frac{A^2 - 1}{\epsilon^2}} \right) / \ln \left( \frac{\operatorname{tg} \pi f_r T}{\operatorname{tg} \pi f_c T} \right), \quad (6.12)$$

При использовании согласованного Z-преобразования

$$f_A = \sin \pi f_{ц} T,$$

откуда

$$n \geq \ln \left( \sqrt{\frac{A^2 - 1}{\epsilon^2}} \right) / \ln \left( \frac{\sin \pi f_r T}{\sin \pi f_c T} \right). \quad (6.13)$$

В выражениях (6.12) и (6.13)  $f_c$  и  $f_r$  задаются в герцах,  $T$  – в секундах,  $\epsilon$  и  $A$  – безразмерные величины.

6.2.2.3. Аппроксимация АЧХ нормированного ФНЧ полиномом Чебышева  $n$ -го порядка осуществляется при использовании соотношений:

а) для фильтров Чебышева 1-го типа

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega)}, \quad (6.14)$$

б) для фильтров Чебышева 2-го типа

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 [T_n^2(\omega_r) / T_n^2(\omega_r / \omega)]},$$

где  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  – полином Чебышева  $n$ -го порядка;  $\epsilon$  – параметр, определяющий степень неравномерности АЧХ в заданном диапазоне частот;  $\omega_r$  – граничная частота, на которой в полосе непропускания достигается заданный уровень ослабления.

Фильтры (в том числе и ФНЧ) с АЧХ, аппроксимированными полиномами Чебышева, называются фильтрами Чебышева 1-го и 2-го типов или равноволновыми.

На рис. 6.7,а и рис. 6.7,б изображены АЧХ ФНЧ Чебышева 1-го типа аппроксимированные полиномами нечетного и четного порядка соответственно

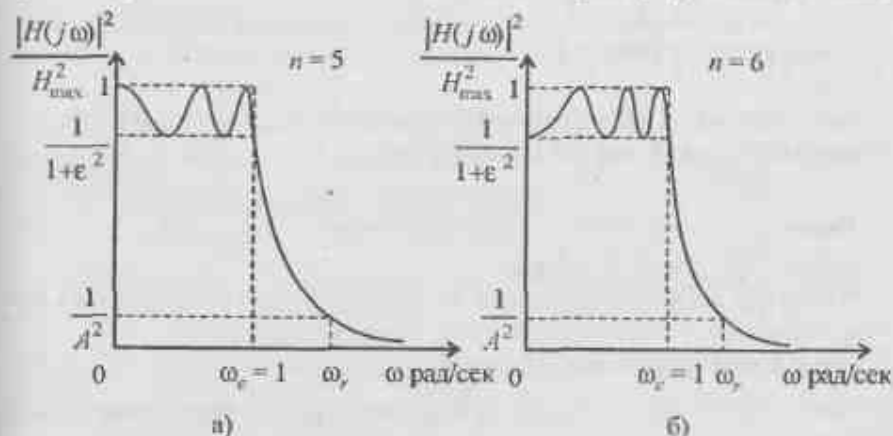


Рис. 6.7. Нормированные АЧХ Чебышева 1-го типа

АЧХ ФНЧ Чебышева 2-го типа отличаются от изображенных тем, что пульсации заданного уровня находятся в полосе задержания, а гладкий участок АЧХ – в полосе пропускания.

ФНЧ Чебышева 1-го типа имеют следующие свойства.

**Свойство 1.** Для  $|\omega| \leq 1$  значение функции  $|H(j\omega)|^2$  колеблется между двумя пределами:  $1/(1+\epsilon^2)$  и 1. На интервале  $0 \leq \omega \leq 1$  имеется  $n$  критических точек, в которых функция  $|H(j\omega)|^2$  достигает максимального значения, равного 1, или минимального значения, равного  $1/(1+\epsilon^2)$ .

**Свойство 2.** При  $|\omega| > 1$  функция  $|H(j\omega)|^2$  монотонно убывает и стремится к нулю. Крутизна спада на высоких частотах составляет  $20n$  дБ/декада.

**Свойство 3.** Функция  $|H(j\omega)|^2$   $n$ -го порядка удовлетворяет следующим уравнениям:

$$|H(j1)|^2 = 1/(1+\epsilon^2);$$

$$|H(j0)|^2 = 1, \text{ если } n \text{ – нечетно; } |H(j0)|^2 = 1/(1+\epsilon^2), \text{ если } n \text{ – четно.}$$



Рассмотрим методику получения передаточной функции. Из (6.14) видно, что числитель постоянен и не зависит от частоты. Подставляя полином Чебышева  $n$ -го порядка в (6.14), получаем

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cos^2(n \arccos \omega)}. \quad (6.15)$$

Предварительно сделаем ряд замечаний. Определим следующим образом комплексную переменную, стоящую под знаком косинуса в полиноме Чебышева

$$\arccos \omega \Big|_{\omega = \frac{p}{j}} = \arccos \left( \frac{p}{j} \right) = \alpha + j\beta. \quad (6.16)$$

Преобразуя (6.16), получим выражение в виде  $\cos(\alpha + j\beta) = p/j = (\sigma + j\omega)/j$ .

Раскрывая последнее выражение по формуле косинуса суммы двух углов, умножая на  $j$  левую и правую части, имеем [63, 64]

$$p = \sigma + j\omega = -\sin \alpha \operatorname{sh} \beta + j \cos \alpha \operatorname{ch} \beta, \quad (6.17)$$

где  $\operatorname{ch} \beta = \cos j\beta$ ,  $\operatorname{sh} \beta = j^{-1} \sin j\beta$  — гиперболические косинус и синус соответственно.

Приравняв друг другу вещественные и мнимые части в (6.17), получаем  $\sigma = -\sin \alpha \operatorname{sh} \beta$ ,

$$\omega = \cos \alpha \operatorname{ch} \beta. \quad (6.18)$$

Подставляя (6.16) в (6.15), по рассмотренной методике найдем квадрат передаточной функции

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega = \frac{p}{j}} &= H^2(p) = H(p)H(-p) = \\ &= \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cos^2[n \arccos(p/j)]} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cos^2 n(\alpha + j\beta)}. \end{aligned}$$

Следовательно, полюсы  $H^2(p)$  являются корнями уравнения

$$1 + \varepsilon^2 \cos^2 n(\alpha + j\beta) = 0,$$

откуда

$$\{1 + j\varepsilon \cos[n(\alpha + j\beta)]\} \{1 - j\varepsilon \cos[n(\alpha + j\beta)]\} = 0.$$

Следовательно

$$1 \pm j\varepsilon \cos[n(\alpha + j\beta)] = 0,$$

откуда

$$\pm j/\varepsilon = \cos(n\alpha + jn\beta) = \cos(n\alpha) \operatorname{ch}(n\beta) - j \sin(n\alpha) \operatorname{sh}(n\beta).$$

Приравняв друг другу вещественные и мнимые части, получаем  $\cos(n\alpha) \operatorname{ch}(n\beta) = 0$ ;

$$\sin(n\alpha) \operatorname{sh}(n\beta) = \pm 1/\varepsilon.$$

Это приводит к следующей системе уравнений:

$$\alpha_k = \pm \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2};$$

$$\beta_k = \pm (1/n) \operatorname{arsh}(1/\varepsilon), \quad k=1, 2, \dots, n.$$

С учетом системы уравнений (6.18) полюсы передаточной функции фильтра Чебышева  $n$ -го порядка, равные  $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ , примут значения

$$\begin{aligned} \sigma_k &= -\operatorname{sh}[(1/n) \operatorname{arsh}(1/\varepsilon)] \sin[(2k-1)\pi/2n]; \\ \omega_k &= \operatorname{ch}[(1/n) \operatorname{arsh}(1/\varepsilon)] \cos[(2k-1)\pi/2n]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Таким образом, передаточная функция ФНЧ Чебышева 1-го типа имеет вид

$$H(p) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{p - p_k} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{p - \sigma_k - j\omega_k}. \quad (6.20)$$

полюсы в левой  
полуплоскости      полюсы в правой  
полуплоскости

Отметим, что, как и рассматривалось ранее, отсчет номеров полюсов производится от вертикальной оси  $p$ -плоскости. Поэтому в выражении (6.19) при его использовании в дальнейшем функция  $\sin(x)$  заменяется на  $\cos(x)$ , а функция  $\cos(x)$  соответственно на  $\sin(x)$  за счет добавления к аргументу  $x$  величина равной  $\pi/2$ .

Определим геометрическое место полюсов на  $p$ -плоскости.

Используя тригонометрическое тождество  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , из системы (6.19) получим

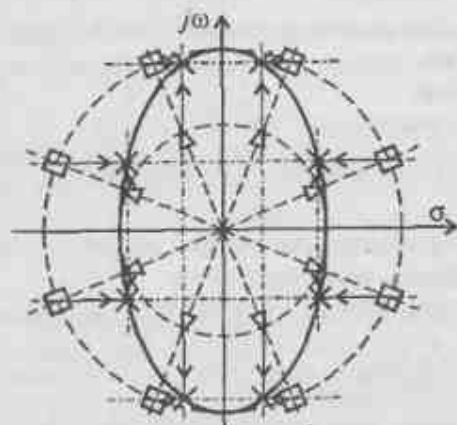
$$\frac{\sigma_k^2}{\operatorname{sh}^2[(1/n) \operatorname{arsh}(1/\varepsilon)]} + \frac{\omega_k^2}{\operatorname{ch}^2[(1/n) \operatorname{arsh}(1/\varepsilon)]} = 1.$$

Следовательно, полюсы располагаются на эллипсе в  $p$ -плоскости, у которого:

- малая ось  $a = \operatorname{sh}[(1/n) \operatorname{arsh}(1/\varepsilon)]$ ;
- большая ось  $b = \operatorname{ch}[(1/n) \operatorname{arsh}(1/\varepsilon)]$ .

Следовательно, если заданы  $\varepsilon$  и  $n$ , то можно определить положения полюсов ФНЧ Чебышева. На рис. 6.8 изображен такой эллипс, у которого вертикальная и горизонтальная полуоси обозначены  $b$  и  $a$  соответственно.

Итак, для нахождения  $H(p)$  нормированного ФНЧ Чебышева необходимы три этапа.



- × - Чебышевские полюса
- - Баттервортовские полюса на большой окружности
- △ - Баттервортовские полюса на малой окружности

Рис. 6.8. Графическое изображение расположения полюсов ФНЧ Чебышева 1-го типа

Этап 1. Образуется

$$|H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=\frac{p}{j}} = H^2(p) = H(p)H(-p) = 1/\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2(p/j)}$$

Этап 2. Находятся полюсы  $H(p)H(-p)$  согласно системе уравнений (6.19).

Этап 3. Для построения  $H(p)$  используются сомножители, связанные с полюсами, которые расположены в левой половине  $p$ -плоскости, согласно выражения (6.20).

Отметим, что все свойства и порядок расчета фильтров Чебышева 1-го и 2-го типов аналогичны.

Аналогичным образом, как и для ФНЧ Баттерворта, порядок  $n$  для ФНЧ Чебышева 1-го и 2-го типов определяется:

- при использовании билинейного преобразования

$$n \geq \frac{\operatorname{arch} \left( \sqrt{\frac{A^2 - 1}{\varepsilon^2}} \right)}{\operatorname{arch} \left( \frac{\operatorname{tg} \pi f_c T}{\operatorname{tg} \pi f_s T} \right)}$$

- при использовании согласованного  $Z$ -преобразования

$$n \geq \frac{\operatorname{arch} \left( \sqrt{\frac{A^2 - 1}{\varepsilon^2}} \right)}{\operatorname{arch} \left( \frac{\sin \pi f_c T}{\sin \pi f_s T} \right)}$$

6.2.3. Определение вида используемых ЦКЯ или биквадратных ячеек, на основе которых реализуется та или иная заданная АЧХ, определяется в зависимости от требований, которые предъявляются к входному и выходному процессам. Способы образования элементарных ячеек, а также их свойства рассмотрены в главе 4. При этом передаточная функция может быть реализована либо последовательным соединением элементарных ячеек, либо их параллельным, либо параллельно-последовательным. Очевидно, что минимальное количество операций умножения обеспечивает последовательная структура соединения ячеек.

6.2.4. На данном этапе определяется порядок используемой аппроксимирующей АЧХ функции и производится вычисление коэффициентов полиномов, однозначно связанных с положением нулей и полюсов на  $Z$ -плоскости. Отметим, что в настоящее время существует ряд методов расчета БИХ-фильтров [12, 15, 26, 28, 34, 37, 42, 43].

К таким методам можно отнести метод основанный на стандартной процедуре замены производной аналоговой функции, (в случае описания аналогового фильтра в форме дифференциального уравнения), ее конечной разностью при переходе к цифровому фильтру.

Другой метод основан на инвариантности импульсной характеристики. В этом методе осуществляется определение импульсной характеристики цифрового фильтра в виде равномерно расположенных отсчетов импульсной характеристики аналогового фильтра.

Наиболее употребительным является метод билинейного преобразования независимой переменной аналогового фильтра. В этом методе осуществляется процедура нелинейного преобразования независимой переменной аналогового фильтра.

Все эти методы основаны на использовании предварительных расчетов соответствующих аналоговых фильтров в соответствии с рис. 6.1,б.

6.2.4.1. Метод замены производной ее конечной разностью основывается на том, что в используемом для описания АФ дифференциальном уравнении производные соответствующего порядка аппроксимируются конечными разностями. В результате этого дифференциальное уравнение замещается разностным. Эта операция приводит к замене комплексной переменной  $p$  в передаточной функции АФ  $H(p)$  на комплексную переменную  $z$  в передаточной функции ЦМФ  $H(z)$ .

Наиболее простой переход от переменной  $p$  к переменной  $z$  осуществляется с использованием аппроксимации Эйлера.

Пусть имеем

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{\Delta y(nT)}{\Delta T} = \frac{y(nT) - y[(n-1)T]}{T}$$

где  $T = \Delta T$  – интервал дискретизации, выбираемый из условия выполнения теоремы Котельникова;  $nT$  – моменты времени, в которые берутся отсчеты. Частота дискретизации  $F_0 = 1/T$ .

Записав в операторной форме в плоскости переменной  $p$  и используя свойство Z-преобразования, получаем

$$py = \frac{y - yz^{-1}}{T},$$

откуда

$$p = \frac{1 - z^{-1}}{T}. \quad (6.21)$$

Здесь  $z^{-1} = \exp(-j\omega T)$  – оператор задержки на один такт, равный времени интервала дискретизации  $T$ .

Из выражения (6.21) нетрудно получить

$$z = \frac{1}{1 - pT}. \quad (6.22)$$

Выражение (6.22) совпадает с выражением (3.6), а, следовательно, видно, что изображение мнимой оси  $p$ -плоскости представляют собой окружность в  $Z$ -плоскости с радиусом 0,5 и с центром расположенным в точке 0,5. Левая половина  $p$ -плоскости переходит во внутрь этого круга, как показано на рис. 3.2, что свидетельствует об устойчивости получаемого ЦМФ.

Как указывалось в главе 3, требуемое положение полюсов, получаемое при таком преобразовании выполняется только для весьма узкополосных ФНЧ и ПФ, что существенно ограничивает применимость данного метода.

6.2.4.2. Метод инвариантности импульсной характеристики устанавливает следующую процедуру. Импульсная характеристика  $h(nT)$  результирующего ЦМФ представляет собой выборки импульсной характеристики  $h(t)$  соответствующего АФ и определяется [59]

$$h(nT) = h(t) \text{ при } t = nT. \quad (6.23)$$

Процедура проектирования включает в себя ряд шагов и изображена на рис. 6.9.

Импульсная характеристика  $h(nT)$  ЦМФ является аналогом дискретизированной импульсной характеристики АФ, что может сопровождаться эффектом «наложения» в частотной области. Для устранения этого эффекта частота дискретизации должна, как указывалось ранее, выбираться из условия выполнения теоремы Котельникова. Следовательно, данный метод применим для случаев, когда скорость спадания «краев» АЧХ синтезируемого фильтра достаточно высока, т.е. удовлетворяется условие

$$|H(j\omega)| \approx 0 \text{ при } |\omega| > \omega_c,$$

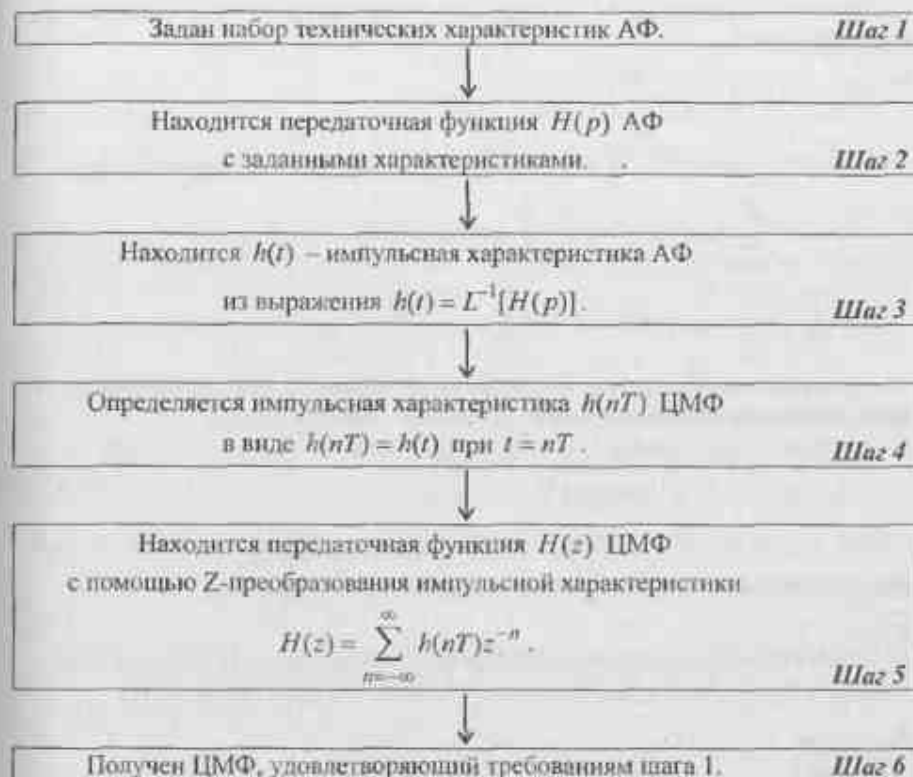


Рис. 6.9. Процедура расчета по методу инвариантности импульсной характеристики

Пусть задана передаточная функции  $H(p)$  в виде

$$H(p) = \frac{\sum_{l=0}^M a_l p^l}{\sum_{i=0}^N b_i p^i} = \sum_{i=1}^N \frac{\xi_i}{p - p_i}, \quad (6.24)$$

где  $N \geq M \geq 0$ ,  $b_N \neq 0$ ,  $b_0 \neq 0$ , а все полюсы  $p_i$  различны.

Тогда импульсная характеристика определяется в виде

$$h(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i \exp(p_i t) \cdot I(t), \quad (6.25)$$

где  $I(t)$  – единичная функция.

Подставляя (6.25) в (6.23), получаем дискретизированную импульсную характеристику

$$h(nT) = h(t)|_{t=nT} = \sum_{i=1}^N \xi_i \exp(p_i nT) \cdot \lambda(nT).$$

Передаточная функция  $H(z)$  ЦМФ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} H(z) &= T \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) z^{-n} = T \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^N \xi_i \exp(p_i nT) z^{-n} = \\ &= T \sum_{i=1}^N \xi_i \sum_{n=0}^{\infty} [\exp(p_i T) z^{-1}]^n = T \sum_{i=1}^N \frac{\xi_i}{1 - z^{-1} \exp(p_i T)}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Сравнение выражений (6.24) и (6.26) показывает, что для перехода от АФ к ЦМФ необходимо в каждой дроби выполнить переход

$$T \frac{\xi_i}{p - p_i} \rightarrow T \frac{\xi_i}{1 - z^{-1} \exp(p_i T)} = T \frac{\xi_i}{1 - z_{pi} z^{-1}} \quad (6.27)$$

откуда  $z_{pi} = \exp(p_i T) = \exp(\sigma_{pi} T) \exp(j\omega_{pi} T) = r_{pi} \exp(\varphi_{pi})$  — полюс цифровой элементарной ячейки у которой модуль  $r_{pi} < 1$  (т.к.  $\sigma_{pi} < 0$ ), а  $\varphi_{pi}$  — фазовый угол.

Рассмотрим отображение  $p$ -плоскости в  $Z$ -плоскость для метода инвариантности импульсной характеристики. Положим в выражении (6.27)  $\xi_i = 1$ ,  $p_i = 0$ .

Тогда

$$p = \frac{1 - z^{-1}}{T}. \quad (6.28)$$

Сравнение (6.28) с (3.4) показывает, что эти выражения полностью совпадают. Тогда, аналогично тому как было показано выше, мнимая ось  $p$ -плоскости отображается на  $Z$ -плоскости  $p = j\omega$  в кривую, описывающую окружность с радиусом 0,5 и с центром, расположенным в точке 0,5. Левая половина  $p$ -плоскости отображается во внутрь круга малого радиуса, как показано на рис. 3.2.

Следовательно, метод инвариантности импульсной характеристики аналогичен по свойствам методу замены производной конечной разностью.

Отметим, что подобное конформное отображение одного линейного пространства в другое, как указывалось в главе 3, называется согласованным (стандартным)  $Z$ -преобразованием.

6.2.4.3. Метод билинейного преобразования отличается от согласованного  $Z$ -преобразования тем, что он позволяет осуществлять переход от любых типов АФ к любым типам ЦМФ и подробно был рассмотрен в главе 3.

По определению, конформное отображение  $p$ -плоскости в  $Z$ -плоскость осуществляется при помощи соотношения (3.5)

$$p = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}},$$

и из соотношения (3.10), получаем

$$z^{-1} = \frac{2 - pT}{2 + pT}. \quad (6.29)$$

При билинейном преобразовании каждой точки в  $p$ -плоскости соответствует точка в  $Z$ -плоскости и наоборот. Из этого свойства следует, что отсутствует эффект наложения спектров при билинейной процедуре отображения.

Методика расчета ЦМФ на основе билинейного преобразования включает в себя, как и для рассмотренных ранее методов, нахождение подходящей передаточной функции  $H(p)$  АФ и применения к ней билинейного преобразования (6.29) для получения передаточной функции  $H(z)$ , т.е.

$$H(z) = H(p) \Big|_{p = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}.$$

При этом преобразовании сохраняются и частотные характеристики и свойства устойчивости.

Рассмотренные в [40, 42, 59] методы расчета позволяют по заданным требованиям АЧХ ЦМФ получать соответствующие значения весовых коэффициентов. Подробно эти методы будут рассмотрены далее.

6.2.5. Пятый этап проектирования заключается в определении требуемого уровня параллелизма входных данных, определяемого отношением частоты дискретизации входного процесса  $F_d$  к максимальной частоте данных, которые могут обрабатывать функциональные узлы многопроцессорного вычислительного устройства. В свою очередь, максимальная частота данных определяется производительностью  $\Pi$  каждого функционального узла и оценивается соотношением

$$\Pi_i = \frac{\theta_i}{T_{y3}} = \theta_i F_{y3},$$

где  $\theta_i$  — объем вычислений  $i$ -го узла,  $T_{y3}$  — время, в течение которого выполняется данный объем вычислений в одном узле.

Тогда, учитывая что в случае, когда производительность отдельных узлов одинакова, общая производительность  $\Pi$  вычислителя будет

$$\Pi = \sum_{i=1}^q \Pi_i = \sum_{i=1}^q \frac{\theta_i}{T_{y3}} = \frac{q \theta_i}{T_{y3}},$$

где  $q$  – общее количество функциональных узлов, реализующих требуемый алгоритм обработки.

В свою очередь, учитывая, что степень параллелизма определяется в виде  $m = F_0 / F_{y3}$ ,

требуемая производительность вычислителя может быть определена

$$P = q\theta_1 m / T_{y3}$$

Таким образом, изменение сложности алгоритма обработки при фиксированных значениях  $\theta_1$ ,  $m$  и  $T_{y3}$  приводит к изменению только затрат оборудования, определяемое величиной  $q$ .

6.2.6. На данном этапе производится синтез требуемой распараллеленной структуры выбранной из условий задачи базовой элементарной ячейки, и определение соответствующих величин весовых коэффициентов по полученным значениям полюсов и нулей согласно алгоритмов, рассмотренных в главе 5.

6.2.7. На данном этапе производится настройка МВС ПА на требуемую конфигурацию и проверка правильности полученных решений. При этом организация вычислительного процесса может быть осуществлена на основе параллельно-конвейерного принципа обработки информации.

Отметим, что более подробно эти вопросы будут обсуждаться далее.

### 6.3. Расчет параметров тангенсных цифровых многопроцессорных фильтров

Рассмотрим метод синтеза ЦМФ на основе тангенсной ЦКЯ, позволяющей получать все формы АЧХ для всех типов фильтров.

Передаточная функция любого типа тангенсных ЦМФ представляется в виде

$$H(z) = \prod_{j=1}^n \frac{1+z^{-1}r_{0j} \exp(j\varphi_{0j})}{1-z^{-1}r_{pj} \exp(j\varphi_{pj})} \quad (6.30)$$

где  $n$  – порядок фильтра, который определяет количество тангенсных ЦКЯ первого вида первого порядка в их каскадном соединении, структурная схема каждой из которых изображена на рис. 4.2, а функциональная – на рис. 4.18.

По заданным требованиям к АЧХ определяются нормированные параметры для данного типа фильтра, по которым вычисляется порядок фильтра  $n$ , и вспомогательные параметры для заданного вида аппроксимации АЧХ. Затем вычисляются координаты полюсов и нулей передаточной функции на  $Z$ -плоскости и вычисляются весовые коэффициенты каждой ячейки.

В табл. 6.1. приведены формулы перехода от заданных к нормированным параметрам ЦМФ, где  $f_c$  и  $f_r$  – нормированные полоса пропускания и переходная полоса ЦМФ на уровнях  $(1+\epsilon^2)^{-0.5}$  и  $A^{-1}$  соответственно;  $f_{cH}$  и  $f_{rH}$  – полоса пропускания и переходная полоса ФНЧ

на уровнях  $(1+\epsilon^2)^{-0.5}$  и  $A^{-1}$  соответственно;  $f_{cH}$  – ширина полосы пропускания ПФ при допустимой неравномерности АЧХ на уровне  $(1+\epsilon^2)^{-0.5}$ ;  $f_{cB}$  и  $f_{cP}$  – ширина полосы режекции ФВЧ и РФ на уровне  $A^{-1}$ ;  $f_{rH}$  – ширина переходной полосы ПФ на уровне  $A^{-1}$ ;  $f_{rB}$  и  $f_{rP}$  – ширина переходной полосы ФВЧ и РФ при допустимой неравномерности АЧХ в полосе пропускания  $(1+\epsilon^2)^{-0.5}$ . Кроме того, при расчете ПФ и РФ используется величина  $f_0$  – центральная частота полосы пропускания ПФ или полосы режекции РФ.

Таблица 6.1

Формулы перехода к нормированным параметрам ЦМФ

Нормированный параметр	Тип фильтра			
	ФНЧ	ПФ	ФВЧ	РФ
$f_c$	$f_{cH}$	$0,5 f_{cH}$	$\frac{1}{2T} - f_{rB}$	$\frac{1}{2T} - 0,5 f_{rP}$
$f_r$	$f_{rH}$	$0,5 f_{rH}$	$\frac{1}{2T} - f_{cB}$	$\frac{1}{2T} - 0,5 f_{cP}$

Величина  $n$  и вспомогательные параметры  $R_{0j}$ ,  $\theta_{0j}$  и  $R_{pj}$  определяются по формулам, полученным в [47] для четырех видов аппроксимации по выражениям, приводимым в табл. 6.2; причем параметр  $\theta_j$  будет

$$\theta_j = \begin{cases} \pi(2j-1)/2n, & j=1,2,\dots,n/2 \text{ при четном } n, \\ \pi j/n, & j=0,1,2,\dots,(n-1)/2 \text{ при нечетном } n. \end{cases}$$

В табл. 6.2  $K(k)$ ,  $K(k_1)$ ,  $K(k')$ ,  $K(k'_1)$  – полные эллиптические интегралы 1-го рода с модулями  $k$ ,  $k_1$ ,  $k'$ ,  $k'_1$ ;  $\operatorname{sn}(E, k)$ ,  $\operatorname{cn}(E, k)$ ,  $\operatorname{dn}(E, k)$ ,  $\operatorname{sn}(U_j, k)$ ,  $\operatorname{cn}(U_j, k)$ ,  $\operatorname{dn}(U_j, k)$  – эллиптические функции Якоби с модулями  $k'$  и  $k$  [8, 36, 65, 66]. Интегралы  $K(k)$ ,  $K(k_1)$ ,  $K(k')$ ,  $K(k'_1)$ , как правило, находятся по таблицам по величинам, называемым модулярными углами

$$\alpha = \arcsin k, \quad \alpha_1 = \arcsin k_1, \quad \alpha' = \arcsin k', \quad \alpha'_1 = \arcsin k'_1.$$

Величины  $\operatorname{cn}(U_j, k)$ ,  $\operatorname{dn}(U_j, k)$ ,  $\operatorname{cn}(E, k')$  и  $\operatorname{dn}(E, k')$ , находятся [36]

$$\operatorname{cn}(U_j, k) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(U_j, k)}, \quad \operatorname{dn}(U_j, k) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(U_j, k)},$$

$$\operatorname{cn}(E, k') = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(E, k')}, \quad \operatorname{dn}(E, k') = \sqrt{1 - (k')^2 \operatorname{sn}^2(E, k')}.$$

Таблица 6.2

Вспомогательные параметры

Вид аппроксимации АЧХ	Расчетные формулы
Полиномом Баттерворта	$n \geq \ln \left[ \sqrt{(A^2 - 1)/\epsilon} \right] / \ln \left[ \operatorname{tg}(\pi f_c T) / \operatorname{tg}(\pi f_s T) \right],$ $R_{pj} = \operatorname{tg}(\pi f_c T) / \epsilon^{1/2n}, R_{0j} = -\infty, \theta_{pj} = \theta_j.$
Полиномом Чебышева 1-го типа	$n \geq \operatorname{arch} \left[ \sqrt{(A^2 - 1)/\epsilon} \right] / \operatorname{arch} \left[ \operatorname{tg}(\pi f_c T) / \operatorname{tg}(\pi f_s T) \right],$ $R_{pj} = \operatorname{tg}(\pi f_c T) \{ \sin^2 \theta_j \operatorname{ch}^2 [(1/n) \operatorname{arsh}(1/\epsilon)] + \cos^2 \theta_j \operatorname{sh}^2 [(1/n) \operatorname{arsh}(1/\epsilon)] \}^{1/2}$ $R_{0j} = -\infty, \theta_{pj} = \operatorname{arctg} \frac{\sin \theta_j \operatorname{ch} [(1/n) \operatorname{arsh}(1/\epsilon)]}{\cos \theta_j \operatorname{sh} [(1/n) \operatorname{arsh}(1/\epsilon)]}$
Полиномом Чебышева 2-го типа	$n \geq \operatorname{arch} \left[ \sqrt{(A^2 - 1)/\epsilon} \right] / \operatorname{arch} \left[ \operatorname{tg}(\pi f_c T) / \operatorname{tg}(\pi f_s T) \right],$ $R_{pj} = \operatorname{tg}(\pi f_c T) / \{ \sin^2 \theta_j \operatorname{ch}^2 B + \cos^2 \theta_j \operatorname{sh}^2 B \}^{1/2},$ $R_{0j} = \operatorname{tg}(\pi f_s T) / \sin \theta_j, \theta_{pj} = \operatorname{arctg} \frac{\sin \theta_j \operatorname{ch} B}{\cos \theta_j \operatorname{sh} B},$ <p>где <math>B = \operatorname{arsh} \{ \operatorname{sch} [n \operatorname{arch} (\operatorname{tg}(\pi f_c T) / \operatorname{tg}(\pi f_s T))] \} / n</math>.</p>
Эллиптическими функциями	$n \geq K(k)K(k_1) / K(k')K(k_1'),$ $R_{pj} = \operatorname{tg}(\pi f_c T) \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cn}^2(E, k) \operatorname{cn}^2(U_j, k)}{1 - \operatorname{sn}^2(E, k) \operatorname{dn}^2(U_j, k)}},$ $R_{0j} = \operatorname{tg}(\pi f_s T) / \operatorname{sn}(U_j, k),$ $\theta_{pj} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sn}(U_j, k) \operatorname{dn}(E, k')}{\operatorname{cn}(U_j, k) \operatorname{dn}(U_j, k) \operatorname{sn}(E, k') \operatorname{cn}(E, k')},$ $k = \operatorname{tg}(\pi f_c T) / \operatorname{tg}(\pi f_s T), k_1 = \epsilon / \sqrt{A^2 - 1},$ $k' = \sqrt{1 - k^2}, k_1' = \sqrt{1 - k_1^2}, U_j = 2K(k') \theta_j / \pi,$ $E = \frac{K(k')}{K(k_1')} \operatorname{arsh} \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \Big _{k_1 \rightarrow 0} = \frac{K(k') \operatorname{arsh}(1/\epsilon)}{n \ln \left[ \frac{2(1 + \sqrt{k'})}{(1 - \sqrt{k'})} \right]}$

Величины  $\operatorname{sn}(U_j, k)$  и  $\operatorname{sn}(E, k')$  могут быть получены с использованием формулы УВ II 358, Ж84 (108) из [63]

$$\operatorname{sn}(U_j, k) = \frac{2\pi}{kK(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-0.5}}{1 - q^{2n-1}} \sin \left[ \frac{(2n-1)\pi U_j}{2K(k)} \right],$$

$$\operatorname{sn}(E, k') = \frac{2\pi}{k'K(k')} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-0.5}}{1 - q^{2n-1}} \sin \left[ \frac{(2n-1)\pi E}{2K(k')} \right],$$

где  $q = \exp \left( -\frac{\pi K(k')}{K(k)} \right)$ .

Отметим, что ряды в последних выражениях быстро сходятся.

Далее, из вспомогательных параметров, полученных по расчетным формулам табл. 6.2, вычисляются

$$r_{pj} = \sqrt{\frac{1 + R_{pj}^2 - 2R_{pj} \cos \theta_{pj}}{1 + R_{pj}^2 + 2R_{pj} \cos \theta_{pj}}}; \quad r_{0j} = 1;$$

$$\varphi_{pj} = \arccos \frac{1 - R_{pj}^2}{\sqrt{(1 + R_{pj}^2)^2 - 4R_{pj}^2 \cos^2 \theta_{pj}}}; \quad \varphi_{0j} = \arccos \frac{R_{0j}^2 - 1}{R_{0j}^2 + 1};$$

$$\varphi_n = 2\pi f_n T. \quad (6.31)$$

Определение координат полюсов и нулей передаточной функции производится для данного типа фильтра по результатам, полученным из последних выражений в соответствии с табл. 6.3.

В табл. 6.3 индекс  $i$  обозначает номер ячейки в каскадном соединении

$$i = \begin{cases} 2j - 1 & \text{при четном } n, \\ 2j & \text{при нечетном } n, \end{cases}$$

причем получающиеся значения координат нулей и полюсов ячейки с нулевым номером ( $i = 0$ ) отбрасываются.

На последнем этапе расчета тангенсного ЦМФ определяются весовые коэффициенты в ячейках согласно выражений

$$\beta_{11i} = \beta_{22i} = r_{pi} \cos \varphi_{pi} = r_{p^*i} \cos \varphi_{p^*i},$$

$$\beta_{21i} = -\beta_{12i} = r_{pi} \sin \varphi_{pi} = r_{p^*i} \sin \varphi_{p^*i},$$

$$\alpha_{11i} = \alpha_{22i} = r_{0i} \cos \varphi_{0i} = r_{0^*i} \cos \varphi_{0^*i},$$

$$\alpha_{21i} = -\alpha_{12i} = r_{0i} \sin \varphi_{0i} = r_{0^*i} \sin \varphi_{0^*i}. \quad (6.32)$$

Таблица 6.3  
Координаты полюсов и нулей передаточной функции ЦМФ

Тип фильтра	Координаты	
	полюсов	нулей
ФНЧ	$\varphi_{pHi} = \varphi_{pj}$ $r_{pHi} = r_{pH(i+1)} = r_{pj}$	$\varphi_{0Hi} = \varphi_{0j}$ $r_{0Hi} = r_{0H(i+1)} = r_{0j}$
	$\varphi_{pH(i+1)} = -\varphi_{pj}$	$\varphi_{0H(i+1)} = -\varphi_{0j}$
ФВЧ	$\varphi_{pBi} = \pi + \varphi_{pj}$ $r_{pBi} = r_{pB(i+1)} = r_{pj}$	$\varphi_{0Bi} = \pi + \varphi_{0j}$ $r_{0Bi} = r_{0B(i+1)} = r_{0j}$
	$\varphi_{pB(i+1)} = \pi - \varphi_{pj}$	$\varphi_{0B(i+1)} = \pi - \varphi_{0j}$
ПФ	$\varphi_{pPi} = \varphi_{pj}$ $r_{pPi} = r_{pP(i+1)} = r_{pj}$	$\varphi_{0Pi} = \varphi_{0j}$ $r_{0Pi} = r_{0P(i+1)} = r_{0j}$
	$\varphi_{pP(i+1)} = \varphi_{pj} - \varphi_{0j}$	$\varphi_{0P(i+1)} = \varphi_{0j} - \varphi_{0j}$
РФ	$\varphi_{pRi} = \pi + \varphi_{pj} + \varphi_{0j}$ $r_{pRi} = r_{pR(i+1)} = r_{pj}$	$\varphi_{0Ri} = \pi + \varphi_{0j} + \varphi_{0j}$ $r_{0Ri} = r_{0R(i+1)} = r_{0j}$
	$\varphi_{pR(i+1)} = \pi + \varphi_{0j} - \varphi_{pj}$	$\varphi_{0R(i+1)} = \pi + \varphi_{0j} - \varphi_{0j}$

В выражениях (6.32) знак «\*» соответствует индексам «H», «B», «П», «Р». При использовании распараллеленных ячеек производится соответствующий перерасчет весовых коэффициентов так, как показано в главе 5.

Нормированная АЧХ синтезированного тангенсного ЦМФ рассчитывается по выражению, полученному из (6.30) с учетом (4.36), и имеющего вид

$$\frac{H(\omega T)}{H_{\max}} = \prod_{i=1}^n \left( \frac{1-r_{pi}}{1+r_{oi}} \right) \sqrt{\frac{1+r_{oi}^2 + 2r_{oi} \cos(\omega T - \varphi_{oi})}{1+r_{pi}^2 - 2r_{pi} \cos(\omega T - \varphi_{pi})}} \quad (6.33)$$

В том случае, когда используются тангенсные биквадратные ячейки со структурной схемой, изображенной на рис. 4.23, то методика расчета остается аналогичной, и переход от АФ к требуемому ЦМФ осуществляется в соответствии с выражениями, приведенными в работах [34, 45, 68].

В том случае, когда синтезируются узкополосные фильтры, относительно частоты дискретизации ЦМФ на основе тангенсных биквадратных ячеек, то также может быть использована рассмотренная методика [69].

Передаточная функция на Z-плоскости описывается выражением:

- для ПФ и РФ (при  $\varphi_{0j} \geq 0, 1\pi$ ) будем иметь

$$H(z) = \prod_{j=1}^M H_j(z) = \prod_{j=1}^M \frac{z^2 - \alpha_{1j}z - \alpha_{2j}}{z^2 - \beta_{1j}z - \beta_{2j}} = \prod_{j=1}^M \frac{(z - z_{01j})(z - z_{02j})}{(z - z_{p1j})(z - z_{p2j})},$$

где  $z_{p1j}, z_{p2j}, z_{01j}, z_{02j}$  - координаты комплексно-сопряженных полюсов и нулей;

- для ФНЧ и ФВЧ порядок передаточной функции может быть как четным, так и нечетным.

Когда порядок четный, передаточная функция ЦМФ на основе биквадратных ячеек записывается как для ПФ и РФ.

Если порядок получается нечетным, то в этом случае передаточная функция для ФНЧ и ФВЧ будет

$$H(z) = H_0(z) \prod_{j=1}^M H_j(z),$$

где  $H_0(z) = (z - r_0)/(z - r_p)$  - передаточная функция действительной тангенсной ячейки.

Для указанных ячеек нормировка параметров АЧХ осуществляется согласно табл. 6.4.

Таблица 6.4  
Формулы перехода к нормированным параметрам ЦМФ

Нормированный параметр	Тип фильтра			
	ФНЧ	ПФ	ФВЧ	РФ
$f_c$	$f_{cH}$	$0,5 f_{cП}$	$\frac{1}{T} - f_{cB}$	$\frac{1}{T} - 0,5 f_{cP}$
$f_r$	$f_{rH}$	$0,5 f_{rП}$	$\frac{1}{T} - f_{rB}$	$\frac{1}{T} - 0,5 f_{rP}$

Далее осуществляется расчет вспомогательных параметров по выражениям, приведенным в табл. 6.2, производится определение положения нулей и полюсов на Z-плоскости согласно табл. 6.3, за исключением того, что  $\varphi_{0j} = \pi f_{0j} T$ , а затем определяются весовые коэффициенты

$$\beta_{1j} = 2r_{pi} \cos \varphi_{pi}, \beta_{2j} = -r_{pi}^2, \alpha_{1j} = 2r_{oi} \cos \varphi_{oi}, \alpha_{2j} = -r_{oi}^2$$

биквадратных ячеек в их каскадном соединении.

#### 6.4. Расчет параметров синусных ЦМФ

В тех случаях, когда не требуется реализовывать РФ и ФВЧ, т.е. отсутствует необходимость обязательной организации АЧХ с нулевыми коэффициентами передачи в требуемых точках частотной оси, представляет интерес рассмотрение методов синтеза фильтров, у которых имеются только обратные связи.

Применение таких ячеек позволяет реализовать синусные ФНЧ и ПФ с аппроксимацией АЧХ полиномами Баттерворта и Чебышева 1-го типа [42].

Передаточная функция синусного фильтра представляется в виде

$$H(z) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - z^{-1} r_{pi} \exp(j\theta_{pi})} \quad (6.34)$$

При синтезе синусных ЦМФ, аналогично тангенсным ЦМФ, осуществляется определение порядка  $n$  и величин коэффициентов обратной связи.

В табл. 6.5 приведены формулы перехода к нормированным параметрам.

Таблица 6.5

Формулы перехода к нормированным параметрам

Нормированный параметр	Тип фильтра	
	ФНЧ	ПФ
$f_c$	$f_{cH}$	$0,5 f_{cП}$
$f_r$	$f_{rH}$	$0,5 f_{rП}$

Приравнивая знаменатель передаточной функции фильтра для выбранной аппроксимации АЧХ величинам  $A$  и нулю и решая полученную систему из двух уравнений относительно переменных  $n$  и  $\pi f T$ , определяем порядок синусного фильтра  $n$  и координаты полюсов  $R_{pi} \exp(j\theta_{pi})$  в виде реальной  $x_i = \text{Re}[R_{pi} \exp(j\theta_{pi})]$  и мнимой  $y_i = \text{Im}[R_{pi} \exp(j\theta_{pi})]$  частей передаточной функции каждой ячейки на  $p$ -плоскости.

В табл. 6.6 приведены выражения для соответствующих аппроксимаций АЧХ.

Таблица 6.6

Вспомогательные параметры

Вид аппроксимации АЧХ	Расчетные формулы
Полиномом Баттерворта	$n \geq \ln \left[ \frac{\sqrt{(A^2 - 1)/\epsilon}}{\ln[\sin(\pi f_r T)/\sin(\pi f_c T)]} \right],$ $x_i = \text{sign}[\theta_{pi}] \text{Re}[R_{pi} \exp(j\theta_{pi})] = \epsilon^{-1/n} \cos \theta_{pi} \text{sign}[\theta_{pi}],$ $y_i =  \text{Im}[R_{pi} \exp(j\theta_{pi})]  = \epsilon^{-1/n}  \sin \theta_{pi} .$
Полиномом Чебышева 1-го типа	$n \geq \text{arch} \left[ \frac{\sqrt{(A^2 - 1)/\epsilon}}{\text{arch}[\sin(\pi f_r T)/\sin(\pi f_c T)]} \right],$ $x_i = \text{sign}[\theta_{pi}] \text{Re}[R_{pi} \exp(j\theta_{pi})] = \text{ch} \psi \cos \theta_{pi} \text{sign}[\theta_{pi}],$ $y_i =  \text{Im}[R_{pi} \exp(j\theta_{pi})]  = \text{sh} \psi  \sin \theta_{pi} , \quad \psi = \text{arch}(1/\epsilon)/n.$

В табл. 6.6 величина  $\theta_{pi} = (\pi/2)[(2i - n - 1)/(n + 1)]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  – номера ячеек в их каскадном соединении;

$$\text{sign}[\theta_{pi}] = \begin{cases} 1 & \text{при } \theta_{pi} > 0, \\ -1 & \text{при } \theta_{pi} < 0. \end{cases}$$

Вводя вспомогательные параметры

$$K_s = \sin \pi f_c T, \quad C_{is} = 1 - K_s^2(x_i^2 + y_i^2),$$

$$D_{is} = 0,5(\sqrt{C_{is}^2 + 4K_s^2 x_i^2} - C_{is}),$$

получим значения  $r_i$  и  $\varphi_i$  для  $i$ -го полюса передаточной функции ФНЧ прототипа на  $Z$ -плоскости в виде

$$r_i = (\sqrt{D_{is}} + \sqrt{D_{is} + 1})^{-2},$$

$$\varphi_i = \text{arctg} \frac{2x_i \sqrt{1 - K_s^2 x_i^2 / D_{is}}}{2K_s^2 x_i^2 / \sqrt{D_{is}} - \sqrt{D_{is}}}.$$

Для  $\theta_{pi} = 0$

$$r_i = 2K_s^2 + 1 - 2K_s \sqrt{K_s^2 + 1},$$

$$\varphi_i = 0.$$

Определение координат полюсов передаточной функции синусного фильтра с заданным видом АЧХ производится в соответствии с выражениями, приведенными в табл. 6.7.

Таблица 6.7

Координаты полюсов синусного ЦМФ

Тип фильтра	Координаты полюсов	
ФНЧ	$r_{pH} = r_i$	$\varphi_{pH} = \varphi_i$
ПФ	$r_{pП} = r_i$	$\varphi_{pП} = \varphi_i + \pi$

Здесь  $\varphi_i$  определяется из (6.31).

Далее определяются весовые коэффициенты  $\beta_{11i}$ ,  $\beta_{22i}$ ,  $\beta_{12i}$  и  $\beta_{21i}$  из выражений (6.32) для комплексной синусной ячейки и  $\beta_{1j}$  и  $\beta_{2j}$  для би-квадратной ячейки.

В случае распараллеленной обработки производится расчет весовых коэффициентов так, как показано в главе 5.

Нормированная АЧХ синтезированного синусного ЦМФ рассчитывается по выражению, полученному из (6.34) с учетом (4.21), и имеющего вид



$$\frac{H(\omega T)}{H_{\max}} = \prod_{i=1}^n \frac{1-r_{pi}}{\sqrt{1+r_{pi}^2-2r_{pi}\cos(\omega T-\varphi_{pi})}} \quad (6.35)$$

Поскольку ФНЧ и ПФ могут быть реализованы как в виде тангенсных ячеек, так и синусных, то целесообразно рассмотреть границы области их применения путем проведения сравнительного анализа по затратам оборудования при условии обеспечения равенства в обоих случаях величин  $\varepsilon$ ,  $A$ ,  $f_c$  и  $f_r$ .

Очевидно, что оба типа фильтров, в общем случае, имеют при одинаковых указанных параметрах разный порядок  $n$ . Поскольку затраты оборудования на реализацию прямой и обратной связей одинаковые, то, следовательно, используя выражения для определения  $n$ , приведенных в табл. 6.2 и табл. 6.6 соответственно, получаем следующие соотношения, позволяющие оценить целесообразность применения синусных фильтров при аппроксимации АЧХ:

а) полиномом Баттерворта

$$\mathcal{E}_B = 2 \frac{\ln[\sin(\pi f_r T)/\sin(\pi f_c T)]}{\ln[\operatorname{tg}(\pi f_r T)/\operatorname{tg}(\pi f_c T)]}$$

б) полиномом Чебышева 1-го типа

$$\mathcal{E}_C = 2 \frac{\operatorname{arch}[\sin(\pi f_r T)/\sin(\pi f_c T)]}{\operatorname{arch}[\operatorname{tg}(\pi f_r T)/\operatorname{tg}(\pi f_c T)]}$$

где  $\mathcal{E}_B$  и  $\mathcal{E}_C$  – выигрыш в затратах оборудования синусных фильтров по сравнению с тангенсными.

На рис. 6.10 и рис. 6.11 приведены зависимости выигрыша в затратах оборудования  $\mathcal{E}_B$  и  $\mathcal{E}_C$  при различных соотношениях  $f_r/f_c$  в зависимости от  $\pi f_c T$ .

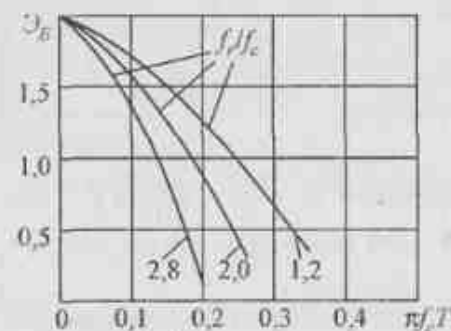


Рис. 6.10. Выигрыш в затратах оборудования при аппроксимации АЧХ полиномом Баттерворта

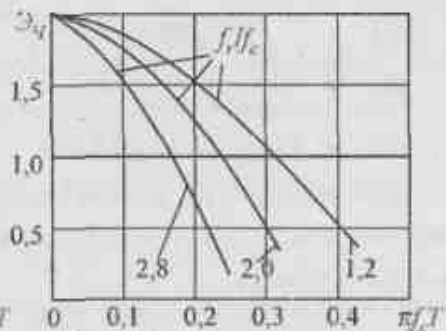


Рис. 6.11. Выигрыш в затратах оборудования при аппроксимации АЧХ полиномом Чебышева 1 типа

Очевидно, что синусные фильтры требуют меньших аппаратных затрат, чем тангенсные, однако при  $f_c > 0,3F_0$  их использование становится невыгодным.

Отметим, что аналогично тангенсным ЦМФ, рассчитываются синусные ЦМФ на основе использования биквадратных ячеек, структурная схема одной из которых приведена на рис. 4.24.

В том случае, когда порядок  $n$  тангенсного ЦМФ равен порядку  $n$  синусного ЦМФ при одинаковых значениях величин  $\varepsilon$ ,  $A$ ,  $f_c$  и  $f_r$ , формы получаемых АЧХ различны.

На рис. 6.12 приведены полученные по выражениям (6.33) и (6.35) АЧХ тангенсного и синусного ФНЧ с аппроксимацией Баттерворта.

Параметры этих фильтров имеют значения:

$$n = 7, F_0 = 50000 \text{ Гц}$$

$$f_c = 6000 \text{ Гц}, \varepsilon = 1,$$

$$f_r = 14000 \text{ Гц}, A = 100.$$

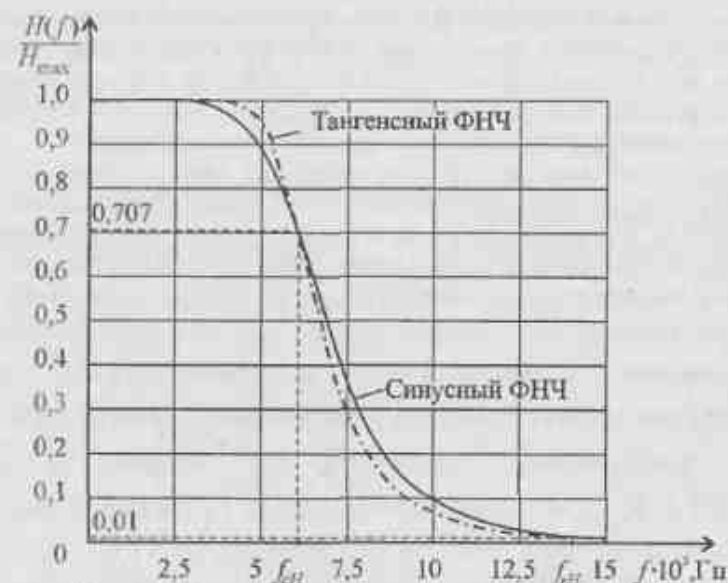


Рис. 6.12. Виды АЧХ тангенсного и синусного ФНЧ при одинаковых параметрах

Видно, что тангенсный ФНЧ имеет более высокие характеристики АЧХ, как в полосе пропускания, так и в переходной полосе по сравнению с синусным ФНЧ.

### 6.5. Расчет параметров квазитангенсных ЦМФ

Рассмотрим метод расчета ЦМФ на основе квазитангенсной ячейки, структурная схема которой изображена на рис. 4.15, а функциональная схема — изображена на рис. 4.22. Эти фильтры по затратам оборудования приближаются к синусным, а по свойствам — к тангенсным.

Рассмотрим метод расчета цифровых ФНЧ и ПФ, выполненных в виде каскадного соединения квазитангенсных ЦСЯ, передаточная функция которых имеет вид [40]

$$H(z) = \prod_{i=1}^n H_i(z) = \prod_{i=1}^n \frac{1 + z^{-1} r_{pi} \exp(-j\varphi_{pi})}{1 - z^{-1} r_{pi} \exp(-j\varphi_{pi})} \quad (6.36)$$

Расчет основывается на аппроксимации АЧХ либо по критерию ее монотонности, либо по критерию максимальной крутизны ее спада в переходной полосе пропускания. Из-за жесткой связи нулей и полюсов квадрат АЧХ квазитангенсных фильтров не выражается аналитически через известные аппроксимирующие полиномы, что накладывает ограничения на использование в расчетах аналитических выражений.

В связи с этим расчет таких фильтров представляет собой итерационную процедуру, в которой на первом этапе производится определение координат полюсов по методике расчета тангенсных фильтров с аппроксимациями АЧХ полиномами или Баттерворта или Чебышева 1-го типа, а на втором этапе производится алгоритмическая корректировка их значений.

Использование методики расчета тангенсных фильтров связано с тем, что при указанных видах аппроксимации АЧХ квазитангенсные фильтры с уменьшением полосы пропускания по всем параметрам асимптотически приближаются к соответствующим ФНЧ и ПФ тангенсных фильтров, в том числе и по чувствительности АЧХ к изменению величин коэффициентов.

Расчет производится следующим образом. Для заданных значений полосы пропускания  $f_c$  и переходной полосы  $f_r$  на уровнях  $(1 + \varepsilon^2)^{-1/2}$  и  $A^{-1}$  соответственно, а также для центральной частоты  $f_n$  (для ПФ) рассчитываются нормированные, относительно  $2\pi$ , величины  $\varphi_c = 2\pi f_c T$ ,  $\varphi_r = 2\pi f_r T$  и  $\varphi_n = 2\pi f_n T$ . При этом, в отличие от тангенсных фильтров, величина  $\varphi_c$  может быть задана только в пределах  $[0, \pi]$ .

Затем, исходя из условия обеспечения требуемого подавления на границах переходной полосы, определяется порядок фильтра  $n$ , процедура которого различна для двух случаев значений  $\varphi_r$ .

*Первый случай:*  $\varphi_r \leq 2\pi - \varphi_c$ .

При этом точки, соответствующие границам переходной полосы, попадают на интервал спада АЧХ, где АЧХ квазитангенсных фильтров близка к тангенсным.

Поэтому расчет порядка фильтра  $n$  производится по выражениям, приводимым в табл. 6.2, для обоих видов аппроксимаций АЧХ.

*Второй случай:*  $\varphi_r > 2\pi - \varphi_c$ .

При этом точки, соответствующие границам переходной полосы, попадают в интервал  $[\pi + \varphi_n - 0,5\varphi_c, \pi + \varphi_n + 0,5\varphi_c]$ , где, в силу свойства АЧХ квазитангенсных ЦСЯ, принимает либо максимально гладкий, либо равноволновый характер и уровень подавления не превышает своего значения  $A_{\max}$ . Величина  $A_{\max}$  определяется величинами  $\varphi_c$ ,  $\varepsilon$  и  $n$ .

Однако для указанных видов аппроксимаций АЧХ отношение  $20 \lg A_{\max} / n$  можно представить функцией одного аргумента

$$R_p = \text{tg}(0,5\varphi_c) / \varepsilon^{1/n} \quad (6.37)$$

На рис. 6.13 изображены зависимости, полученные при расчете квазитангенсных фильтров с максимально гладкой и равноволновой аппроксимациями.

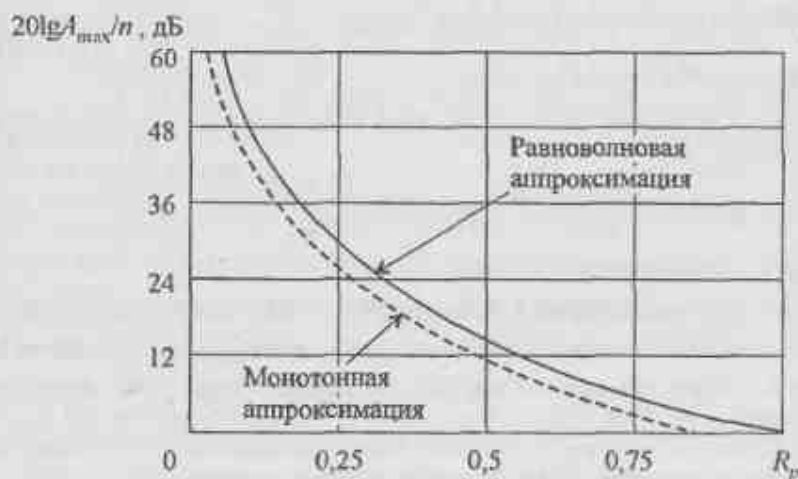


Рис. 6.13. Зависимости уровня подавления  $A_{\max}$  от величины  $n$ ,  $\varphi_c$  и  $\varepsilon$ .

Порядок фильтра  $n$  в этом случае определяется итеративно. Первоначально, задавшись  $n = 2$ , осуществляется проверка по рис. 6.13 с использованием выражения (6.37) на соответствие полученного значения  $A_{\max}$  заданному значению  $A$ .

В случае неудовлетворения указанному требованию, увеличивают  $n$  на единицу и повторяют указанный процесс до выполнения условия  $A \geq A_{\max}$ . Отметим, что независимо от значения  $\varphi_c$ , получаемая в этом случае ширина переходной полосы будет не более  $2\pi - \varphi_c$ .

Дальнейший расчет производится в соответствии с выбранной аппроксимацией АЧХ.

6.5.1. Для максимально гладкой аппроксимации АЧХ определяются параметры фильтра по алгоритму, который включает в себя следующие шаги.

Шаг 1. Рассчитываются координаты полюсов передаточной функции в виде реальной  $x_i$  и мнимой  $y_i$  частей  $i$ -го звена ФНЧ на  $p$ -плоскости

$$x_i = R_{pi} \cos \theta_{pi}, \quad y_i = R_{pi} \sin \theta_{pi},$$

где

$$\theta_{pi} = \pi(2i-1-n)/2n, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (6.38)$$

а  $R_{pi}$  определяется из (6.37).

Шаг 2. Определяются значения реальной  $\operatorname{Re} z_{pi}$  и мнимой  $\operatorname{Im} z_{pi}$  частей  $i$ -го полюса передаточной функции нормированного цифрового фильтра

$$\operatorname{Re} z_{pi} = (1 - x_i^2 - y_i^2) / (1 + x_i^2 + y_i^2 + 2x_i); \quad (6.39)$$

$$\operatorname{Im} z_{pi} = 2y_i / (1 + x_i^2 + y_i^2 + 2x_i).$$

Шаг 3. Находятся искомые значения модуля и фазы  $i$ -го полюса квазитангенсного ЦМФ

$$r_{pi} = \sqrt{(\operatorname{Re} z_{pi})^2 + (\operatorname{Im} z_{pi})^2}, \quad \varphi_{pi} = \arctg \frac{\operatorname{Im} z_{pi}}{\operatorname{Re} z_{pi}} + \varphi_n. \quad (6.40)$$

Здесь  $\varphi_n$  определяется из (6.31).

6.5.2. Для равноволновой аппроксимации АЧХ, вследствие указанных свойств квазитангенсного ЦКЯ при  $\varphi_c \leq \pi/3$ , возможна использование методики расчета тангенсного фильтра с аппроксимацией АЧХ полиномом Чебышева 1-го типа. При этом отклонение в полосе пропускания рассчитанных АЧХ от требуемых не превышает 6-7%. Отметим, что с увеличением  $\varphi_c$  вершина АЧХ в полосе пропускания принимает в этом случае вид спадающей к краям кривой.

Для расчета квазитангенсного фильтра с  $\varphi_c$  в интервале  $[0, \pi]$  может быть использован алгоритм разностной коррекции, заключающийся в итерационном пересчете координат полюсов в зависимости от отклонений рассчитываемой АЧХ от требуемой.

Алгоритм включает в себя следующие шаги.

Шаг 1. Задаются первоначальные значения  $E_i = \varepsilon$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  и вычисляются вспомогательные параметры

$$B = \operatorname{tg} 0,5\varphi_c, \quad \alpha = 1 - (1 + \varepsilon^2)^{-1/2}.$$

Шаг 2. Определяются координаты полюсов передаточной функции в виде реальной  $x_i$  и мнимой  $y_i$  частей  $i$ -го звена ФНЧ-прототипа из  $p$ -плоскости

$$x_i = B \cos \theta_{pi} \operatorname{ch} \psi_{pi}, \quad y_i = B \sin \theta_{pi} \operatorname{sh} \psi_{pi},$$

где  $\psi_{pi} = \operatorname{arsh}(1/E_i)/n$ , а  $\theta_{pi}$  определяется из (6.38).

Шаг 3. По полученным значениям  $x_i$  и  $y_i$  с использованием выражений (6.39) и (6.40) определяются модуль  $r_{pi}$  и фаза  $\varphi_{pi}$  полюса каждой квазитангенсной ЦКЯ.

Шаг 4. Для полученных значений полюсов с использованием выражения (6.36) и учетом (4.42) рассчитывается АЧХ согласно выражения

$$\frac{H(\omega T)}{H_{\max}} = \prod_{i=1}^n \left( \frac{1 - r_{pi}}{1 + r_{pi}} \right) \sqrt{\frac{1 + r_{pi}^2 + 2r_{pi} \cos(\omega T - \varphi_{pi})}{1 + r_{pi}^2 - 2r_{pi} \cos(\omega T - \varphi_{pi})}}. \quad (6.41)$$

Затем определяется погрешность аппроксимации  $\delta$ , если она не превышает требуемую, процесс вычисления прекращается. В противном случае выполняются следующие шаги.

Шаг 5. Определяются нормированные значения  $D_i$  отклонений АЧХ от требуемых на частотах  $\varphi_{pi}$

$$D_i = (H_{\max} - H_i) / H_{\max},$$

где  $H_{\max}$  - максимальное значение коэффициента передачи квазитангенсного ЦМФ;  $H_i$  - значение коэффициента передачи на частоте  $\varphi_{pi}$ .

Шаг 6. Определяются новые значения  $E_i$  по выражению

$$E_i = \sqrt{\left( 1 - \alpha \frac{\alpha + D_i}{\alpha + D_n} \right)^{-2} - 1},$$

после чего расчет повторяется с шага 2.

Скорость сходимости данного алгоритма тем выше, чем меньше значение  $\varphi_c$ . Отметим, что центрально-симметричное расположение на  $Z$ -плоскости нулей и полюсов квазитангенсного фильтра накладывает ограничение на аппроксимацию АЧХ. В результате при  $\varphi_c$  близких к  $\pi$  и малых значениях  $\alpha$  условие равноволновости может быть не достигнуто.

На рис. 6.14 и рис. 6.15 изображены АЧХ предельно широкополосных квазитангенсных фильтров (КТФ) (сплошная кривая), рассчитанных по данной методике для двух случаев аппроксимации АЧХ в сравнении с АЧХ

соответствующих тангенсных фильтров (ТФ) (штриховая кривая). В обоих случаях в полосе  $[\pi + \varphi_c - 0,5\varphi_c, \pi + \varphi_c + 0,5\varphi_c]$  уровень подавления изменяется в пределах  $[A_{\max} / \sqrt{1 + \varepsilon^2}, A_{\max}]$ .

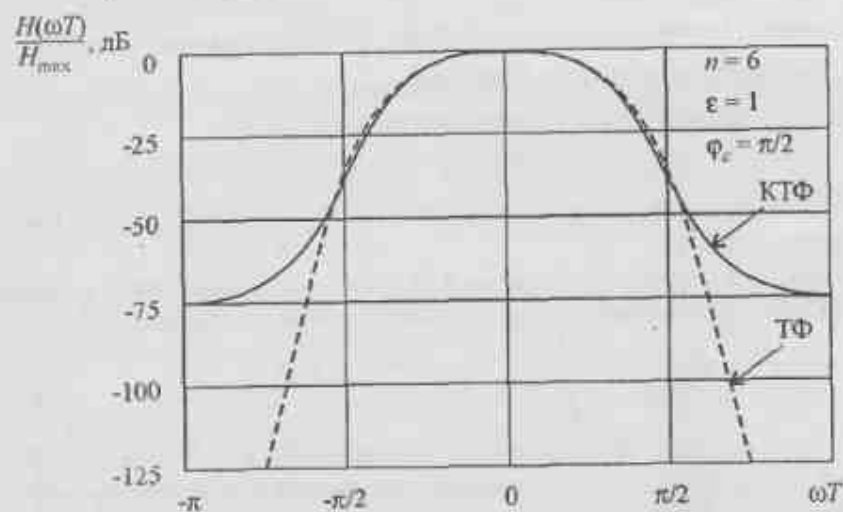


Рис. 6.14. Максимально гладкая аппроксимация АЧХ

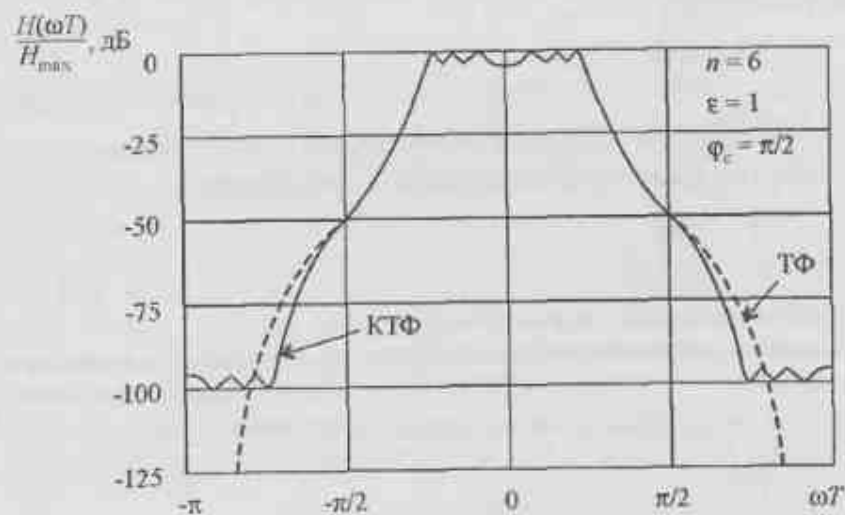


Рис. 6.15. Равнорippleвая аппроксимация АЧХ

Анализ частотных характеристик показывает, что в случае равноволюной аппроксимации квазитангенсный фильтр имеет значение переходной полосы меньше, чем у соответствующего тангенсного.

На рис. 6.16 изображена зависимость уменьшения ширины переходной полосы квазитангенсного фильтра, рассчитанного по данной методике, в сравнении с шириной полосы тангенсного фильтра при равных значениях  $n$ ,  $\varphi_c$  и  $\varepsilon$ .

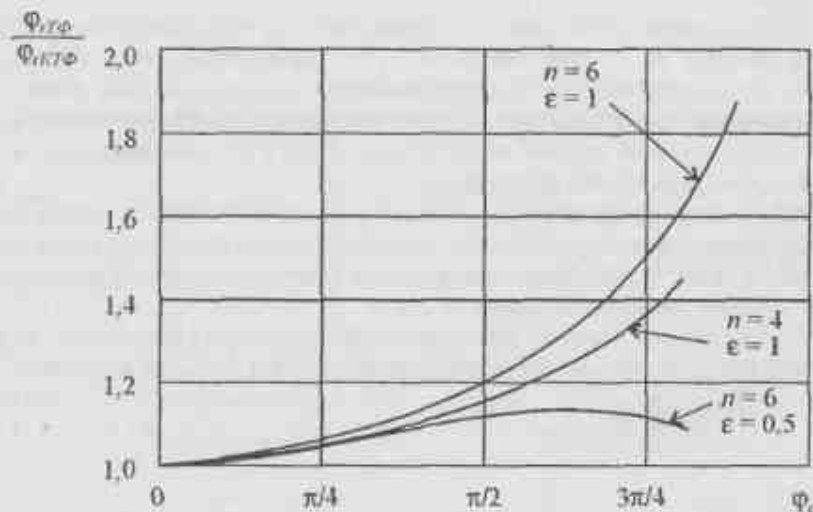


Рис. 6.16. Зависимости уменьшения переходной полосы КТФ по сравнению с ТФ

Следовательно, целесообразно использовать в ЦМФ квазитангенсные ЦКЯ для построения ФНЧ и ПФ при  $\varphi_c < \pi$  с использованием приведенной методики расчета.

При этом аппаратные затраты приближаются к аппаратным затратам синусных ЦМФ, а параметры АЧХ превышают параметры АЧХ тангенсных ЦМФ при равных значениях величин  $n$ ,  $\varphi_c$  и  $\varepsilon$ .

Отметим, что весовые коэффициенты квазитангенсных ЦКЯ по полученным значениям координат полюсов вычисляются по выражениям (6.32).

При распараллеленной обработке входных данных необходимо использовать изложенный в главе 5 подход для получения соответствующих структур распараллеленных квазитангенсных ЦКЯ и произвести необходимый перерасчет весовых коэффициентов.

## 6.6. Выводы

В данной главе рассмотрены методы синтеза ЦМФ с БИХ, ориентированные на применение в качестве основного звена соответствующих комплексных ячеек, которые могут быть реализованы, в частности, в распараллеленном виде. Очевидно, что полученные результаты могут быть легко использованы и при программной реализации требуемых частотно-избирательных характеристик на универсальных ЦВМ, в том числе и на персональных ЭВМ (ПЭВМ).

Отличительной особенностью применения тех или иных комплексных ячеек является то, что синтезируемые на их основе ЦМФ имеют арифметически симметричные АЧХ относительно той или иной особой точки на нормированной частотной оси. При этом для ФНЧ и ФВЧ ЦМФ такой особой точкой является нулевая частота, а для ПФ и РФ — центральная частота полосы пропускания или режекции.

Использование биквадратных ячеек и соответствующих частотных преобразований, приводит в принципе к арифметически несимметричной форме АЧХ ПФ и РФ и которые одновременно имеют геометрическую симметрию относительно особых точек.

Рассмотренные методы синтеза позволяют получать ЦМФ с БИХ, которые реализуют обработку сигналов в режиме работы «скользящее» окно.

## 7. ЦИФРОВЫЕ МНОГОПРОЦЕССОРНЫЕ ФИЛЬТРЫ С КОНЕЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

## 7.1. Вводные замечания

ЦМФ с конечными импульсными характеристиками (КИХ) обладают рядом таких свойств, которые являются желательными с точки зрения их устойчивости и реализуемости. К таким свойствам могут быть отнесены возможности реализации ЦМФ с КИХ, имеющими строго линейную ФЧХ при произвольной АЧХ, либо иметь заданную ФЧХ при постоянной АЧХ. Отметим, что ЦМФ с КИХ лежат в основе построения цифровых многопроцессорных согласованных фильтров, у которых АЧХ описывается огибающей спектра обрабатываемого сигнала, а ФЧХ имеет закон изменения, определяемый фазовым спектром обрабатываемого сигнала. В свою очередь, цифровой многопроцессорный вычислитель, реализующий алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), может рассматриваться также как специализированный ЦМФ с КИХ.

К основным свойствам ЦМФ с КИХ относят [26, 37, 45]:

- простота реализации заданной ФЧХ;
- рекурсивная организация вычислительного процесса не требует проверки на устойчивость;
- реализация ЦМФ с АЧХ, имеющими «крутые склоны», требует наличия импульсной характеристики с большим числом отсчетов, и, как следствие, как больших затрат оборудования, так и объема вычислений;
- шумы вычислений, возникающие за счет выполнения арифметических операций с конечной точностью, легко минимизируются.

Известно, что ЦМФ с БИХ обладают замкнутыми процедурами расчетов. Однако, получение требуемых АЧХ не всегда позволяет одновременно получить заданные ФЧХ. В противоположность этому, ЦМФ с КИХ могут достаточно просто обеспечить требуемые параметры ФЧХ независимо от АЧХ.

ЦМФ с КИХ может быть записан в форме [70]

$$\dot{y}_n = \sum_{k=-N}^{k=N} \dot{h}_k \dot{x}_{n-k}, \text{ при } \dot{h}_k = \dot{h}_{-k}.$$

При помощи такой записи для соответствующих значений  $\dot{h}_k$  можно получать ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ как для режимов работы «сканущее», так и «скользящее» окно.

Существует, как показано в [26], несколько методов проектирования рекурсивных фильтров, среди которых наиболее известны: метод связанный с классической интерполяцией и формулой дифференцирования для равноотстоящих данных; метод, вытекающий из приближения рядом Фурье; метод модифицированного ряда Фурье (метод весовых окон); метод использующий аппроксимацию по методу наименьших квадратов; метод Чебышевской (равноволновой) аппроксимации.

Классическим формулам интерполяции и дифференцирования для равноотстоящих данных можно непосредственно придать цифровую форму с помощью соответствия между оператором опережения, используемым в численном анализе и оператором  $z$  в  $Z$ -преобразовании. При обычном применении этих формул получают фильтры низких частот и дифференцирующие фильтры с требуемыми АЧХ только на очень низких частотах (относительно частоты дискретизации). Эти методы соответствуют использованию первых нескольких членов разложения выражений, описывающих требуемые АЧХ, в степенной ряд вблизи нулевой частоты. Применение этих методов ограничено и поэтому они подробно рассматриваться не будут.

### 7.2. Метод ряда Фурье

Метод ряда Фурье и связанные с ним методы отличаются значительной гибкостью [26]. Метод ряда Фурье состоит в разложении выражения, описывающего АЧХ требуемого аналогового фильтра, в ряд Фурье в полосе  $|F| < F_0/2$ . Получаемые после дискретизации частотная и импульсная характеристики рекурсивного фильтра в комплексной форме имеют вид

$$H(e^{j\omega nT}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \dot{h}_n \exp(-j\omega nT), \quad (7.1)$$

$$\dot{h}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\omega nT}) \exp(j\omega nT) d\omega.$$

Видно, что коэффициенты Фурье  $\dot{h}_n$  совпадают с коэффициентами импульсной характеристики ЦМФ. Однако использование непосредственно соотношений (7.1) для проектирования КИХ-фильтров связано с двумя трудностями [37]. Во-первых, импульсная характеристика имеет бесконечную длину, поскольку суммирование в (7.1) происходит в бесконечных пре-

делах. Во-вторых, фильтр физически нереализуем, так как импульсная характеристика начинается в  $-\infty$ , т. е. никакая конечная задержка не сможет сделать фильтр физически реализуемым.

Одним из методов получения КИХ-фильтра, аппроксимирующего заданную АЧХ, заключается в усечении ряда Фурье (7.1) при величине  $n \geq \pm M$ . Такое усечение приводит к явлению Гиббса в частотной области, заключающегося в том, что наблюдаются выбросы на края полосы пропускания (задерживания) фильтра, составляющие примерно 9% вверх и 5% вниз от установившегося значения.

Предварительно рассмотрим, от чего зависит в КИХ-фильтрах ширина переходной полосы. Поскольку, как отмечалось, единственным путем получения физически реализуемой импульсной характеристики конечной длины является усечение импульсной характеристики бесконечной длины, то если

$$\dot{h}_n = \begin{cases} \dot{h}_{in} & \text{при } -M \leq n \leq M; \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

то можно требующую импульсную характеристику представить в виде

$$\dot{h}_n = \dot{h}_{in} w_n,$$

где для рассматриваемого случая

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{при } -M \leq n \leq M; \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Использование теоремы о комплексной свертке показывает, что результирующая АЧХ является групповой сверткой идеальной АЧХ с преобразованием Фурье временного окна  $\dot{h}_{in}$ .

Рассмотрим идеализированный пример.

Пусть имеется в частотной области идеальное прямоугольное окно с шириной полосы  $F$  Гц и единичной площадью, условно изображенное штриховой линией на рис. 7.1 [70].

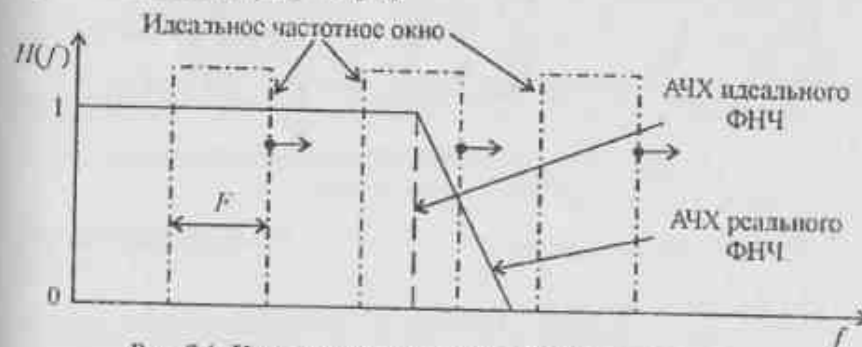


Рис. 7.1. Пример влияния идеального частотного окна на АЧХ идеального ФНЧ

Такой фильтр обладает импульсной характеристикой вида  $\sin x/x$ , расположенной на оси времени в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ , у которой нули размещены через временные интервалы  $1/F$ .

Очевидно, что если мысленно представить свертывание этого прямоугольного окна идеального ФНЧ, движущегося по его исходной АЧХ, то будет видно (если считать окно достаточно узким), что в начале получается некоторое постоянное значение до тех пор, пока окно не приблизится к точке разрыва функции. Как только окно проходит точку изгиба, сглаженное значение будет линейно уменьшаться (штрих-пунктирная линия).

Когда окно полностью пройдет через другую точку изгиба, сглаженное значение станет равным нулю. Следовательно, можно в качестве решения исходной задачи нахождения аппроксимирующего выражения для разрывной функции, аппроксимировать функцию путем интерполяции прямой линии между двумя частями. Ширина переходной полосы точно равна ширине полосы  $F$  используемого прямоугольного окна.

В свою очередь, если использовать прямоугольное временное окно длительностью  $MT$ , то его преобразование Фурье в частотной области дает функцию вида  $\sin x/x$  с нулями на частотной оси, расположенными через частотные интервалы  $1/MT$ . В результате аналогичного, как и на рис. 7.1, движения частотного окна вида  $\sin x/x$  (штрих-пунктирная линия), вдоль идеальной АЧХ ФНЧ (пунктирная линия), получается АЧХ, имеющая вид, изображенный на рис. 7.2 сплошной линией.

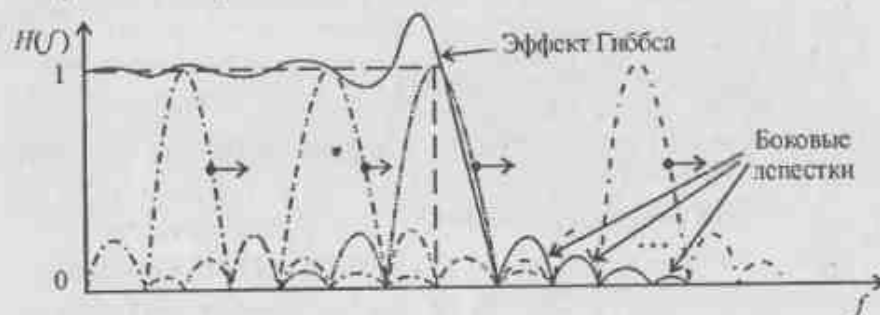


Рис. 7.2. Пример влияния прямоугольного временного окна на АЧХ идеального ФНЧ

Очевидно, что чем более узкое частотное окно, тем точнее приближение к идеальному ФНЧ. Однако сужение окна до нуля не приводит к уменьшению боковых лепестков (БЛ).

Одним из методов борьбы с БЛ в ЦМФ с КИХ является использование весовой обработки данных.

### 7.3. Весовая обработка данных

Вне зависимости от того, какую характеристику описывает последовательность отсчетов данных, представленных в цифровой форме – входную реализацию  $\hat{x}_n$  или отсчеты импульсной характеристики  $\hat{h}_n$ , эти данные подвергаются одинаковым видам преобразований. В том случае, если эти данные описывают импульсную характеристику  $\hat{h}_n$  и подвергаются дискретному преобразованию Фурье (ДПФ), то получаемые результаты описывают отсчеты АЧХ. А если эти данные описывают отсчеты сигнала  $\hat{x}_n$ , то их ДПФ называется дискретным спектром.

Крутизна спада АЧХ определяет разрешающую способность и зависит от числа обрабатываемых отсчетов  $N$ . При этом имеющуюся запись данных конечной длительности (или корреляционную последовательность конечной длительности) удобно рассматривать как некоторую часть соответствующей бесконечной последовательности, видимую через применяемое временное окно [35]. Например, последовательность наблюдаемых данных  $\hat{x}_n$  из  $N$  отсчетов математически можно записать как произведение прямоугольной функции единичной амплитуды

$$\text{rect}[n] = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq n \leq N-1; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и бесконечной последовательности  $\hat{x}_{\infty n}$ , т.е.

$$\hat{x}_n = \hat{x}_{\infty n} \text{rect}[n].$$

При этом принимается очевидное допущение о том, что все ненаблюдаемые отсчеты равны нулю вне зависимости от того, так ли это на самом деле.

Иногда применяется термин «взвешивание», который является синонимом термина «обработка с помощью временного окна».

Как было уже показано на примере 7.2, помимо обработки во временной области используется понятие весового окна в частотной области  $W(\Omega)$  которое может быть получено путем ДПФ над временным окном данных  $w_n$ .

Также используется понятие спектральное окно  $v(\Omega)$  в том случае, когда оно является ДПФ корреляционного окна  $\omega_n$ , применяемого к дискретным отсчетам автокорреляционной последовательности.

Функция  $\hat{X}_\Omega$ , являющаяся ДПФ последовательности  $\hat{x}_n$ , равна

$$\hat{X}_\Omega = \hat{X}_{\infty\Omega} * \hat{D}_N,$$

где

$$\hat{D}_N = \hat{D}_{\Omega N} = \hat{D}(2\pi k/N) = \exp\left\{-j \frac{2\pi k(N-1)}{N}\right\} \frac{\sin[\pi k(N-1)/N]}{\sin \pi k/N},$$

$X_{\infty\Omega}$  – ДПФ последовательности  $x_{\infty n}$ ; знак \* означает операцию свертки;  $\hat{D}_{\Omega N}$  – ДПФ последовательности  $\text{rect}[n]$  и называется дискретной функцией sinc или ядром Дирихле.

Следовательно, преобразование Фурье наблюдаемой конечной последовательности является искаженной версией преобразования Фурье бесконечной последовательности (ненаблюдаемой).

На рис. 7.3 приведен пример влияния времени окна на дискретную синусоиду с частотой  $f_0$  Гц. Видно, что острые спектральные пики квадрата модуля  $|\hat{X}_{\infty}(f)|^2$  ДПФ бесконечной последовательности  $x_{\infty n}$  (рис. 7.3,а) расширились за счет воздействия спектральных копий времени окна (рис. 7.3,б).

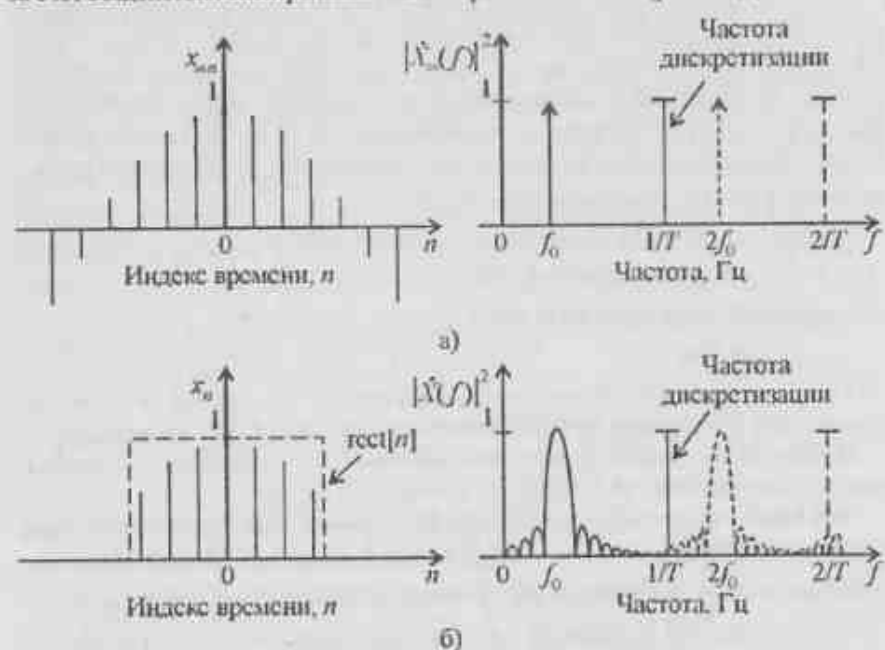


Рис. 7.3. Влияние длительности временного окна единичной амплитуды на расширение нормированных спектральных составляющих дискретной синусоиды: а) бесконечной длительности; б) конечной длительности

Таким образом, ширина главных лепестков в спектральной области, взвешенной временным окном бесконечной последовательности определяется длительностью этого окна. Минимальная ширина главных лепестков не зависит от исходных данных в случае, когда их время корреляции намного больше длительности этого временного окна.

БЛ в частотной области, вызванные частотным преобразованием временного окна, и располагающиеся в других частотных диапазонах, приводят к эффекту, называемому «просачиванием». Этот эффект приводит к тому, что спектральные составляющие, находящиеся на других частотах, будут изменять амплитуду соседних спектральных пиков. Поскольку ДПФ – периодическая функция, то наложения БЛ от соседних спектральных периодов может привести к дополнительным ошибкам, которые называются ошибками смещения. Просачивание маскирует присутствие слабых сигналов в БЛ сильных сигналов и может препятствовать их обнаружению.

Увеличением частоты отсчетов можно ослабить эффект наложения БЛ, однако это требует использования более быстродействующей элементной базы.

Известно, что если применить ряд других функций окна [15, 35], то можно добиться сужения уровня БЛ. Это приводит также и к уменьшению ошибок смещения. Однако это сопровождается расширением главного лепестка (пика) спектра окна, что ухудшает разрешение. Следовательно, должен выбираться какой-то компромисс между шириной главного лепестка и уровнем подавления БЛ.

При классификации функций окна используются несколько показателей для оценки их качества. Ширина полосы частот главного лепестка позволяет судить о частотном разрешении. Для ее количественной оценки на практике часто используется показатель в виде ширины полосы главного лепестка по уровню половинной мощности.

Отметим, что в теоретических исследованиях находит применение понятие эквивалентной ширины полосы ДПФ  $\hat{X}(f)$  сигнала  $\hat{x}_n$ , определяемой в виде

$$B_e = \left( \int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} \hat{X}(f) df \right) / \hat{X}(0).$$

Для оценки характеристик уровня БЛ используется показатель в виде их пикового (или максимального) уровня относительно главного лепестка. Это позволяет судить о том, насколько хорошо используемое окно подавляет просачивание. В качестве другого показателя может использоваться скорость спадания уровня БЛ. Этот показатель используется для оценки степени уменьшения уровня БЛ, ближайших к главному пику.

Скорость спадания уровня БЛ зависит от числа используемых отсчетов  $N$  и с увеличением  $N$  стремится к некоторой асимптотической величине, которую принято вырезать в децибелах на октаву изменения ширины полосы частот.

В табл. 7.1 представлен ряд дискретно-временных функций окон [35]. Видно, что самый узкий главный лепесток в частотной области имеет прямоугольное окно, но зато у него и самый высокий уровень БЛ.

На рис. 7.4 и рис. 7.5 показаны типичные дискретно-временные функции окон (слева) и их логарифмы модуля ДПФ.



Таблица 7.1

Виды дискретно-временных окон и их описания в частотной области		
Название окна	Дискретно-временная функция $w_n$ , $w[n] = [n - 0,5(N-1)] / (N-1)$	Частотная характеристика $W(\omega T) = W(2\pi k/N)$
Прямоугольное (равномерное)	1, $0 \leq n \leq N-1$	$\hat{D}_N = \text{sinc}(2\pi k/N)$
Треугольное (окно Бартлетта)	$1 - 2 l[n] $ , $0 \leq n \leq N-1$	$(2/N)\hat{D}_N^2$
Косинус-квадрат (окно Ханна)	$\cos^2(\pi l[n]) =$ $= 0,5 + 0,5 \cos(2\pi l[n])$ , $0 \leq n \leq N-1$	$0,5\hat{D}_N +$ $+ 0,25\{\hat{D}_N[(2\pi k - 1)/N] +$ $+ \hat{D}_N[(2\pi k + 1)/N]\}$
Приподнятый косинус (окно Хэмминга)	$0,54 + 0,46 \cos(2\pi l[n])$ , $0 \leq n \leq N-1$	$0,54\hat{D}_N +$ $+ 0,23\{\hat{D}_N[(2\pi k - 1)/N] +$ $+ \hat{D}_N[(2\pi k + 1)/N]\}$
Взвешенные косинусы (окно Наттолла, $R=3$ )	$\sum_{r=0}^R a_r \cos(2\pi r l[n])$ , $0 \leq n \leq N-1$	$\sum_{r=0}^R 0,5a_r \{\hat{D}_N[(2\pi k - r)/N] +$ $+ \hat{D}_N[(2\pi k + r)/N]\}$ , $a_0 = 0,3635819$ , $a_1 = 0,4891775$ , $a_2 = 0,1365995$ , $a_3 = 0,0106411$
Усеченное гауссовское ( $\alpha = 2,5$ )	$\exp\{-0,5(2\alpha l[n])^2\}$ , $0 \leq n \leq N-1$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{2\alpha} \exp\left[-0,5\left(\frac{2\pi k}{N\alpha}\right)^2\right] \cdot \hat{D}_N$
Равноволновое (окно Чебышева, $\beta = 50$ дБ, где $\beta$ — отношение уровней главного и БП)	Обратное ДГФ частотной характеристики	$\frac{\cos\{(N-1)\arccos[\alpha \cos(\pi/N)]\}}{\text{ch}\{(N-1)\text{arch}\alpha\}}$ , $\alpha = \text{ch}\{\text{arch}(10^{\beta/20}) / (N-1)\}$

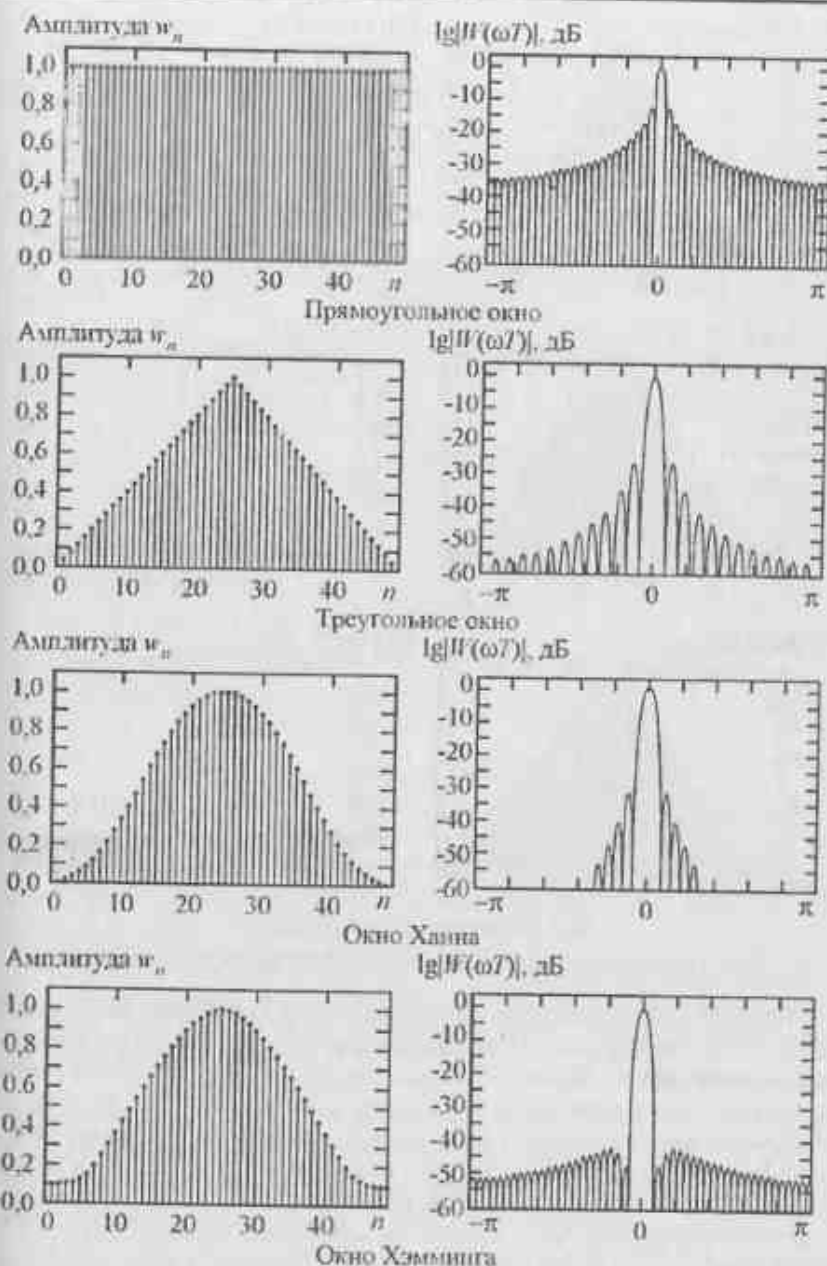


Рис. 7.4. Виды временных окон и их логарифмы модуля ДГФ

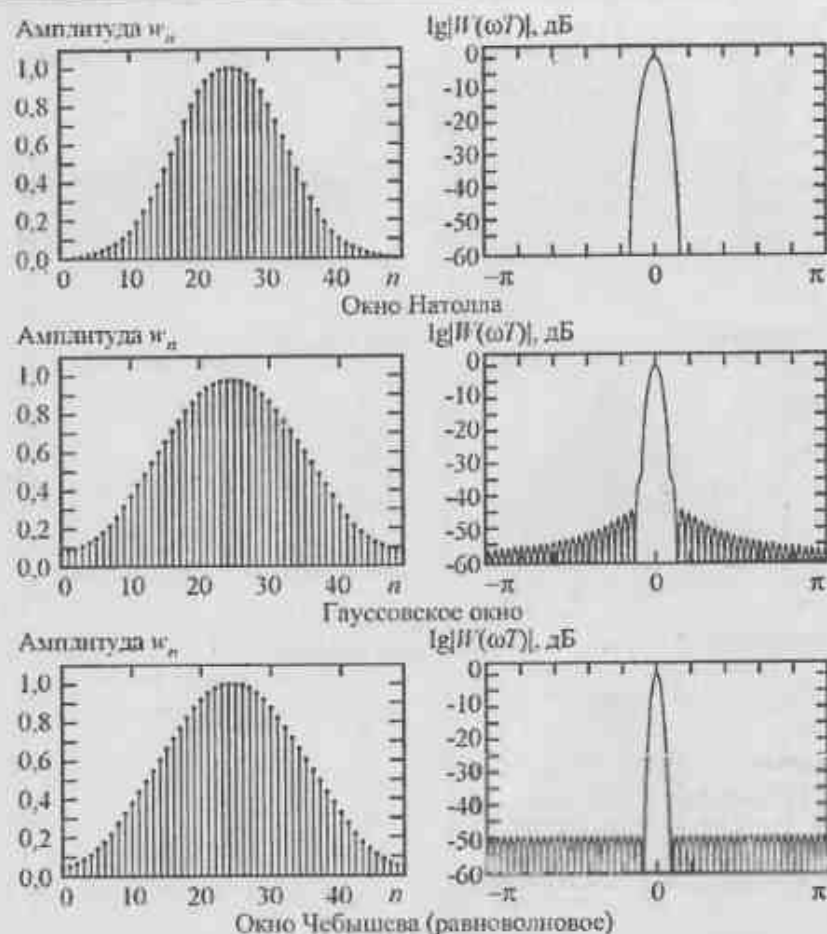


Рис. 7.5. Виды временных окон и их логарифмы модуля ДПФ

Например, если достаточно сильные компоненты сигнала расположены вблизи и на удалении от слабой компоненты сигнала, то следует выделить окно с одинаковым уровнем боковых лепестков около главного, чтобы обеспечить малое смещение. В тех случаях, когда требуется обеспечить высокое разрешение по частоте между очень близкими компонентами сигнала, а удаленные компоненты отсутствуют, можно применить окно с достаточно высоким уровнем боковых лепестков, но зато с узким главным лепестком.

Если динамический диапазон сигнала ограничен, то характеристики боковых лепестков не имеют особого значения и поэтому можно выбрать окно, которое проще для численной реализации.

## 7. Цифровые многопроцессорные фильтры с КИХ

Отметим, что указанные виды временных окон используются для линейных дискретных систем, реализуемых при помощи нерекурсивных алгоритмов, для режимов работы как «скачущее» так и «скользящее» окно.

Характеристики окон, описанных в табл. 7.1, приведены в табл. 7.2. Используя приведенные в табл. 7.2 числовые характеристики, можно, в зависимости от требований, предъявляемых к тем или иным параметрам обрабатываемых сигналов, производить соответствующий выбор временных окон.

Таблица 7.2

Характеристики дискретно-временных окон

Временное окно	Максимальный уровень БЛ, дБ	Асимптотическая скорость спада БЛ, дБ/октава	Эквивалентная ширина полосы	Ширина полосы по уровню половинной мощности
Прямоугольное	-13,3	-6	1,00	0,89
Треугольное	-26,5	-12	1,33	1,28
Окно Ханна	-31,5	-18	1,50	1,44
Окно Хэмминга	-42,8	-6	1,36	1,30
Окно Натолла (R=3)	-98	-6	1,80	1,70
Гауссовское	-42	-6	1,39	1,33
Равноволновое	-50	0	1,39	1,33

### 7.4. Метод модифицированного ряда Фурье

Для снижения уровня боковых лепестков и подавления эффекта Гиббса применяется метод модифицированного ряда Фурье.

Выше рассматривались различные виды окон, а в табл. 7.2. приведены коэффициенты расширения главного пика относительно ширины пика функции вида  $\sin x/x$ .

Следовательно, за счет выбора формы окна и его длины можно осуществлять некоторое управление процессом расчета. Как показано в [34], для заданного ослабления в полосе непропускания, как правило, оказывается справедливо условие типа  $N = A/\Delta\omega$ , где  $\Delta\omega$  – ширина переходной полосы (приблизительно ширина главного лепестка  $W(e^{j\omega T})$ ) и  $A$  – постоянная, зависящая от формы временного окна.

Если величина  $N$  велика, то получается достаточно хорошая аппроксимация требуемой АЧХ. Следует сказать, что трудностью является выбор заранее типа временного окна и величины  $N$ , необходимые для удовлетворения заданным требованиям к частотной характеристике. Иногда для оп-

решения этих параметров используется метод проб и ошибок путем программной реализации его на ЦВМ.

В качестве примера рассмотрим метод расчета путем приближения заданной передаточной функции рядом Фурье, производящего оценку производной от некоторых данных [70].

Из выражения для производной

$$d[e^{j\omega t}] / dt = j\omega \exp(j\omega t)$$

видно, что необходимо аппроксимировать функцию  $\dot{H}(j\omega) = j\omega$ .

Если выбрать коэффициенты фильтра имеющие нечетную симметрию, т. е.  $\dot{h}_{-n} = -\dot{h}_n$  (для всех  $n$ ) и поскольку

$$\dot{h}_n [\exp(jn\omega T) - \exp(-jn\omega T)] = 2j\dot{h}_n \sin(n\omega T),$$

то будем иметь синусный ряд с чисто мнимыми коэффициентами, как это и требуется.

Следовательно, цифровой фильтр описываемый выражением

$$\dot{y}_n = \sum_{k=-m}^m \dot{h}_k \dot{x}_{n-k}$$

с  $\dot{h}_{-n} = -\dot{h}_n$ , приводит к синусному ряду

$$\dot{H}(\omega T) = 2j[\dot{h}_1 \sin(\omega T) + \dot{h}_2 \sin(2\omega T) + \dots + \dot{h}_m \sin(m\omega T)].$$

При этом видно, что он фактически представляет собой линейную комбинацию разностей симметрично расположенных значений функции (оценок производной)  $\dot{h}_n(\dot{x}_{n+k} - \dot{x}_{n-k})$ . Следует сказать, что проектируемый фильтр должен отсекал частоты выше некоторой граничной частоты  $\omega_c$ .

Таким образом, будем строить синусный ряд Фурье для аппроксимации функции

$$\dot{H}(\omega T) = \begin{cases} j\omega T & \text{при } |\omega T| < \omega_c T; \\ 0 & \text{при } |\omega T| \geq \omega_c T. \end{cases}$$

Вычислим значения коэффициентов импульсной характеристики, используя нечетные составляющие ряда Фурье, по выражению

$$\dot{h}_{m+1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dot{H}(\omega T) \sin(n\omega T) d\omega T = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} j\omega T \sin(n\omega T) d\omega T,$$

откуда

$$\dot{h}_{m+1} = \frac{2j}{\pi} \left( \frac{\sin(n\omega_c T)}{n^2} - \frac{\omega_c T \cos(n\omega_c T)}{n} \right).$$

Пологая  $\omega_c T = \pi$ , получаем

$$\dot{h}_{m+1} = \frac{2j \cos(\pi n)}{n} = \frac{2j}{n} (-1)^{m+1}.$$

Следовательно, имеем неограниченной длины фильтр, требующий усечения, которое вызывает эффект Гиббса и устраняется тем или иным окном.

На рис. 7.6 приведена АЧХ дифференциатора с  $N = 10$  и  $\omega T \in [0, 2\pi]$  рассчитанная по изложенной методике [70], а штрих пунктиром изображена АЧХ идеального дифференциатора.

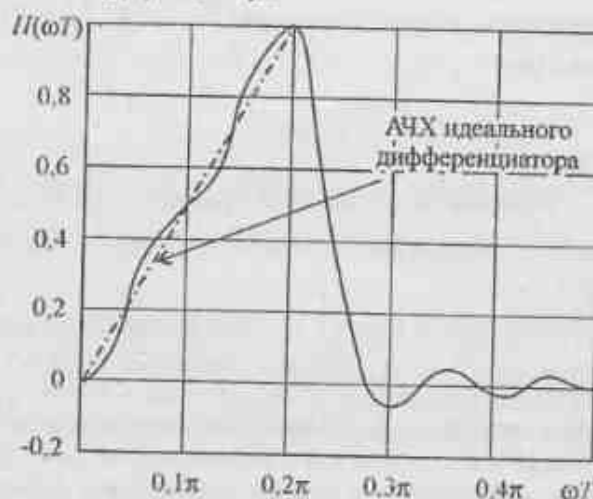


Рис. 7.6. АЧХ рассчитанного дифференциатора

Приведенный пример расчета позволил получить АЧХ дифференциатора с заданным «перекрытием» частотного диапазона и достаточно высоким уровнем отклонений АЧХ от идеальной.

Следует сказать, что использование временных окон позволяет сглаживать пульсации, но одновременно снижает частотный диапазон, где выполняются условия дифференцирования.

В работе [26] в табл. П.2 приведены значения коэффициентов  $a_n = \dot{h}_n$  импульсных характеристик дифференцирующих КИХ-фильтров, использующих различные весовые окна.

Передаточные функции этих цифровых дифференциаторов на  $Z$ -плоскости описываются выражениями

$$H(z) = \frac{\pi}{T} \sum_{n=1}^N a_n (z^n - z^{-n}), \quad a_0 = 0.$$

Здесь величина  $N$  определяет порядок КИХ-фильтра. Если  $N = 9$  или  $10$ , то общее количество отводов соответствующего фильтра и его порядок бу-

дет равен 19 или 21. При реализации таких КИХ-фильтров вводится задержка. В частности, для рассматриваемых примеров эта задержка равна 9 или 10 тактам.

### 7.5. Методы расчета, основанные на минимизации величины отклонения полученной АЧХ от заданной

7.5.1. Метод наименьших квадратов позволяет рассчитывать класс фильтров оптимальных, в смысле минимума нормы  $\|L_p\|$ , где  $\|L_p\|$  по определению будет [45]:

$$\|L_p\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [D(e^{j\omega T}) - H(e^{j\omega T})]^p d\omega T,$$

где  $D(e^{j\omega T})$  – желаемая частотная характеристика,  $H(e^{j\omega T})$  – аппроксимирующая функция, коэффициенты которой получаются так, чтобы минимизировать  $\|L_p\|$ .

Задача очень упрощается при  $p = 2$ , когда минимизация нормы сводится к задаче минимизации по методу наименьших квадратов и, следовательно, после дифференцирования – к решению системы линейных уравнений.

Однако если  $p$  отлично от 2, то задача становится нелинейной, что приводит к необходимости использовать методы нелинейной оптимизации, которые, хотя и существуют, но, вообще говоря, менее эффективны, чем линейные методы.

7.5.2. Метод равноволновой аппроксимации основан на том, что задача построения ЦМФ с КИХ сводится к задаче чебышевской аппроксимации, соответствующей случаю, когда  $p = \infty$  [45].

Пусть задана аппроксимирующая функция  $H(e^{j\omega T})$  и желаемая функция  $D(e^{j\omega T})$ . Тогда взвешенный функционал ошибки аппроксимации  $D(e^{j\omega T})$  функцией  $H(e^{j\omega T})$  можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon(e^{j\omega T}) = |W(e^{j\omega T})[D(e^{j\omega T}) - H(e^{j\omega T})]|,$$

где  $W(e^{j\omega T})$  – положительная весовая функция, которая позволяет определять ошибки для различных интервалов. Чебышевский критерий оптимальности состоит в минимизации максимальной ошибки.

Представим  $H(e^{j\omega T})$  в виде

$H(e^{j\omega T}) = P(e^{j\omega T})/Q(e^{j\omega T})$ , где  $Q(e^{j\omega T})$  – линейная комбинация косинусов, равная

$$Q(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cos(n\omega T), \quad (7.2)$$

а  $P(e^{j\omega T})$  – подходящая весовая функция.

Определяя теперь

$$\tilde{W}(e^{j\omega T}) = W(e^{j\omega T})/P(e^{j\omega T}),$$

$$\tilde{D}(e^{j\omega T}) = D(e^{j\omega T})/P(e^{j\omega T}),$$

запишем выражение для ошибки в виде

$$\varepsilon(e^{j\omega T}) = |\tilde{W}(e^{j\omega T})[\tilde{D}(e^{j\omega T}) - Q(e^{j\omega T})]|.$$

Это выражение можно использовать для синтеза ЦМФ.

Для синтеза ЦМФ с КИХ имеет важное значение теорема о чебышевском альтернансе [45].

Если  $Q(e^{j\omega T})$  – линейная комбинация  $N$  косинусов, заданная выражением (7.2), то необходимым и достаточным условием того, чтобы  $Q(e^{j\omega T})$  была единственной и наилучшей чебышевской аппроксимацией непрерывной функции  $\tilde{D}(e^{j\omega T})$  на множестве  $A$  точек  $\omega T$ , является наличие у взвешенной функции ошибки  $\varepsilon(e^{j\omega T})$  по крайней мере  $N+1$  экстремальных частот на  $A$ .

Это означает, что на множестве  $A$  должны быть  $N+1$  точек

$$\omega_0 T < \omega_1 T < \dots < \omega_N T$$

таких, что

$$\varepsilon(e^{j\omega_i T}) = -\varepsilon(e^{j\omega_{i+1} T}), \quad i = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$|\varepsilon(e^{j\omega_i T})| = \max |\varepsilon(e^{j\omega T})| \text{ при } \omega T \in A.$$

Для построения ЦМФ с таким равноволновым поведением АЧХ наиболее эффективна итерационная процедура, которая получила название второго алгоритма Ремеза и которая наиболее часто используется в машинных программах.

Теорема о чебышевском альтернансе утверждает, что в случае оптимального решения ошибка имеет по крайней мере  $N+1$  экстремум.

Пусть множество  $\{\omega T\}, k = 0, 1, \dots, N$  этих экстремумов в области аппроксимации таково, что можно записать  $N+1$  соотношений в виде

$$\tilde{W}(e^{j\omega_k T})[\tilde{D}(e^{j\omega_k T}) - Q(e^{j\omega_k T})] = (-1)^k \delta. \quad (7.3)$$

Эти соотношения образуют систему из  $(N+1)$ -го линейных уравнений с  $(N+1)$ -ми неизвестными переменными, из которых  $N$  переменных являются

коэффициентами аппроксимирующей функции, а  $(N+1)$ -я переменная является неизвестной ошибкой. Эта система имеет вполне определенное решение, поскольку матрица коэффициентов имеет обратную матрицу.

Поэтому суть алгоритма Ремеза можно сформулировать следующим образом.

**Шаг 1.** Выбирают  $(N+1)$  значений  $\omega_k T$  и решают систему уравнений (7.3) для получения коэффициентов  $a_n$  в (7.2) и  $\delta$ . Таким образом, получают тригонометрический полином по косинусам, который в точках  $\omega_k T$  отличается от целевой функции на величину  $\delta$ .

**Шаг 2.** Анализируют ошибку  $\varepsilon(e^{j\omega T})$  и если  $|\varepsilon(e^{j\omega T})| \leq \delta$  во всей области аппроксимации, полученное выше решение является оптимальным. Если в некоторых точках  $|\varepsilon(e^{j\omega T})| > \delta$ , то выбирают новое множество экстремальных частот путем рассмотрения  $N+1$  точек, где ошибка максимальная и имеет чередующийся знак.

Как показано в [45], в этой процедуре  $\delta$  на каждом шаге возрастает и, в конце концов, сходится к своей верхней грани, которая является решением задачи. Следует сказать, что начальное множество можно выбирать произвольно. Но это не эффективно, так как на каждом шаге следует решать систему линейных уравнений.

Упрощение вычислительной процедуры можно получить, если оценивать  $\delta$  по формуле

$$\delta = \frac{a_0 \tilde{D}(e^{j\omega_0 T}) + a_1 \tilde{D}(e^{j\omega_1 T}) + \dots + a_N \tilde{D}(e^{j\omega_N T})}{a_0 / \tilde{W}(e^{j\omega_0 T}) - a_1 / \tilde{W}(e^{j\omega_1 T}) + \dots + (-1)^N a_N / \tilde{W}(e^{j\omega_N T})},$$

где

$$a_k = \prod_{i=0, i \neq k}^N [\cos(\omega_i T) - \cos(\omega_k T)]^{-1}.$$

Следовательно, значения  $\hat{Q}(e^{j\omega T})$  в  $N$  точках  $\omega_0 T, \omega_1 T, \dots, \omega_{N-1} T$  можно непосредственно вычислить по формулам

$$\hat{Q}(e^{j\omega_k T}) = \tilde{D}(e^{j\omega_k T}) - (-1)^k \delta / \tilde{W}(e^{j\omega_k T}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

и получить интерполяционную формулу для вычисления  $Q(e^{j\omega T})$  и  $\varepsilon(e^{j\omega T})$  на плотной сетке частот путем построения полинома, проходящего через  $N$  точек на основе использования интерполяционной формулы Лагранжа.

Тогда будем иметь

$$Q(e^{j\omega T}) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} [\beta_k / (\cos \omega T - \cos \omega_k T)] Q(e^{j\omega_k T})}{\sum_{k=0}^{N-1} [\beta_k / (\cos \omega T - \cos \omega_k T)]},$$

где  $\beta_k = \prod_{i=0, i \neq k}^{N-1} 1/(\cos \omega_k T - \cos \omega_i T)$ .

Отметим, что рассмотренный чебышевский или равноволновый метод может быть также сформулирован в виде задачи линейного программирования, но такая формулировка задачи приводит к менее эффективному алгоритму по сравнению с алгоритмом Ремеза. Однако метод линейного программирования более гибок и допускает обобщение на двумерный случай.

### 7.6. Преобразователь Гильберта

В ряде случаев при обработке цифровых сигналов, представленных в действительной форме, бывает удобно вести их обработку в виде реальной  $A(t)$  и мнимой  $C(t)$  квадратурных компонент. Как было показано в главе 2, эти компоненты должны быть связаны между собой соотношениями (2.8) и (2.9), описывающими преобразование Гильберта.

Рассмотрим метод получения весовых коэффициентов ЦМФ с КИХ, позволяющего получать  $A(t)$  и  $C(t)$  из действительного сигнала  $A(t)$ .

По определению [34], преобразователь Гильберта должен иметь АЧХ, равную единичной амплитуде во всем диапазоне частот  $|\omega T| \in \pm\pi$ , и иметь ФЧХ, у которой фазовый угол равен  $-\pi/2$  для диапазона частот  $0 \leq \omega T < \pi$  и  $\pi/2$  — для диапазона частот  $-\pi \leq \omega T < 0$ .

Из указанных свойств вытекает, что амплитудно-фазочастотная характеристика преобразователя Гильберта имеет вид [34]

$$H(e^{j\omega T}) = \begin{cases} -j & \text{при } 0 \leq \omega T < \pi; \\ j & \text{при } -\pi \leq \omega T < 0. \end{cases} \quad (7.4)$$

На рис. 7.7 изображена идеальная амплитудно-фазочастотная характеристика преобразователя Гильберта.

Импульсная характеристика  $h_n$  преобразователя Гильберта с учетом того, что  $t = nT = n$  при  $T = 1$  будет иметь вид

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega T - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} j e^{j\omega n} d\omega T = \begin{cases} \frac{2 \sin^2(0,5\pi n)}{\pi n}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

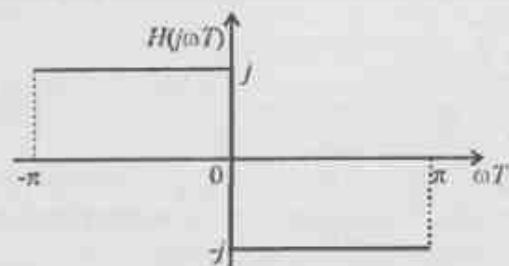


Рис. 7.7. Идеальная амплитудно-фазочастотная характеристика преобразователя Гильберта

На рис. 7.8. изображена нормированная импульсная характеристика преобразователя Гильберта, рассчитанная по выражению (7.5).

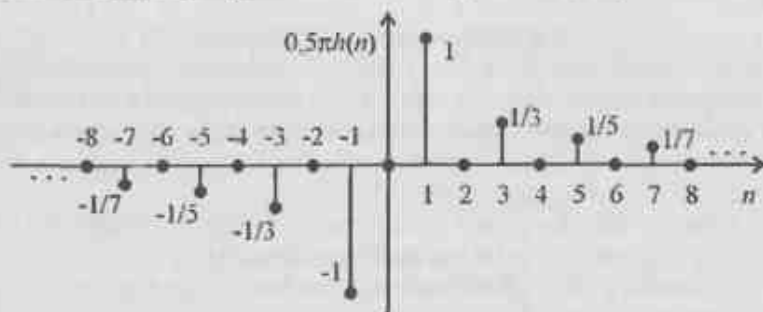


Рис. 7.8. Нормированная импульсная характеристика идеального преобразователя Гильберта

Тогда, имея дискретную действительную компоненту сигнала  $A_n$ , можно получить дискретную мнимую компоненту  $C_n$  согласно выражения

$$C_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{n-m} h_m,$$

или наоборот, имея дискретную мнимую компоненту  $C_n$ , можно получить дискретную действительную компоненту  $A_n$  по выражению

$$A_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{n-m} h_m.$$

Из выражения (7.5) вытекает, что Z-преобразование  $h_n$  сходится только на единичной окружности из-за разрыва в точке равной нулю в (7.4).

Поэтому ряд

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n}$$

сходится только в среднеквадратическом.

Следовательно, идеальный преобразователь Гильберта, как и идеальные ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ, а также идеальный дифференциатор, являются теоретическими понятиями.

Для технически реализуемого преобразователя Гильберта применяется метод расчета на основе рассмотренных весовых окон, метод частотной выборки, а также метод равноволновой аппроксимации идеальной характеристики (7.4).

В качестве примера на рис. 7.9 приведен модуль АЧХ преобразователя Гильберта полученного путем расчета по выражению (7.5) и при использовании равноволновой аппроксимации отсчетов импульсной характеристики для диапазона частот  $0 \leq \omega T < \pi$ . При этом количество отсчетов импульсной характеристики  $N = 27$ . В указанном примере для равноволновой аппроксимации пульсации АЧХ имеют одинаковый уровень в диапазоне частот  $0,0874\pi \leq \omega T \leq 0,9126\pi$  [45].



Рис. 7.9. Пример поведения модулей АЧХ преобразователя Гильберта

При технической реализации такого преобразователя Гильберта необходимо обеспечить линейный сдвиг по фазе действительной компоненты  $A_n$  на величину, соответствующую 13 выборкам.

Структурная схема преобразователя Гильберта на основе ЦМФ с КИХ для  $N = 27$  может быть представлена в виде, изображенном на рис. 7.10. Приводимые на этом рисунке величины весовых коэффициентов получены в соответствии с выражением (7.5), т.е. используется прямоугольное временное окно.

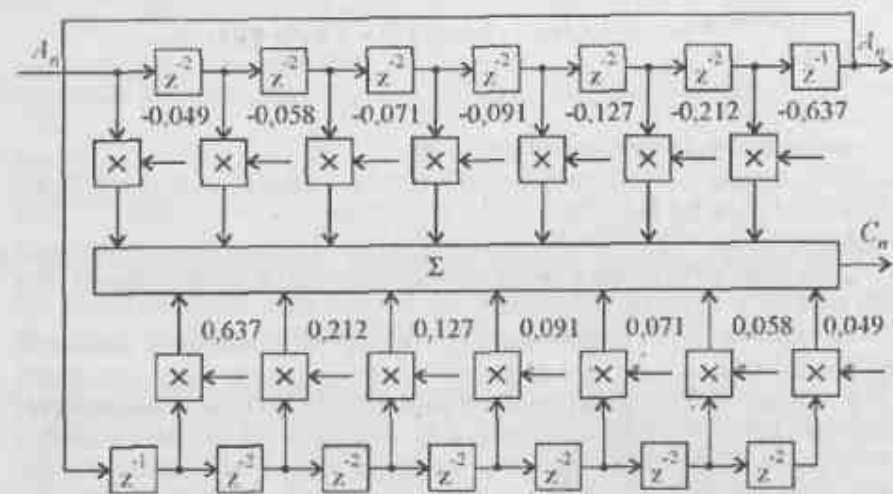


Рис. 7.10. Структурная схема преобразователя Гильберта ( $N = 27$ )

На рис. 7.11 представлена технически реализуемая структурная схема преобразователя Гильберта, которая получена из структурной схемы изображенной на рис. 7.10. Видно, что в этой схеме более простая техническая реализация сумматоров, а весовые коэффициенты расположены в обратном порядке относительно схемы рис. 7.10. Также требуется в этой схеме наличие дополнительной цифровой многоразрядной линии задержки.

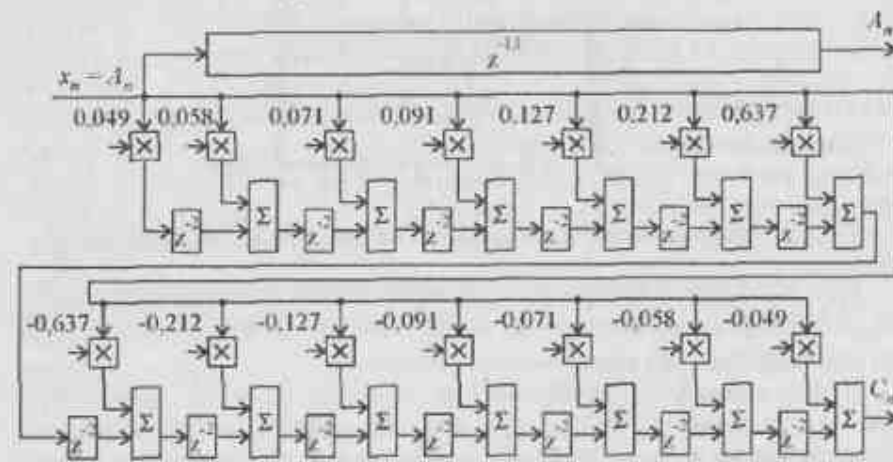


Рис. 7.11. Технически реализуемая структурная схема преобразователя Гильберта ( $N = 27$ )

7.7. Сравнительный анализ КИХ и БИХ фильтров

Выбор структуры линейного цифрового устройства частотной селекции во многом зависит от тех требований, которым должно отвечать такое устройство [15, 26, 34].

Решение задачи расчета ЦМФ в значительной мере сводится к задаче аппроксимации. Область, в которой производится аппроксимация, определяется назначением фильтра.

Выбор КИХ или БИХ фильтра зависит от достоинств и недостатков фильтра каждого типа, которые являются определяющими при решении тех или иных задач обработки сигналов.

Как указывалось, для КИХ-фильтров расчетных уравнений в замкнутой форме не существует [34]. Однако, метод окна может применяться прямым путем. Большинство других методов расчета КИХ-фильтров является итерационными процедурами, требующими для своего выполнения довольно мощных вычислительных средств. КИХ-фильтры могут иметь строго линейную ФЧХ или ФЧХ с заданными свойствами.

Процедуры расчета КИХ-фильтров обладает большими возможностями по управлению, в отличие от методов расчета БИХ-фильтров, что позволяет получать более сложные формы АЧХ. Однако, при одинаковых требованиях к форме АЧХ, порядок передаточной функции КИХ-фильтра в 5–10 раз выше, чем БИХ-фильтра [29]. В частности, если реализация эллиптического ЦМФ на основе КИХ-фильтра потребует аппроксимирующего полинома 52 порядка, то на основе БИХ-фильтра – только 8-го при одинаковых требованиях к форме АЧХ.

КИХ-фильтр предназначен для специфических применений – построения дифференциаторов, получения треугольных форм АЧХ с линейной ФЧХ, получения ЦМФ с заданными характеристиками ФЧХ. Кроме того, на основе ЦМФ с КИХ создаются устройства, реализующие те или иные алгоритмы БПФ. Помимо указанных методов находит применение и метод, заключающийся в использовании тех или иных процедур оптимизации расположения полюсов и нулей в Z-плоскости, при котором обеспечивается аппроксимация в том или ином смысле заданной характеристики фильтра. При этом расчет фильтра производится методом последовательных приближений.

БИХ-фильтры, как показано в [15, 34, 37], обладает тем достоинством, что множество частотно-избирательных характеристик может быть получено при использовании расчетных выражений в замкнутой форме. Это означает, что сначала определяются требования, соответствующему типу фильтра (Баттерворта, Чебышева, эллиптического), а затем коэффициенты (полюсы и нули) нужного ЦМФ определяются путем подстановки в систему расчетных уравнений.

Этот вид расчетной процедуры является эффективным даже если в распоряжении имеются вычислительные средства с ограниченными возможностями.

ми. Кроме того, полюсы передаточной функции рекурсивного фильтра могут располагаться произвольно внутри единичной окружности на  $Z$ -плоскости. Следствием такой степени свободы является высокая избирательность, которую можно получить сравнительно простыми средствами при использовании передаточной функции относительно низкого порядка.

Отметим, что при проектировании ЦМФ одним из самых существенных показателей является экономический, который определяет как аппаратурную сложность, так и скорость выполнения операций. Следовательно, при проектировании ЦМФ существует множество компромиссных вариантов.

### 7.8. Выводы

Рассмотренные в данной главе методы расчета ЦМФ с КИХ позволяют сделать вывод о том, что, несмотря на отсутствие замкнутых процедур расчета для получения заданных частотно-избирательных характеристик, существуют хорошо разработанные способы их получения.

К достоинствам рассмотренных линейных систем с КИХ можно отнести то обстоятельство, что нет необходимости производить проверку на устойчивость получаемых решений.

Рассмотренные виды весовых окон могут находить применение как при решении задач обработки сигналов в режиме работы «скользящее» окно, так и «скачущее». Применение весовой обработки сопровождается снижением уровня БЛ с одновременным расширением АЧХ и снижением крутизны ее спада в переходной полосе. Последнее обстоятельство в некоторых случаях требует пересчета порядка ЦМФ с КИХ для получения заданных частотно-избирательных характеристик.

Затраты оборудования или необходимое количество операций для реализации ЦМФ с КИХ существенно выше по сравнению со случаем применения ЦМФ с БИХ для получения аналогичных частотно-избирательных характеристик.

Отметим, что эти устройства находят применение как основные звенья цифровых адаптивных фильтров в силу простоты расчета требуемых весовых коэффициентов и их перестройки и отсутствия необходимых расчетов на устойчивость.

## 8. ЦИФРОВЫЕ МНОГОПРОЦЕССОРНЫЕ АДАПТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

### 8.1. Вводные замечания

Рассмотренные в предыдущих разделах цифровые линейные системы с постоянными параметрами относятся к классу инвариантных во времени систем. В то же время на практике существует достаточно обширный класс задач, когда отсутствует полный набор априорных сведений о характеристиках анализируемых процессов, а требуется получить заданное качество функционирования тех или иных оконечных устройств. Поэтому одним из выходов из создавшегося положения может быть применение систем обработки, которые недостающий объем сведений извлекают из обрабатываемой реализации и перестраивают эту систему обработки таким образом, чтобы максимизировать эффективность. Подобные системы получили название адаптивных, инвариантных во времени линейных систем [71].

При построении тех или иных адаптивных систем фильтрации используются общие закономерности, которые заключаются в том, что преодоление априорной неопределенности возможно только путем использования информации, которая заключена в обрабатываемом процессе. Применяемые алгоритмы адаптации должны, путем извлечения указанной информации из принимаемой реализации, позволять достигать оптимума в соответствии с выбранным критерием оптимальности. Наиболее часто таким критерием является критерий минимума среднеквадратической ошибки (СКО) между требуемым решением задачи и полученными в процессе функционирования устройства.

Наиболее интересные применения как в теоретическом плане так и в практических приложениях адаптивные методы обработки сигналов нашли в теории адаптивной фильтрации. В свою очередь адаптивные фильтры нашли применение в качестве самоподстраивающихся устройств коррекции, режекторных и согласованных фильтров и в ряде других областей.

Любые адаптивные системы тем эффективней, чем больше априорной информации они используют.



### 8.2. Основные принципы построения цифровых многопроцессорных адаптивных фильтров

Адаптивные устройства обработки сигналов действуют по принципу замкнутого контура (обратной связи) [23].

Входной сигнал  $x_n$  фильтруется или взвешивается в перепрограммируемом цифровом устройстве обработки для получения выходного сигнала  $y_n$ , который затем сравнивается с полезным, стандартным или обучающим сигналом  $\hat{y}_n$  для нахождения сигнала ошибки  $\hat{\epsilon}_n$ . Затем этот сигнал ошибки используется для корректировки весовых параметров устройства (обычно итеративным методом) с целью постепенной минимизации ошибки (т. е. сигнал на выходе обрабатывающего устройства – процессора, вплотную приближается к величине обучающего сигнала). На рис. 8.1. приводится обобщенная структурная схема линейной адаптивной системы.



Рис. 8.1. Структурная схема адаптивной системы

Адаптивный фильтр действует по принципу оценивания статистических параметров поступающего сигнала и подстройки собственной импульсной характеристики таким образом, чтобы минимизировать некоторую функцию стоимости (максимизировать эффективность), т.е. задача сводится к минимизации величины  $\hat{\epsilon}_n = \hat{y}_n - y_n$ .

Адаптивные системы будем рассматривать как цифровые линейные системы с переменными во времени параметрами. При этом адаптивный фильтр может выполнять двойную роль в зависимости от того, куда поступает первичный сигнал с равномерной спектральной плотностью - на вход  $X$ , или на вход  $Y$  непосредственно или через блок с импульсной характеристикой  $H_n$ , как показано на рис. 8.2.

Для получения оптимальных весовых векторов  $H_{opt}$  адаптивного фильтра можно применить два разных подхода, которые приводят к совершенно различным результатам [23].

Это имеет место в следующих случаях:

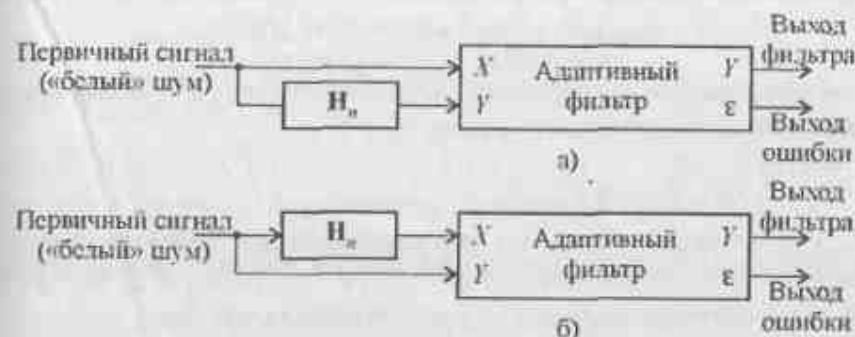


Рис. 8.2. Структурные схемы адаптивных фильтров: а) неизвестная система  $H_n$  подключена ко входу  $Y$ ; б) неизвестная система  $H_n$  подключена ко входу  $X$ ;

• неизвестная система  $H_n$  подключена ко входу  $Y$  адаптивного фильтра (рис. 8.2,а). В этом случае оптимальная импульсная характеристика адаптивного фильтра является точной моделью соответствующей характеристике системы  $H_n = H_{opt}$ .

• неизвестная система  $H_n$  подключена ко входу  $X$  адаптивного фильтра (рис. 8.2,б). В этом случае оптимальная импульсная характеристика адаптивного фильтра является функцией, обратной соответствующей характеристике неизвестной системы, то есть  $H_{opt} = H_n^{-1}$  (данный результат соответствует задаче построения «обесцвещающего» фильтра, в частности, в радиолокации движущихся целей [1, 72]).

Следует сказать, что наиболее широкое применение адаптивные фильтры нашли в задачах подавления коррелированных помех. В качестве программируемых цифровых многопроцессорных адаптивных фильтров используются рекурсивные фильтры с прямой связью, без прямых связей и нерекурсивные фильтры.

Наиболее простыми и эффективными являются адаптивные линейные системы на основе нерекурсивных фильтров, которые и будут рассматриваться в дальнейшем. Для подстройки весовых коэффициентов нерекурсивных фильтров используют процедуры оптимального линейного оценивания параметров процессов, подвергающихся обработке.

Существующие способы оценивания можно разбить на два класса.

К первому из них относятся выполняемые фильтром процессы оценивания входного сигнала  $x_n$ . Ко второму – процессы оценивания весовых коэффициентов нерекурсивного фильтра, связанные с основным его назначением.

Эти процессы оценивания в адаптивных фильтрах происходят непрерывно и описываются функцией, зависящей от времени.

8.3. Адаптивный алгоритм на основе оценивания входного сигнала

Как известно, в нерекурсивном устройстве оценка  $\hat{y}_n$  определяется в виде конечного линейного полинома от  $\hat{x}_n$  в виде

$$\hat{y}_n = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{h}_{n-m} \hat{x}_m = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{x}_{n-m} \hat{h}_m,$$

где  $\hat{h}_m$  – отдельные весовые коэффициенты в структуре нерекурсивного фильтра изображенного на рис. 8.3 в предположении, что  $\hat{h}_0 = 1$ .

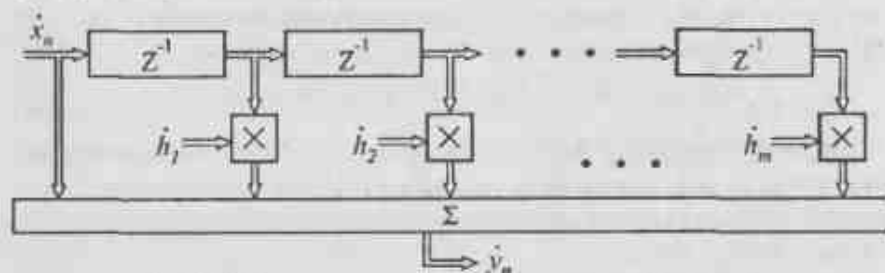


Рис. 8.3. Структурная схема нерекурсивного фильтра с перестраиваемыми коэффициентами

Последнее выражение в матрично-векторной системе обозначений имеет вид

$$\hat{y}_n = \mathbf{X}_n^T \mathbf{H} = \mathbf{H}^T \mathbf{X}_n,$$

где

$$\mathbf{X}_n^T = [\hat{x}_n \ \hat{x}_{n-1} \ \dots \ \hat{x}_{n-N+1}], \quad \mathbf{H}^T = [\hat{h}_0 \ \hat{h}_1 \ \dots \ \hat{h}_{N-1}].$$

Тогда функция СКО примет вид

$$\bar{\epsilon}_n^2 = \overline{(\hat{y}_n - \mathbf{H}^T \mathbf{X}_n)^2},$$

где черта сверху означает знак математического усреднения.

Дифференцируя по  $\mathbf{H}^T$  последнее выражение получаем

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}_n^2}{\partial \mathbf{H}^T} = -2 \overline{(\hat{y}_n - \mathbf{H}^T \mathbf{X}_n) \mathbf{X}_n^T}.$$

Приравняв последнее выражение нулю, имеем

$$-2 \overline{(\hat{y}_n - \mathbf{H}^T \mathbf{X}_n) \mathbf{X}_n^T} = 0,$$

откуда

$$\hat{y}_n \mathbf{X}_n^T = \mathbf{H}^T \mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T$$

Полагая, что весовой вектор  $\mathbf{H}^T$  и вектор сигнала  $\mathbf{X}_n$  не коррелированы, получаем

$$\hat{y}_n \mathbf{X}_n^T = \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T.$$

Выражение в левой части последнего равенства представляет собой взаимную корреляцию между входным сигналом и оцениваемым параметром. Обозначим ее  $\mathbf{P}$ . Выражение в правой части этого равенства под знаком математического ожидания является автокорреляционной матрицей входной сигнальной последовательности. Обозначим ее  $\mathbf{R}$ .

Тогда последнее выражение примет вид

$$\mathbf{P}^T = \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}.$$

Данное уравнение называется уравнением Винера-Хопфа. Оно дает оптимальное (по методу наименьших квадратов) винеровское решение для  $\mathbf{H}_{opt}$  в виде

$$\mathbf{H}_{opt} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}. \quad (8.1)$$

Рассмотрим пример устройства винеровской оценки, когда наблюдаемый сигнал  $x_n$  является суммой синусоиды и «белого» шума  $\eta_n$

$$x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \eta_n.$$

Следовательно, входной сигнал, подлежащий оценке, представляет собой синусоиду с частотой, точно равной одной восьмой частоты дискретизации. В дальнейшем будем полагать, что рассматриваемый фильтр является нерекурсивным и имеет только четыре весовых коэффициента. Из решения уравнения Винера-Хопфа (8.1) видно, что необходимо получить автокорреляционную матрицу  $\mathbf{R}$  в виде

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \overline{x_n} \\ \overline{x_{n-1}} \\ \overline{x_{n-2}} \\ \overline{x_{n-3}} \end{bmatrix} [x_n \ x_{n-1} \ x_{n-2} \ x_{n-3}] = \begin{bmatrix} \overline{x_n^2} & \overline{x_n x_{n-1}} & \overline{x_n x_{n-2}} & \overline{x_n x_{n-3}} \\ \overline{x_{n-1} x_n} & \overline{x_{n-1}^2} & \overline{x_{n-1} x_{n-2}} & \overline{x_{n-1} x_{n-3}} \\ \overline{x_{n-2} x_n} & \overline{x_{n-2} x_{n-1}} & \overline{x_{n-2}^2} & \overline{x_{n-2} x_{n-3}} \\ \overline{x_{n-3} x_n} & \overline{x_{n-3} x_{n-1}} & \overline{x_{n-3} x_{n-2}} & \overline{x_{n-3}^2} \end{bmatrix}.$$

Все элементы данной матрицы могут быть получены из первой строки матрицы, поскольку

$$\begin{aligned} \overline{x_n^2} &= \overline{x_{n-1}^2} = \overline{x_{n-2}^2} = \overline{x_{n-3}^2}, \\ \overline{x_n x_{n-1}} &= \overline{x_{n-2} x_{n-1}} = \overline{x_{n-2} x_{n-3}}, \\ \overline{x_n x_{n-2}} &= \overline{x_{n-3} x_{n-1}}. \end{aligned}$$

Это простое следствие теоретически бесконечного усреднения, получаемого в результате применения оператора математического ожидания, т. е. существенной является лишь временная разность между двумя операндами, если полагать, что временной ряд  $x_n$  является стационарным.

Тогда выражение для  $\mathbf{R}$  примет вид

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \overline{x_n^2} & \overline{x_n x_{n-1}} & \overline{x_n x_{n-2}} & \overline{x_n x_{n-3}} \\ \overline{x_n x_{n-1}} & \overline{x_{n-1}^2} & \overline{x_{n-1} x_{n-2}} & \overline{x_{n-1} x_{n-3}} \\ \overline{x_n x_{n-2}} & \overline{x_{n-1} x_{n-2}} & \overline{x_{n-2}^2} & \overline{x_{n-2} x_{n-3}} \\ \overline{x_n x_{n-3}} & \overline{x_{n-1} x_{n-3}} & \overline{x_{n-2} x_{n-3}} & \overline{x_{n-3}^2} \end{bmatrix}$$

Такая симметричная матрица является матрицей Тейлора [61]. Получить значения элементов данной матрицы можно с учетом того, что шумовая составляющая влияет только на ее главную диагональ (вследствие  $\delta$ -коррелированности «белого» шума), а все остальные элементы можно найти из детерминированной компоненты сигнала.

Значения элементов матрицы следующие

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,5 + \sigma_n^2 & 0,354 & 0 & -0,354 \\ 0,354 & 0,5 + \sigma_n^2 & 0,354 & 0 \\ 0 & 0,354 & 0,5 + \sigma_n^2 & 0,354 \\ -0,354 & 0 & 0,354 & 0,5 + \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

где  $\sigma_n^2 = \eta_n^2$ .

Заменив числовые величины буквами, матрицу  $\mathbf{R}$  перепишем в виде

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} v & \rho & 0 & -\rho \\ \rho & v & \rho & 0 \\ 0 & \rho & v & \rho \\ -\rho & 0 & \rho & v \end{bmatrix}$$

Тогда матрица, обратная  $\mathbf{R}$ , определяется как

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{v}{2\rho^2 - v^2} & \frac{\rho}{2\rho^2 - v^2} & 0 & -\frac{\rho}{2\rho^2 - v^2} \\ \frac{\rho}{2\rho^2 - v^2} & -\frac{v}{2\rho^2 - v^2} & \frac{\rho}{2\rho^2 - v^2} & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{2\rho^2 - v^2} & -\frac{v}{2\rho^2 - v^2} & \frac{\rho}{2\rho^2 - v^2} \\ -\frac{\rho}{2\rho^2 - v^2} & 0 & \frac{\rho}{2\rho^2 - v^2} & -\frac{v}{2\rho^2 - v^2} \end{bmatrix}$$

Определим вектор взаимной корреляции  $\mathbf{P}$ , вычисляемый по формуле

$$\mathbf{P} = y_n \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{bmatrix}$$

Подставляя числовые значения сигнала получаем результат в виде

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,354 \\ 0 \\ -0,354 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v - \sigma_n^2 \\ \rho \\ 0 \\ -\rho \end{bmatrix}$$

Умножив  $\mathbf{P}$  на матрицу  $\mathbf{R}^{-1}$  находим

$$\mathbf{H}_{opt} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} = \frac{1}{2(1 + \sigma_n^2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,707 \\ 0 \\ -0,707 \end{bmatrix}$$

Определяя значения  $\mathbf{H}_{opt}$  из последнего выражения, приходим к согласованному фильтру для случая синусоидального входного сигнала.

Остаточную СКО можно легко вычислить, подставив в выражение

$$\epsilon_n^2 = (y_n - \mathbf{H}^T \mathbf{X}_n)^2$$

величину  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{opt}$ .

Учитывая некоррелированность остаточной ошибки и входного процесса, можно записать

$$\overline{\epsilon_n \mathbf{X}_n} = 0,$$

откуда СКО запишется в виде

$$\epsilon_n^2 = \epsilon_n [y_n - \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{X}_n] = y_n^2 - \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{P}.$$

Подставляя значения  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{H}_{opt}$ , получаем формулу для остаточной СКО

$$\overline{\epsilon_n^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2(1+\sigma_n^2)} - \frac{\sigma_n^2}{2(1+\sigma_n^2)}$$

Следовательно, при  $\sigma_n^2 = 0$  СКО равна нулю (т. е. при отсутствии шума ошибки нет). При отношении сигнал/шум равном 0 дБ (т. е.  $\sigma_n^2 = 0,5$ ), конечная СКО равна 1/6 (величина СКО до процесса оценивания была равна 0,5).

Увеличение порядка  $\mathbf{H}_{opt}$  (т. е. использование оценивающего фильтра с большим временным интервалом обработки сигнала) приводит к соответствующему уменьшению остаточной СКО.

#### 8.4. Адаптивный алгоритм коррекции весовых коэффициентов фильтра

Рассмотрим алгоритм коррекции весовых коэффициентов рекурсивного фильтра, осуществляющий минимизацию СКО для действительного обрабатываемого сигнала [73].

Очевидно, что ошибка на выходе линейного сумматора может быть представлена в виде

$$\epsilon = \epsilon_{min} + (\mathbf{H} - \mathbf{H}_{opt})^T \mathbf{R}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{opt}) = \epsilon_{min} + \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V}, \quad (8.2)$$

где матрица  $\mathbf{V} = \mathbf{H} - \mathbf{H}_{opt} = [v_0 \ v_1 \ \dots \ v_n]$  — отклонение полученного в результате расчета вектора весовых коэффициентов от винеровского оптимального вектора весовых коэффициентов.

Градиент СКО относительно  $\mathbf{V}$  получается дифференцированием выражения (8.2). С учетом (8.1) он примет вид [73]

$$\nabla = \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{V}} = 2\mathbf{R}\mathbf{V} = 2(\mathbf{R}\mathbf{H} - \mathbf{P}).$$

Умножая обе части последнего равенства на величину  $0,5\mathbf{R}^{-1}$  и производя вычисления получаем

$$\mathbf{H}_{opt} = \mathbf{H} - 0,5\mathbf{R}^{-1}\nabla.$$

Запишем это равенство в виде итеративного алгоритма

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k - 0,5\mathbf{R}^{-1}\nabla_k,$$

где индекс  $k$  вектора градиента означает, что градиент находится на шаге  $k$ , когда вектор весовых коэффициентов равен  $\mathbf{H}_k$ .

Последнее равенство описывает метод Ньютона для многих переменных. Напомним, что этот метод является методом нахождения нулей функции, описываемой полиномом соответствующего порядка.

Рассмотрим кратко этот метод для скалярного параметра [73]. Пусть имеется функция  $f(h)$ . Начальное значение  $h^{(0)}$ .

Для вычисления следующей оценки  $h^{(1)}$  находим первую производную  $f'(h^{(0)})$ . Как показано на рис. 8.4, точка  $h^{(1)}$  находится как пересечение касательной в точке  $f'(h^{(0)})$  с осью  $h$ .

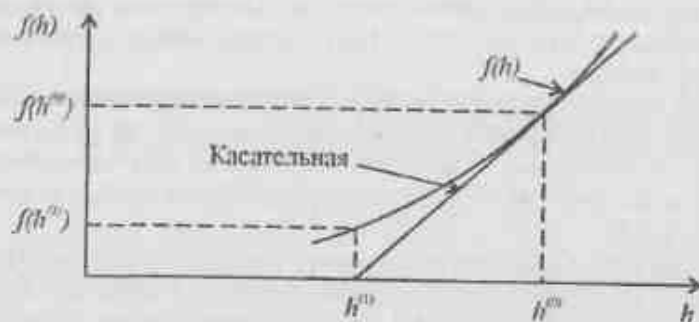


Рис. 8.4. Пример нахождения точки  $h^{(1)}$ .

Из графиков на рис. 8.4 видно, что

$$f'(h^{(0)}) = \frac{f(h^{(0)}) - f(h^{(1)})}{h^{(0)} - h^{(1)}},$$

откуда

$$h^{(1)} = h^{(0)} - \frac{f(h^{(0)})}{f'(h^{(0)})}.$$

Следующую точку  $h^{(2)}$  вычисляют при использовании в качестве новой начальной точки точку  $h^{(1)}$ . Для нахождения следующих точек процесс повторяется.

В общем случае

$$h^{(k+1)} = h^{(k)} - \frac{f(h^{(k)})}{f'(h^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Сходимость метода Ньютона достаточно быстрая и зависит от выбора начального значения  $h^{(0)}$  и от вида функции  $f(h^{(0)})$ .

Следовательно, применение адаптивных фильтров позволяет преодолеть априорную неопределенность и этим самым повысить эффективность обработки сигналов в соответствии с критерием оптимальности, зависящим от назначения системы. Следует сказать, что существуют и другие методы нахождения нулей функции.

## 8.5. Выводы

В данной главе кратко рассмотрены основные принципы построения цифровых многопроцессорных адаптивных фильтров.

Рассмотренные алгоритмы реализуют решение уравнения Винера-Хопфа, где полученный результат является оценкой в виде взвешенной суммы конечного числа наблюдаемых выборок.

Рассмотрено итеративное вычисление и коррекция полученных весовых коэффициентов на основе использования метода Ньютона для скалярного случая. Следует сказать, что существуют и другие методы коррекции весовых коэффициентов.

Во всех методах коррекции весовых коэффициентов используется предположение, что отсутствуют ограничения на точность их представления. В том случае, когда такие ограничения имеются, их учет может быть осуществлен путем введения дополнительных источников шума, как показано, например, в [74].

Все алгоритмы адаптации, использующие нерекурсивные фильтры, требуют весьма громоздких вычислительных процедур. Однако они обладают тем существенным преимуществом, что получаемые решения являются достаточно быстро сходящимися и не требуют проверки на устойчивость.

## 9. ЦИФРОВЫЕ МНОГОПРОЦЕССОРНЫЕ НЕМИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫЕ СИСТЕМЫ

## 9.1. Вводные замечания

Все рассмотренные до сих пор цифровые многопроцессорные линейные системы и последовательности полагались минимально-фазовыми, т.е. такими, у которых существует взаимнооднозначная связь между логарифмом огибающей и полной фазовой функцией, реализуемая при помощи преобразования Гильберта [9, 34].

В то же время существует достаточно широкий класс линейных систем, которые не могут быть описаны подобным соотношением. Такие системы и последовательности получили название неминимально-фазовых [26, 34, 37].

Характерной особенностью неминимально-фазовых цифровых многопроцессорных систем, которые носят также название всепропускающих цифровых многопроцессорных фильтров (ВЦМФ), является постоянство их АЧХ при изменении положения нулей и полюсов на  $Z$ -плоскости, которое сопровождается соответствующим изменением параметров ФЧХ. Подобные системы позволяют обрабатывать отсчеты квадратурных составляющих входных сигналов, представленных в цифровой многоразрядной форме.

ВЦМФ реализуются аналогично минимально-фазовым, т.е. в виде соответствующего соединения элементарных неминимально-фазовых ячеек, которые также называются всепропускающими. Эти ячейки находят применение для реализации ВЦМФ с требуемыми ФЧХ, в частности для компенсации фазовых искажений, как было, например, показано в главе 2 (рис. 2.9) при рассмотрении устройства формирования квадратур. В этом устройстве используется действительная неминимально-фазовая ячейка первого порядка, устраняющая методическую фазовую погрешность.

Отметим, что ВЦМФ на основе цифровых неминимально-фазовых ячеек позволяют также реализовывать согласованные фильтры для сложных сигналов, имеющих постоянную амплитуду и соответствующий фазочастотный спектр. При этом удается сократить общее количество выполняемых операций за счет свойств, которыми обладают рассматриваемые устройства.

### 9.2. Цифровые многопроцессорные неминимально-фазовые ячейки

Для того чтобы цепь была всепропускающей, необходимо, чтобы каждому полюсу ее передаточной функции на  $Z$ -плоскости, находящемуся в точке  $\tilde{z}_p = r_p e^{j\varphi_p}$ , соответствовал нуль в точке  $\tilde{z}_0 = r_0 e^{j\varphi_0} = r_p^{-1} e^{j\varphi_p}$ . Видно, что модули нуля и полюса связаны соотношением  $r_0 = r_p^{-1}$ , а аргументы равны между собой т.е.  $\varphi_0 = \varphi_p$ .

На рис. 9.1 показано типичное расположение нуля и полюса для цифровой неминимально-фазовой комплексной ячейки первого порядка, которая также называется всепропускающей цифровой комплексной ячейкой (ВЦКЯ).



Рис. 9.1. Пример расположения полюса и нуля ВЦКЯ первого порядка

Полагая  $r_p = r$  и  $\varphi_p = \varphi$  передаточную функцию ВЦКЯ первого порядка на  $Z$ -плоскости представим в виде

$$H(z) = \frac{1 - \tilde{z}_0 z^{-1}}{1 - \tilde{z}_p z^{-1}} = \frac{1 - r^{-1} e^{j\varphi} z^{-1}}{1 - r e^{j\varphi} z^{-1}} \quad (9.1)$$

Передаточной функции (9.1), описывающей ВЦКЯ первого порядка, соответствует структурная схема тангенсной ЦКЯ первого вида первого порядка, у которой комплексный перемножитель в цепи прямой связи находится непосредственно после элемента задержки и которая изображена на рис. 4.2. Диапазон однозначности ФЧХ этой ВЦКЯ лежит в пределах  $[-\pi, \pi]$  или  $[0, 2\pi]$ .

Недостатком такой структуры является то, что поскольку  $r < 1$ , то числа, поступающие с элемента задержки, необходимо умножать на величину, большую единицы. Это невозможно выполнить в случае реализации вычислителя, функционирующего на основе использования арифметики с фиксированной запятой.

Для устранения указанного недостатка представим выражение (9.1) в следующем виде:

$$H(z) = \frac{e^{j\varphi} r e^{-j\varphi} z^{-1}}{r (1 - r e^{j\varphi} z^{-1})} \quad (9.2)$$

Первый множитель в (9.2) осуществляет поворот на постоянный фазовый угол квадратурных составляющих отсчетов входного сигнала и масштабирует их по амплитуде. Видно, что первый множитель не зависит от частоты и не оказывает влияния на ФЧХ.

Второй множитель определяет передаточную функцию ВЦКЯ первого порядка, у которой комплексный перемножитель расположен в цепи незадержанной прямой связи. Структурная схема ВЦКЯ, передаточная функция которой описывается вторым множителем (9.2), совпадает со структурной схемой тангенсной ЦКЯ второго вида первого порядка и которая изображена на рис. 4.3. При этом диапазон однозначности ФЧХ остается в прежних пределах  $[-\pi, \pi]$  или  $[0, 2\pi]$ .

Характеристики ВЦКЯ с передаточной функцией (9.2) в диапазоне частот  $\omega T \in [0, 2\pi]$  описываются следующими выражениями:

- амплитудно-частотная характеристика  $H(\omega T) = \text{const}$ ;
- фазочастотная характеристика  $\Phi(\omega T) = \arctg \frac{(1 - r^2) \sin(\omega T - \varphi)}{2r - (1 + r^2) \cos(\omega T - \varphi)}$ ;
- групповое время задержки (ГВЗ)

$$\tau(\omega T) = \frac{d\Phi(\omega T)}{d\omega T} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega T - \varphi)} \quad (9.3)$$

Рассмотрим свойства ГВЗ ВЦКЯ, используя выражение (9.3).

*Свойство 1.* Максимум  $\tau(\omega T)$  находится в точке  $\omega T = \varphi$ .

*Свойство 2.* Функция  $\cos(\omega T - \varphi)$  описывает поведение «задержки» отсчетов входного сигнала вокруг точки  $\omega T = \varphi$ .

*Свойство 3.* Для параметра  $r$ , стремящегося к 1, функция  $\tau(\omega T)$  стремится превратиться в  $\delta(\omega T - \varphi)$ .

*Свойство 4.* Максимальное значение  $\tau_{\text{max}} = T(1 + r)/(1 - r)$ .

*Свойство 5.* Площадь под кривой  $\tau(\omega T)$  в диапазоне частот  $\omega T \in [-\pi, \pi]$  равна  $2\pi$ .

На рис. 9.2 изображены примеры зависимостей ГВЗ  $\tau(\omega T)$  от величины  $r$  и  $\varphi$ .

Видно, что ВЦКЯ обладает симметричными ГВЗ относительно величины  $\varphi$ .

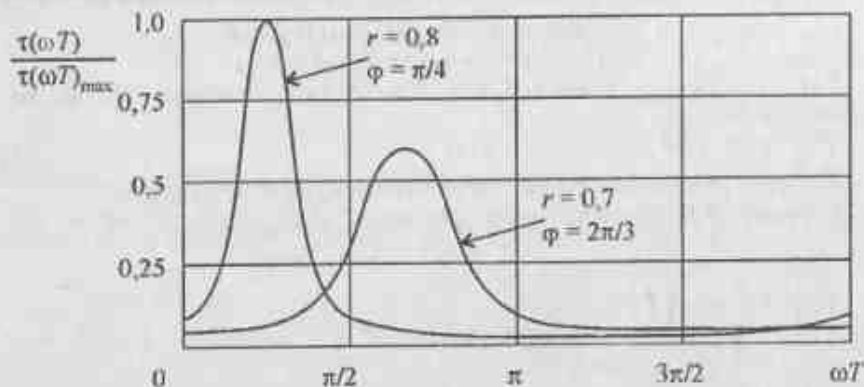


Рис. 9.2. Примеры зависимостей группового времени задержки ВЦКЯ от параметров  $r$  и  $\varphi$

Возможно построение всепропускающих цифровых фильтров на основе использования структур биквадратных ячеек.

Передаточная функция неминимально-фазовой (все пропускающей) биквадратной ячейки на  $Z$ -плоскости описывается выражением [37]

$$H(z) = \frac{[z - r^{-1}e^{j\varphi}][z - r^{-1}e^{-j\varphi}]}{[z - re^{j\varphi}][z - re^{-j\varphi}]} = \frac{1 - r^2z^2 - 2r \cos \varphi z + 1}{r^2z^2 - 2r \cos \varphi z + r^2}$$

Видно, что в последнем выражении первый множитель также не оказывает влияния на ФЧХ. В отличие от ВЦКЯ первого порядка нули и полюсы все пропускающей биквадратной ячейки (ВБЯ) являются комплексно-сопряженными и на  $Z$ -плоскости располагаются симметрично относительно действительной оси единичной окружности, а, следовательно, диапазон однозначности находится в пределах  $\omega T \in [0, \pi]$  или  $\omega T \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

Структурная схема ВБЯ имеет вид, изображенный на рис. 4.23.

Характеристики ВБЯ описываются выражениями:

- амплитудно-частотная характеристика

$$H(\omega T) = \text{const};$$

- фазочастотная характеристика

$$\Phi(\omega T) = \arctg \frac{(1-r^2)\sin(\omega T - \varphi)}{2r - (1+r^2)\cos(\omega T - \varphi)} + \arctg \frac{(1-r^2)\sin(\omega T + \varphi)}{2r - (1+r^2)\cos(\omega T + \varphi)}$$

- групповое время задержки

$$\tau(\omega T) = \frac{1-r^2}{1+r^2 - 2r \cos(\omega T - \varphi)} + \frac{1-r^2}{1+r^2 - 2r \cos(\omega T + \varphi)}$$

### 9.3. Цифровые многопроцессорные неминимально-фазовые фильтры

Как показано в [59], для неминимально-фазовой линейной системы выполняется условие

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\dots H_N(z), \tag{9.4}$$

где  $N$  – число всепропускающих ячеек в их каскадном соединении.

С учетом (9.2) выражение (9.4) может быть записано в виде

$$H(z) = \frac{c \prod_{i=1}^N r_i e^{-j\varphi_i} z^{-1}}{\prod_{i=1}^N r_i (1 - r_i e^{j\varphi_i} z^{-1})}$$

а, следовательно, масштабирование по амплитуде и требуемый фазовый сдвиг могут быть осуществлены в одном узле, устанавливаемом, положим, на входе всего устройства обработки.

Рассмотрим ВЦМФ на основе ВЦКЯ для получения согласованных фильтров сжатия радиосигналов с внутримпульсной модуляцией [75].

Поскольку ВЦКЯ являются рекурсивными ячейками с прямыми связями, то их использование для построения согласованных фильтров позволяет сократить затраты оборудования по сравнению с реализацией подобных устройств на основе использования КИХ-фильтров, методы расчета и вопросы реализации которых достаточно хорошо разработаны и были рассмотрены в главе 7.

Следует сказать, что для сигналов с различными видами внутримпульсной модуляции в общем случае невозможно получить замкнутые процедуры по определению порядка  $N$  и параметров  $r_i$  и  $\varphi_i$  каждой  $i$ -й ВЦКЯ в их каскадном соединении при реализации согласованных ВЦМФ.

В то же время для некоторых частных случаев существуют, хотя и весьма сложные, аналитические процедуры расчета требуемых параметров ВЦМФ, например, для сжатия ЛЧМ-сигнала, функция групповой задержки которого является линейной [76].

Помимо аналитических процедур расчета порядка и параметров ВЦМФ, предназначенных для сжатия ЛЧМ-сигналов, известны процедуры расчета, основанные на кластерном анализе. Подобный подход позволяет за счет использования возможностей ЦВМ получать требуемые характеристики сжимающего ВЦМФ [77]. Однако использование в данной работе в качестве основного звена элементарной всепропускающей биквадратной ячейки для реализации требуемых характеристик ограничивает диапазон используемых частот пределами  $[0, \pi]$ . Другим ограничением является несимметричность формы ГВЗ ВБЯ, что затрудняет расчеты параметров ВЦМФ с требуемыми характеристиками.

Рассмотрим методику расчета, согласованного ВЦМФ на основе ВЦКЯ, соединенных каскадно между собой, когда задается только математическое описание сложного сигнала во временной области при помощи функции ГВЗ. В этом случае достаточно сложно определить аналитическим путем требуемую функцию ГВЗ [78].

Будем полагать, что требуемая ГВЗ сигнала представляется в виде

$$\tau(\omega T) = \sum_{i=1}^N \tau_i(\omega T).$$

Тогда можно предложить следующую итеративную процедуру расчета порядка  $N$  и параметров ВЦМФ с произвольной формой кривой ГВЗ на основе использования возможностей, представляемых ЦВМ [78].

*Этап 1.* Производится расчет фазочастотного спектра сигнала  $\psi(\omega T)$ , по которому вычисляется ФЧХ ВЦМФ  $\Phi(\omega T) = -\psi(\omega T)$ . Эта процедура может быть реализована на основе использования алгоритма БПФ, производящего операции над отсчетами комплексной огибающей сложного сигнала для которого рассчитывается согласованный фильтр.

*Этап 2.* Вычисляется по полученной ФЧХ  $\Phi(\omega T)$  функция ГВЗ  $\tau(\omega T) = d\Phi(\omega T)/d\omega T$ . Определяются граничные точки  $\omega_{\min} T = \varphi_1$  и  $\omega_{\max} T = \varphi_N$  области определения функции ГВЗ. Нормируется ГВЗ относительно величины  $T$  в виде  $\Delta(\omega T) = \tau(\omega T)/T \in [\Delta(\varphi_1), \Delta(\varphi_N)]$ , где  $T$  – период частоты дискретизации, выбираемый из требований выполнения условий теоремы Котельникова

$$\Delta(\varphi_1) = \tau(\omega_{\min} T)/T;$$

$$\Delta(\varphi_N) = \tau(\omega_{\max} T)/T.$$

*Этап 3.* Для точки на частотной оси  $\varphi_1^{(1)} = \varphi_1$ , которой соответствует нормированная ГВЗ  $\Delta(\varphi_1) = \Delta_1$ , все значения которой вычислены на предыдущем этапе, определяется величина  $r_1^{(1)}$  из выражения (9.3) в виде  $r_1^{(1)} = (\Delta_1 - 1)/(\Delta_1 + 1)$ , где индекс в скобках сверху обозначает номер итерации, который в данном случае первый.

*Этап 4.* Следующая точка  $\varphi_2^{(1)} = \omega_2 T^{(1)}$  на частотной оси выбирается из условия, при котором ГВЗ для первой ВЦКЯ уменьшается в заданное число раз (в 2 раза или  $\sqrt{2}$  раз).

Положив, что ГВЗ первой ВЦКЯ уменьшается в 2 раза, из выражения (9.3) будем иметь

$$0,5\Delta_1 = \frac{1 - (r_1^{(1)})^2}{1 + (r_1^{(1)})^2 - 2r_1^{(1)} \cos(\varphi_2^{(1)} - \varphi_1)},$$

откуда находим значение аргумента второй ВЦКЯ в виде

$$\varphi_2^{(1)} = \varphi_1 + \arccos \frac{(r_1^{(1)})^2 (\Delta_1 + 2) + \Delta_1 - 2}{2r_1^{(1)} \Delta_1}.$$

Для полученной точки  $\varphi_2^{(1)}$  производится проверка выполнения условия  $\varphi_2^{(1)} < \varphi_N$ . В случае его выполнения определяется, чему соответствует величина ГВЗ в точке  $\varphi_2^{(1)}$ , т.е. находится  $\Delta(\varphi_2) = \Delta_2^{(1)}$ . Этой величине соответствует сумма ГВЗ первой и второй ВЦКЯ

$$\Delta_2^{(1)} = \frac{1 - (r_1^{(1)})^2}{1 + (r_1^{(1)})^2 - 2r_1^{(1)} \cos(\varphi_2^{(1)} - \varphi_1)} + \frac{1 + (r_2^{(1)})^2}{1 - (r_2^{(1)})^2}.$$

Из последнего выражения определяется величина  $r_2^{(1)}$  второй ВЦКЯ в виде

$$r_2^{(1)} = \frac{\Delta_2^{(1)} - \frac{1 - (r_1^{(1)})^2}{1 + (r_1^{(1)})^2 - 2r_1^{(1)} \cos(\varphi_2^{(1)} - \varphi_1)} - 1}{\Delta_2^{(1)} - \frac{1 - (r_1^{(1)})^2}{1 + (r_1^{(1)})^2 - 2r_1^{(1)} \cos(\varphi_2^{(1)} - \varphi_1)} + 1}.$$

Далее процесс нахождения параметров  $r^{(1)}$  и  $\varphi^{(1)}$  третьей и последующей ВЦКЯ в их каскадном соединении повторяется.

На рис. 9.3 показан пример разбиения на подинтервалы нормированной функции ГВЗ согласованного ВЦМФ для ЛЧМ-сигнала.

Таким образом, на этом этапе определяются предварительные значения модуля  $r_i^{(1)}$  и аргумента  $\varphi_i^{(1)}$   $i$ -й ВЦКЯ из условия выполнения равенства половинному значению ГВЗ  $(i-1)$ -й ВЦКЯ.

Выражение для определения значения аргумента  $\varphi_i^{(1)}$  через предыдущее значение аргумента  $\varphi_{i-1}^{(1)}$  будет иметь вид

$$\varphi_i^{(1)} = \varphi_{i-1}^{(1)} + \arccos \frac{(r_{i-1}^{(1)})^2 (\Delta_{i-1}^{(1)} + 2) + \Delta_{i-1}^{(1)} - 2}{2(r_{i-1}^{(1)}) \Delta_{i-1}^{(1)}}.$$





Рис. 9.3. Пример разбиения на подинтервалы нормированной функции ГВЗ согласованного ВЦМФ для ЛЧМ-сигнала

Производится проверка условия  $\varphi_i^{(1)} \leq \varphi_N$ . При выполнении этого условия по полученной точке на частотной оси  $\varphi_i^{(1)}$  находится величина ГВЗ  $\Delta(\varphi_i^{(1)}) = \Delta_i^{(1)}$ , а затем рассчитывается величина  $r_i^{(1)}$  для  $i$ -й ВЦКЯ из выражения

$$r_i^{(1)} = \frac{\Delta_i^{(1)} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1 - (r_j^{(1)})^2}{1 + (r_j^{(1)})^2 - 2r_j^{(1)} \cos(\varphi_i^{(1)} - \varphi_j^{(1)})} - 1}{\Delta_i^{(1)} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1 - (r_j^{(1)})^2}{1 + (r_j^{(1)})^2 - 2r_j^{(1)} \cos(\varphi_i^{(1)} - \varphi_j^{(1)})} + 1}$$

Если условие  $\varphi_i^{(1)} \leq \varphi_N$  не выполняется, т. е.  $\varphi_i^{(1)} > \varphi_N$ , то производится операция присвоения  $\varphi_i^{(1)} = \varphi_N$ . При этом  $\Delta(\varphi_N^{(1)}) = \Delta_N$  и по последнему выражению определяется величина  $r_N^{(1)}$ .

Этап 5. Поскольку расчет величины  $r_i^{(1)}$  проводился без учета влияния величин ГВЗ второй и следующих ВЦКЯ, то необходимо произвести перерасчет.

Аналогично описанному ранее на второй итерации будем иметь выражение для определения величины  $r_i^{(2)}$

$$r_i^{(2)} = \frac{\Delta_i - \sum_{j=2}^N \frac{1 - (r_j^{(1)})^2}{1 + (r_j^{(1)})^2 - 2r_j^{(1)} \cos(\varphi_i - \varphi_j^{(1)})} - 1}{\Delta_i - \sum_{j=2}^N \frac{1 - (r_j^{(1)})^2}{1 + (r_j^{(1)})^2 - 2r_j^{(1)} \cos(\varphi_i - \varphi_j^{(1)})} + 1}$$

Затем определяется заново величина  $\varphi_2^{(2)}$  по выражению

$$\varphi_2^{(2)} = \varphi_1 + \arccos \frac{(r_1^{(2)})^2 (\Delta_1 + 2) + \Delta_1 - 2}{2r_1^{(2)} \Delta_1}$$

и производится проверка условия  $\varphi_2^{(2)} \leq \varphi_N$ .

Если это условие выполняется, то по полученной величине  $\varphi_2^{(2)}$  определяется  $\Delta_2^{(2)}$

$$\Delta_2^{(2)} = \frac{1 - (r_1^{(2)})^2}{1 + (r_1^{(2)})^2 - 2r_1^{(2)} \cos(\varphi_2^{(2)} - \varphi_1)} + \frac{1 + r_2^{(2)}}{1 - r_2^{(2)}} + \sum_{j=3}^N \frac{1 - (r_j^{(1)})^2}{1 + (r_j^{(1)})^2 - 2r_j^{(1)} \cos(\varphi_2^{(2)} - \varphi_j^{(1)})}$$

откуда

$$r_2^{(2)} = \left\{ \Delta_2^{(2)} - \frac{1 - (r_1^{(2)})^2}{1 + (r_1^{(2)})^2 - 2r_1^{(2)} \cos(\varphi_2^{(2)} - \varphi_1)} - \sum_{j=3}^N \frac{1 - (r_j^{(1)})^2}{1 + (r_j^{(1)})^2 - 2r_j^{(1)} \cos(\varphi_2^{(2)} - \varphi_j^{(1)})} - 1 \right\} \times \left\{ \Delta_2^{(2)} - \frac{1 - (r_1^{(2)})^2}{1 + (r_1^{(2)})^2 - 2r_1^{(2)} \cos(\varphi_2^{(2)} - \varphi_1)} - \sum_{j=3}^N \frac{1 - (r_j^{(1)})^2}{1 + (r_j^{(1)})^2 - 2r_j^{(1)} \cos(\varphi_2^{(2)} - \varphi_j^{(1)})} + 1 \right\}^{-1}$$

Аналогично описанному ранее производится перерасчет аргументов  $\varphi_i^{(2)}$  и модулей  $r_j^{(2)}$  до тех пор, пока не выполнится условие  $\varphi_i^{(2)} = \varphi_N$ , после чего начнется следующая итерация. Итерации заканчиваются тогда,

когда самое большое изменение величины  $r_i^{(m)}$  в  $m$ -й итерации оказывается меньше заранее заданной величины  $\epsilon$ , т.е. выполняется условие  $|r_i^{(m)} - r_i^{(m-1)}| \leq \epsilon$ .

Обобщенные выражения для расчета величин  $\varphi_i^{(m)}$  и  $r_i^{(m)}$  в  $m$ -й итерации имеют вид:

$$\varphi_i^{(m)} = \varphi_{i-1}^{(m)} + \arccos \frac{(r_{i-1}^{(m)})^2 (\Delta_{i-1}^{(m)} + 2) + \Delta_{i-1}^{(m)} - 2}{2r_{i-1}^{(m)} \Delta_{i-1}^{(m)}};$$

$$r_i^{(m)} = \left\{ \Delta_i^{(m)} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1 - (r_j^{(m)})^2}{1 + (r_j^{(m)})^2 - 2r_j^{(m)} \cos(\varphi_i^{(m)} - \varphi_j^{(m)})} - \sum_{k=i+1}^N \frac{1 - (r_k^{(m-1)})^2}{1 + (r_k^{(m-1)})^2 - 2r_k^{(m-1)} \cos(\varphi_i^{(m)} - \varphi_k^{(m-1)})} - 1 \right\} \times \left\{ \Delta_i^{(m)} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1 - (r_j^{(m)})^2}{1 + (r_j^{(m)})^2 - 2r_j^{(m)} \cos(\varphi_i^{(m)} - \varphi_j^{(m)})} - \sum_{k=i+1}^N \frac{1 - (r_k^{(m-1)})^2}{1 + (r_k^{(m-1)})^2 - 2r_k^{(m-1)} \cos(\varphi_i^{(m)} - \varphi_k^{(m-1)})} + 1 \right\}^{-1}$$

Отметим, что величина  $N$ , определяющая порядок устройства обработки сигналов и соответственно количество ВЦКЯ в их каскадном соединении, может изменяться как в большую, так и в меньшую стороны относительно величины, полученной в первой итерации.

**Этап 6.** На этом этапе производится проверка правильности проведенных расчетов путем вычисления  $\Delta(\varphi_{\text{получ}})$  в диапазоне частот  $\omega T \in [\omega_{\text{мин}} T, \omega_{\text{макс}} T]$ . Если  $\max |\Delta(\varphi) - \Delta(\varphi_{\text{получ}})| \leq \delta$  то расчет прекращается. В противном случае корректируется  $\epsilon$  в сторону уменьшения и продолжается выполнение итераций для достижения заданной величины  $\delta$ .

**Этап 7.** Определяется требуемая степень параллелизма при реализации ВЦМФ сжатия и выполняется расчет весовых коэффициентов каждой ВЦКЯ в их каскадном соединении в соответствии с выражениями приводимыми на рис. 4.6 и в главе 5.

Таким образом, предлагаемый подход позволяет получать требуемые характеристики согласованного фильтра для сложных сигналов с произвольным законом внутримпульсной модуляции.

#### 9.4. Оптимизация структур всепропускающих ячеек и фильтров

Рассмотрим некоторые особенности, сопровождающие реализацию ВЦМФ. Из выражения (9.4) нетрудно получить передаточную функцию ВЦМФ в виде

$$H(z) = \frac{z^{-N} + a_{N-1}z^{-N+1} + \dots + a_1z^{-1} + a_0}{1 + a_{N-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{-N+1} + a_0z^{-N}},$$

где  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$  — весовые коэффициенты.

Анализ последнего выражения показывает, что требуется всего  $N$  весовых коэффициентов для реализации требуемой  $H(z)$ .

Возможны различные структуры, позволяющие получать передаточную функцию  $H(z)$  с минимальным числом перемножителей.

В качестве примера рассмотрим оптимизацию структуры всепропускающей цифровой действительной ячейки (ВЦДЯ) первого порядка, передаточная функция которой на  $Z$ -плоскости имеет вид

$$H(z) = \frac{z^{-1} - r}{1 - rz^{-1}} \quad (9.5)$$

Положим, что требуется реализовать выражение (9.5) с единственным перемножителем. Следуя [79] представим, что перемножитель на  $r$  подключен к четырехполюснику так, как показано на рис. 9.4, а сам четырехполюсник содержит только сумматоры и элементы задержки.

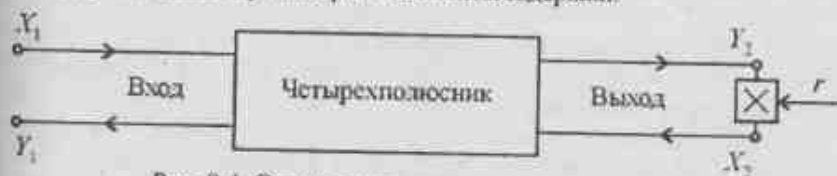


Рис. 9.4. Структурная схема четырехполюсника с включенным перемножителем

Уравнения, описывающие цепь, изображенную на рис. 9.4, имеют вид

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix};$$

$$X_2 = rY_2.$$

Здесь  $q_{ij}$  — параметры четырехполюсника.

Решая эту систему уравнений, получаем выражение

$$\frac{Y_1}{X_1} = \frac{q_{11} - r(q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21})}{1 - rq_{22}}.$$

Сравнивая последнее выражение с (9.5) нетрудно установить соответствия в виде

$$q_{11} = q_{22} = z^{-1}; \quad (9.6)$$

$$q_{11}q_{22} - q_{21}q_{12} = 1. \quad (9.7)$$

\* Подставляя (9.6) в (9.7), нетрудно получить выражение в следующем виде

$$q_{12}q_{21} = z^{-2} - 1. \quad (9.8)$$

Используя соотношения (9.6) – (9.8), получим набор матриц параметров, описывающих четырехполосник:

$$[Z_1] = \begin{bmatrix} z^{-1} & z^{-2} - 1 \\ 1 & z^{-1} \end{bmatrix}; \quad (9.9)$$

$$[Z_2] = \begin{bmatrix} z^{-1} & z^{-1} + 1 \\ z^{-1} - 1 & z^{-1} \end{bmatrix}; \quad (9.10)$$

$$[Z_3] = \begin{bmatrix} z^{-1} & 1 \\ z^{-2} - 1 & z^{-1} \end{bmatrix}; \quad (9.11)$$

$$[Z_4] = \begin{bmatrix} z^{-1} & z^{-1} - 1 \\ z^{-1} + 1 & z^{-1} \end{bmatrix}. \quad (9.12)$$

Используя данные матрицы, можно получить набор структур ВЦДЯ первого порядка. Очевидно, каждая из полученных структур, описываемая той или иной матрицей параметров четырехполосника, может иметь различный уровень ошибок округления при перемножении чисел, представленных в форме с фиксированной запятой.

Будем рассматривать шумовую модель четырехполосника, изображенного на рис. 9.5 в виде каскадного соединения идеального перемножителя и генератора «белого» шума  $E$  с мощностью шума, определяемого выражением  $z^{-2n}/12 = \epsilon^2/12$ , где  $n$  – число разрядов чисел, с которыми оперирует перемножитель.

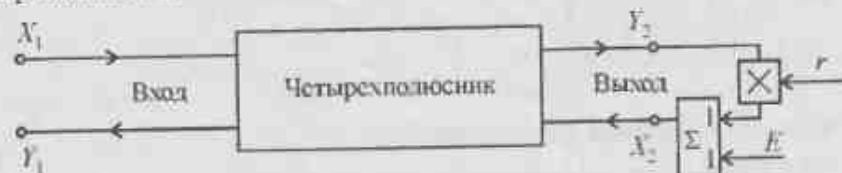


Рис. 9.5. Шумовая модель ВЦДЯ первого порядка

Дисперсия шума от  $i$ -го источника шума на выходе цифрового устройства определяется через передаточную функцию  $H_i(z)$  этого устройства между его выходом и  $i$ -м источником шума согласно выражения

$$\sigma_i^2 = \frac{\epsilon^2}{12(j2\pi)} \oint H_i(z)H_i(z^{-1})z^{-1}dz.$$

Как показано в [79], для ВЦДЯ первого порядка, структуры которых описываются выражениями (9.9) – (9.12), дисперсии шумов могут быть определены согласно формулам, приведенным в табл. 9.1.

Таблица 9.1.

Мощность шумов на выходе ВЦДЯ первого порядка

Дисперсия шума на выходе ВЦДЯ	Структуры, описываемые матрицами $[Z_i]$			
	$[Z_1]$	$[Z_2]$	$[Z_3]$	$[Z_4]$
$\sigma_i^2$	$\frac{\epsilon^2}{6}$	$\frac{\epsilon^2}{6(1-r)}$	$\frac{\epsilon^2}{12(1-r^2)}$	$\frac{\epsilon^2}{6(1+r)}$

Видно, что постоянный уровень шумов, не зависящий от величины  $r$ , имеет ВЦДЯ первого порядка, структурная схема которой описывается выражением (9.9) и изображена на рис. 9.6. Отметим, что данная структура используется как фазокорректирующая цепь в структурной схеме, изображенной на рис. 2.9.

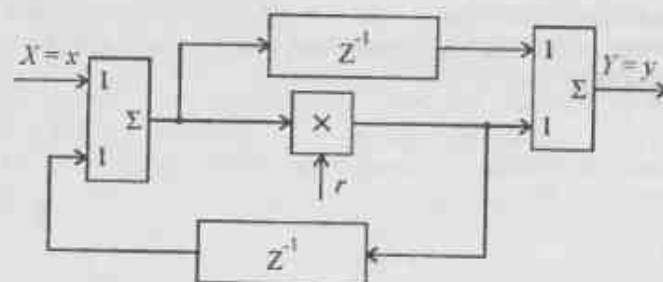


Рис. 9.6. Структурная схема ВЦДЯ первого порядка с постоянным уровнем шумов

Используя аналогичную методику, можно получить набор структур ВЦДЯ с минимальным числом перемножителей. Анализ шумов вычислений тех или иных структур основан на представлении ВЦДЯ в виде шестиполосника, ко входам которого подключены два перемножителя, а сам шестиполосник состоит из сумматоров и элементов задержки. Отметим, что

возможна одновременная оптимизация количества перемножителей и элементов задержки, но подобный подход сопровождается ростом числа сумматоров и вычитателей [80].

Сущность предлагаемого подхода заключается в том, что передаточная функция преобразуется таким образом, чтобы сигналы с выходов  $i$ -го и  $(N-i)$ -го элементов задержки, умноженные на соответствующие весовые коэффициенты, одновременно подавались на сумматоры и вычитатели. Полученные результаты поступают на соответствующие входы сумматоров, число которых увеличивается пропорционально сложности передаточной функции ВЦМФ.

### 9.5. Выводы

Таким образом, рассмотренные воспроизводящие ячейки и фильтры могут быть использованы как для реализации фазосдвигающих цепей, так и для реализации различного рода согласованных фильтров, причем их выполнение может быть осуществлено с минимальным числом перемножителей и элементов задержки.

Следует сказать, что использование ВЦМФ в качестве фазовыравнивающих цепей приводит к добавлению задержки в большей или меньшей степени к задержке сигнала, который прошел минимально-фазовые цепи.

Выравнивание фазочастотной характеристики того или иного минимально-фазового фильтра, выполненного на основе тангенсных, синусных или квазитангенсных ячеек, приводит к росту общего числа операций. Поэтому иногда получается, что более выгодно реализовывать многопроцессорный КИХ-фильтр с заранее заданной ФЧХ [37]. Однако такие расчеты следует проводить в каждом конкретном случае для принятия соответствующего решения.

## 10. ЦИФРОВЫЕ МНОГОПРОЦЕССОРНЫЕ АНАЛИЗАТОРЫ СПЕКТРА

### 10.1. Вводные замечания

Важным частным случаем цифровых линейных систем являются цифровые многопроцессорные анализаторы спектра, которые в дальнейшем будем называть анализаторами спектра (АС).

АС различаются в зависимости от наличия или отсутствия априорных сведений об обрабатываемых процессах (непараметрические и параметрические, нестационарные и стационарные) и от режимов обработки («скользящее» окно или «скачущее»).

К непараметрическим методам спектрального анализа относят методы, в которых не используются сведения о параметрах анализируемых процессов.

В случае, когда процесс нестационарный и отсутствуют какие-либо априорные сведения об его характеристиках, следует использовать параллельный вычислитель спектральных характеристик на основе непосредственного использования алгоритма ДПФ, который был рассмотрен в главе 3, в режиме работы «скользящее» окно. При этом «платой» за незнание являются как наибольшие затраты оборудования, так и вычислительных операций.

В том случае, когда имеются сведения о том, что процесс стационарный, целесообразно применение цифрового последовательного АС, решающего задачу в режиме работы «скользящее» окно. За счет этого удастся существенно сократить затраты оборудования, но имеет место проигрыш в оперативности получения информации.

При известных априори сведениях о начале и конце анализируемых реализаций, находят применение алгоритмы параллельного спектрального анализа на основе использования быстрых процедур расчета, которые носят общее название алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). Использование алгоритмов БПФ, по сравнению со случаем прямого вычисления по алгоритму ДПФ, сопровождается задержкой выдачи параллельной информации о спектрах анализируемых процессов при одновременном существенном сокращении количества выполняемых операций.

Все рассмотренные выше методы относятся к непараметрическим.

При более полных априорных сведениях о параметрах анализируемых процессов используются параметрические методы спектрального анализа. Это позволяет в ряде случаев существенно снизить как затраты оборудования, так и количество выполняемых операций без ухудшения получаемой информации, а иногда получить и более высокое ее качество.

### 10.2. Цифровые многопроцессорные параллельные анализаторы спектра

Как указывалось, к классу линейных цифровых систем относятся системы, вычисляющие ДПФ тем или иным способом. По определению, ДПФ последовательности  $x_n$  на временном интервале  $[0, N-1]$ , является функция, описываемая выражением (3.18) и которая имеет вид

$$X_k = X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi nk/N), \quad (10.1)$$

где  $\Omega = 2\pi k/N$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Структурная схема устройства, позволяющая осуществить реализацию последнего выражения, представлена в виде, изображенном на рис. 10.1.

Видно, что в данном случае в каждом «частотном»  $k$ -ом канале, число которых равно  $N$ , требуется иметь набор «цифровых гетеродинов»  $G_k$ , каждый из которых содержит бы достаточно большое количество отсчетов ДЭФ. При этом количество требуемых операций комплексного умножения и сложения для получения  $N$  коэффициентов Фурье по  $N$  отсчетам входной реализации будет равно  $N^2$ .

Рассмотрим возможности сокращения затрат памяти, в которой хранились бы отсчеты ДЭФ.

Выражение (10.1) можно также получить из (4.2) если в левой его части для каждого  $k$  положить количество членов равным единице ( $m=0$ ) с весовым коэффициентом  $a_0=1$ , а в правой его части количество членов будет равно  $N-1$ .

Тогда коэффициенты  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{N-1}$  будут

$$\begin{aligned} b_0 &= \exp(j0); \\ b_1 &= \exp[-j(2\pi/N)k]; \\ b_2 &= \exp[-j(2\pi/N)2k]; \\ &\vdots \\ b_{N-1} &= \exp[-j(2\pi/N)(N-1)k]. \end{aligned} \quad (10.2)$$

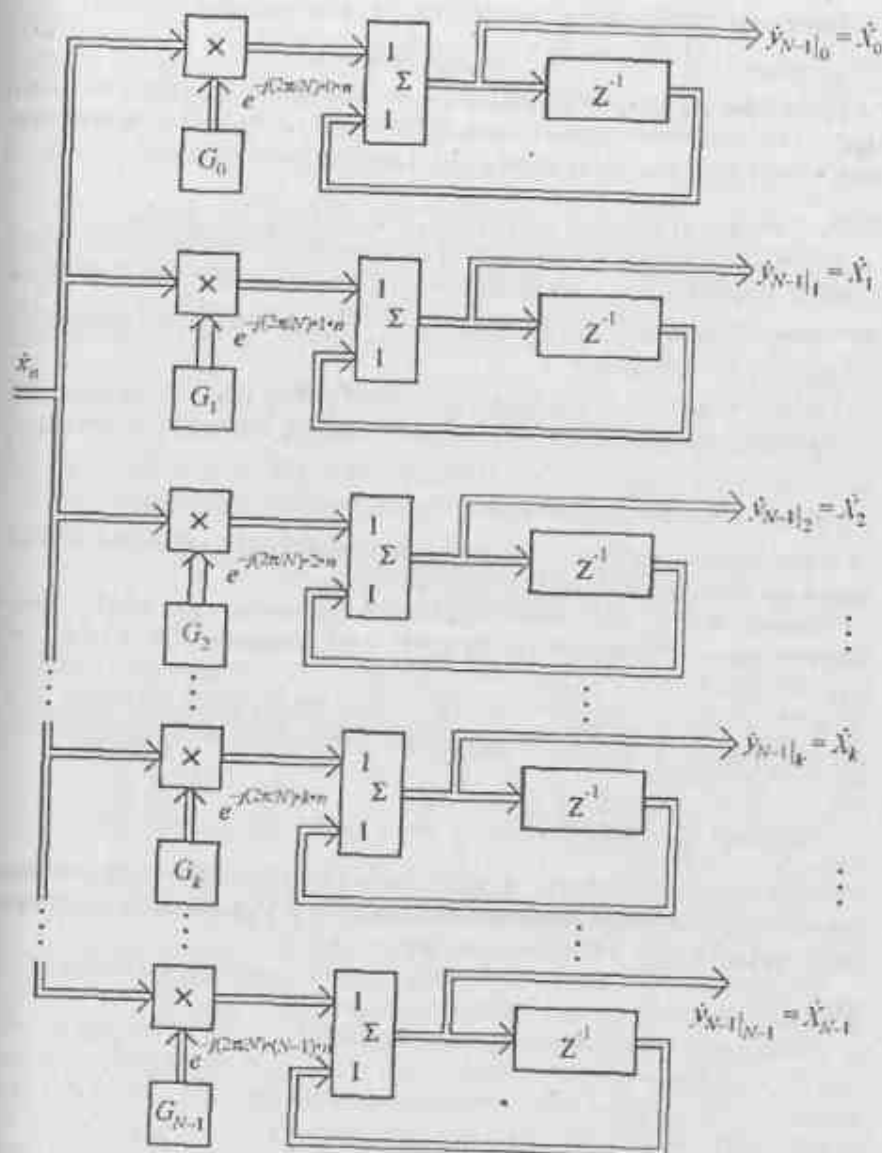


Рис. 10.1. Структурная схема устройства, вычисляющего коэффициенты ДПФ

Очевидно, что в момент времени  $(N-1)T$  для каждого  $k$  величины, расположенные в левой части (4.2), будут равны  $\dot{y}_{N-1}|_k = \dot{X}_k$ .

При этом цифровая линейная система, описываемая (4.2), при указанных весовых коэффициентах реализуется при помощи нерекурсивного вычислителя в виде ЦЛЗ на  $(N-1)$  отсчет и соответствующих весовых коэффициентов  $\exp[-j(2\pi/N)kn] = W^{kn}$ , как показано на рис. 10.2.

Анализ показывает, что для вычисления каждого коэффициента Фурье входной реализации  $\dot{x}_n$ , состоящей из  $N$  отсчетов, требуется произвести  $N^2$  вычислений к моменту времени  $NT$  и выдать результат на временном интервале  $[(N-1)T, NT]$ .

Следует отметить, что устройство, показанное на рис. 10.2 содержащее  $N$  цифровых линий задержки с  $N$  отводами каждая, может быть выполнено на одной линии задержки с  $N^2$  отводами (к каждой «отводной» точке присоединяется  $N$  различных весовых коэффициентов). Однако даже такое техническое решение требует  $N^2$  операций комплексного сложения и умножения для вычисления  $N$  коэффициентов Фурье.

Рассмотрим, как изменяется форма АЧХ во времени отдельного частотного канала, реализующего вычисление  $k$ -го коэффициента Фурье, устройств, изображенных на рис. 10.1 и рис. 10.2. Как показано в [39], каждый  $k$ -й канал данного устройства обладает АЧХ, совпадающей с модулем спектра сигнала, состоящего из  $N$  одинаковых временных отсчетов, описываемых выражением

$$H(k\Omega)_n = \frac{|\sin(2\pi kn/N)|}{|\sin(2\pi k/N)|}$$

и которая иногда называется динамической АЧХ, поскольку ее форма зависит от номера отсчета  $n$  входной реализации. Эта АЧХ может быть условно представлена в виде, изображенном на рис. 10.3 [12].

Очевидно, что от момента времени  $t = (N-1)T$  до момента времени  $t = NT$  АЧХ всех каналов будет иметь вид, изображенный на рис. 10.4.

Вследствие круговой симметрии, связанной с процессом дискретизации [15], номера частотных каналов  $0$  и  $N$  совпадают. Очевидно, что вычислитель коэффициентов ДПФ, изображенный на рис. 10.2, имеет большие затраты оборудования для хранения информации и в то же время имеет более простую организацию управления вычислительным процессом по сравнению с вычислителем, изображенным на рис. 10.1.

Рассмотрим более экономичное построение вычислителя, которое будет связано с рекуррентной организацией процесса вычисления и позволит также сократить затраты памяти на хранение отсчетов ДЭФ.

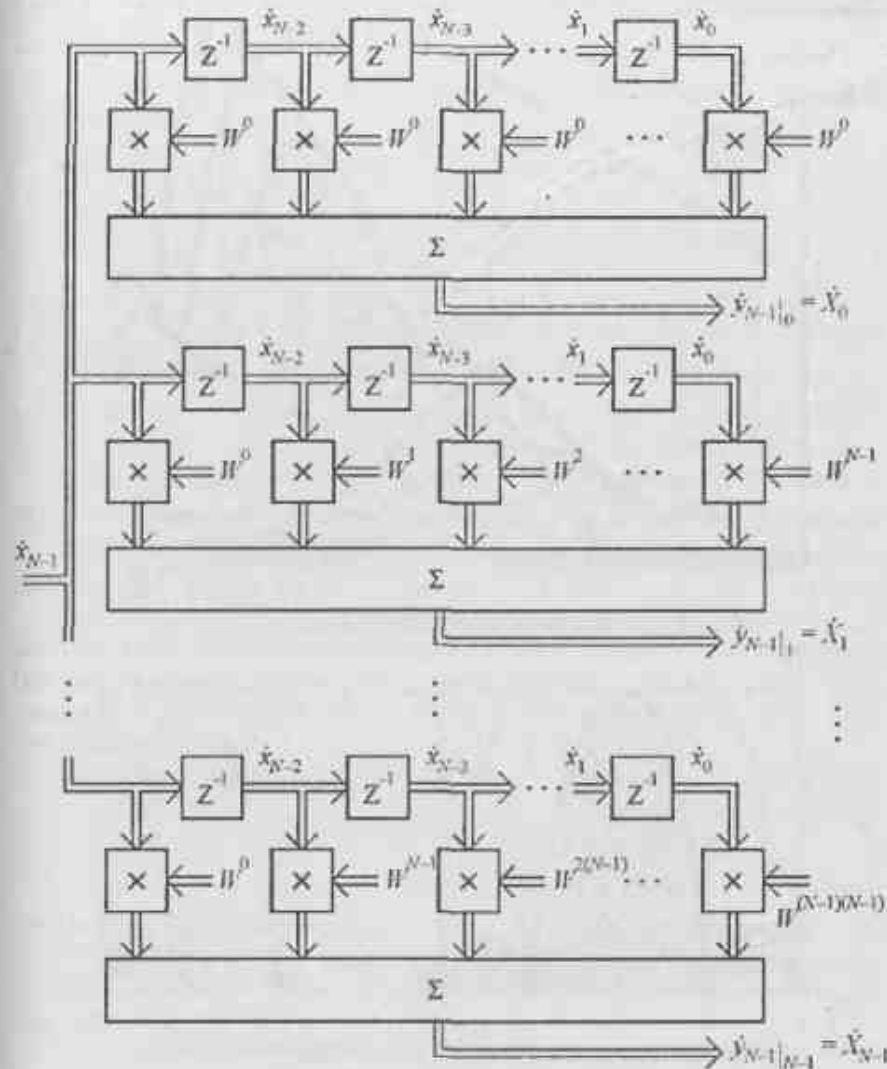


Рис. 10.2. Структурная схема нерекурсивного устройства вычисления коэффициентов ДПФ

Сравнивая коэффициенты устройства  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{N-1}$ , в выражении (10.2) нетрудно видеть, что они отличаются друг от друга на постоянный фазовый набег от отсчета к отсчету, равный величине  $\exp[j(2\pi/N)k]$ , который может рассматриваться как знаменатель прогрессии в ряде этих чисел.

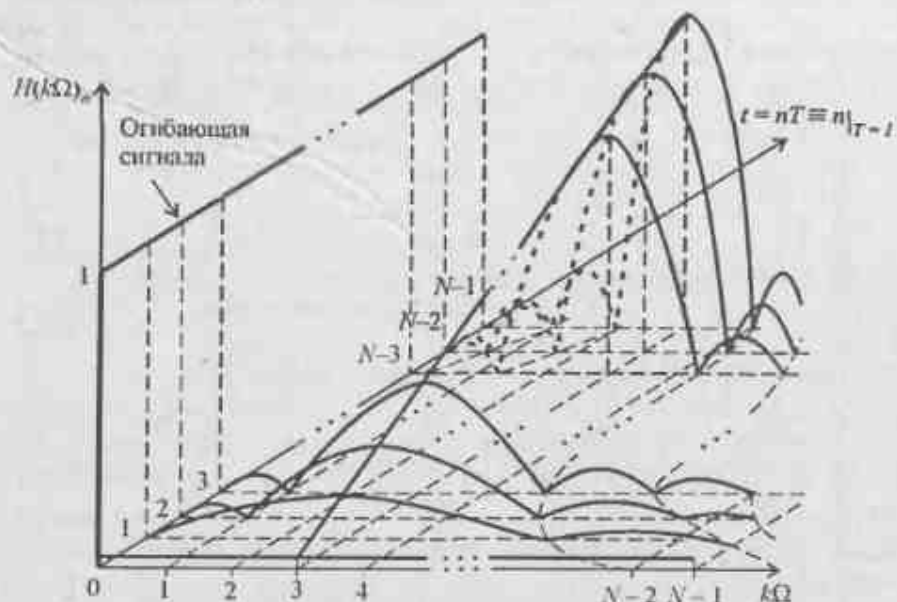


Рис. 10.3. Условное изображение динамической АЧХ

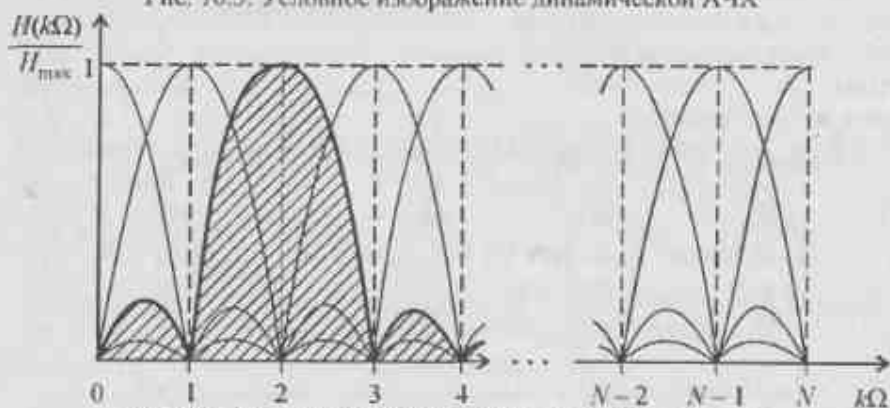


Рис. 10.4. Вид нормированных АЧХ каналов устройства, вычисляющего коэффициенты ДПФ

Следуя (4.16), нетрудно определить, что для каждого значения  $k$  выражение (10.1) приобретает вид геометрической прогрессии. Тогда при  $\hat{x}_n \equiv 1$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$  и производя действия, аналогичные (4.16), получаем выражение (4.17) при  $\hat{z}_p = \exp[j(2\pi/N)k]$  [36].

Следовательно, вычисление коэффициентов Фурье на конечном временном интервале по  $N$  отсчетам можно осуществить при помощи набора  $N$

рекурсивных звеньев первого порядка, передаточная функция каждого из которых на  $Z$ -плоскости имеет вид, описываемый выражением (4.19), что соответствует передаточной функции синусной ЦКЯ, и может быть представлена в форме

$$H(z)|_k = \frac{1}{1 - \exp[j(2\pi/N)k]z^{-1}} \quad (10.3)$$

В этом случае, структурная схема устройства, реализующего алгоритм (10.3), имеет вид, изображенный на рис. 10.5, где  $Z^{-N}$  - задержка на  $N$  отсчетов для обеспечения режима работы «скользящее» окно [37]. При этом каждое рекурсивное звено является синусной ЦКЯ модульное значение полюса у каждой из которых  $r_p = 1$ .

Очевидно, что, как и в случаях реализации устройства непосредственно по выражению (10.1), и при их реализации на нерекурсивных звеньях, получение  $N$  коэффициентов Фурье по  $N$  входным отсчетам на синусных ЦКЯ, называемых также цифровыми резонаторами, требует  $N^2$  вычислений в виде операций комплексного умножения и сложения на интервале времени  $NT$ .

Реализация устройства, структурная схема которого изображена на рис. 10.5, требует для режима работы «скользящее» окно непрерывной проверки на устойчивость всех рекурсивных звеньев вследствие того, что операции комплексного умножения осуществляются с числами, имеющими конечную разрядность.

Указанного недостатка можно избежать с одновременным сокращением затрат оборудования за счет устранения ЦЛЗ с задержкой  $Z^{-N}$  следующим путем. Учтем, что количество эффективно обрабатываемых отсчетов  $N$  синусной ЦКЯ связано с модулем полюса  $r_p$  соотношением (4.25). Тогда величина  $r_p$  будет равна

$$r_p = \frac{N-2,3}{N} \quad (10.4)$$

При этом для каждой синусной ЦКЯ величина  $\varphi_{pk}$  выбирается из соотношения  $\varphi_{p(k+1)} = \varphi_{pk} + 2\pi/N$ , где  $\varphi_{p0} = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Структурную схему параллельного многопроцессорного АС, вычисляющего коэффициенты ДПФ в режиме работы «скользящее» окно при значениях  $r_p$ , описываемых выражением (10.4), можно представить в виде, изображенном на рис. 10.6.

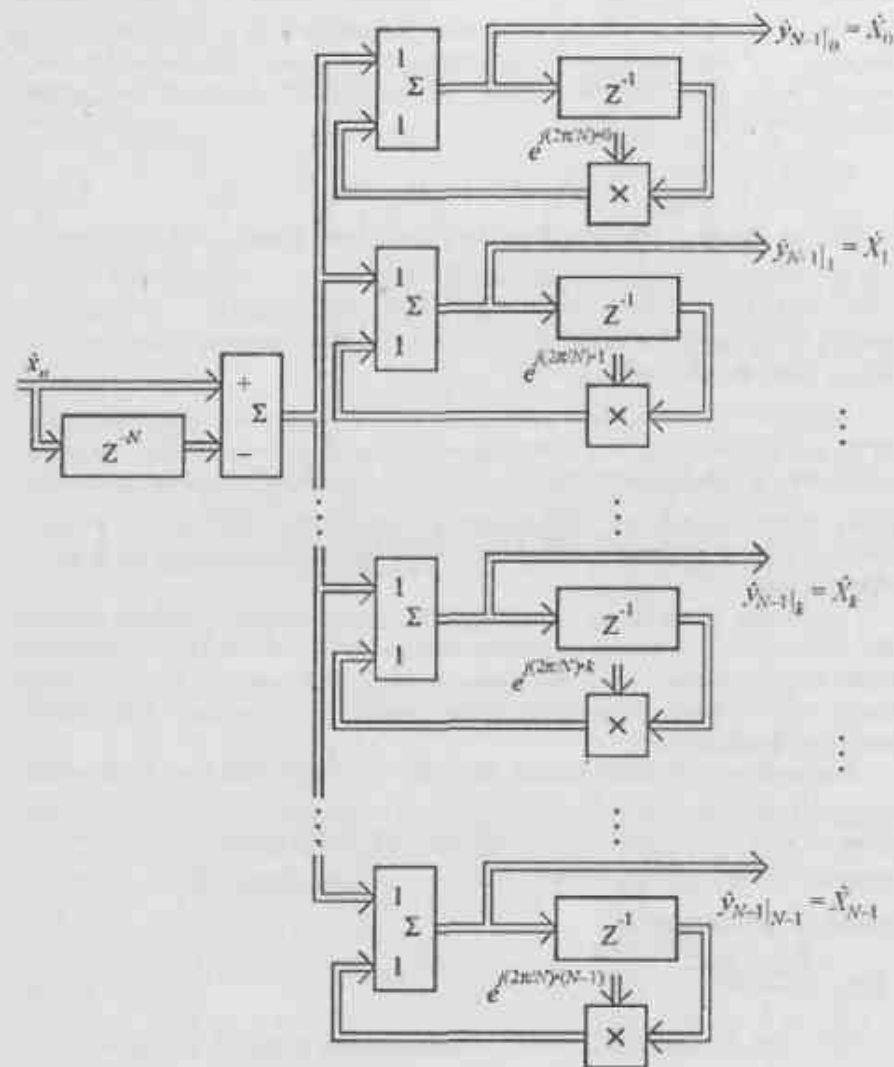


Рис. 10.5. Структурная схема устройства, вычисляющего коэффициенты ДПФ в режиме работы «скользящее» окно

Передаточная функция на  $Z$ -плоскости каждого рекурсивного звена, вычисляющего соответствующий коэффициент ДПФ, получается из (4.19) с учетом (10.3) и (10.4) при условии, что  $\varphi_p = \varphi_{pk} = \frac{2\pi}{N}k$  и имеет вид

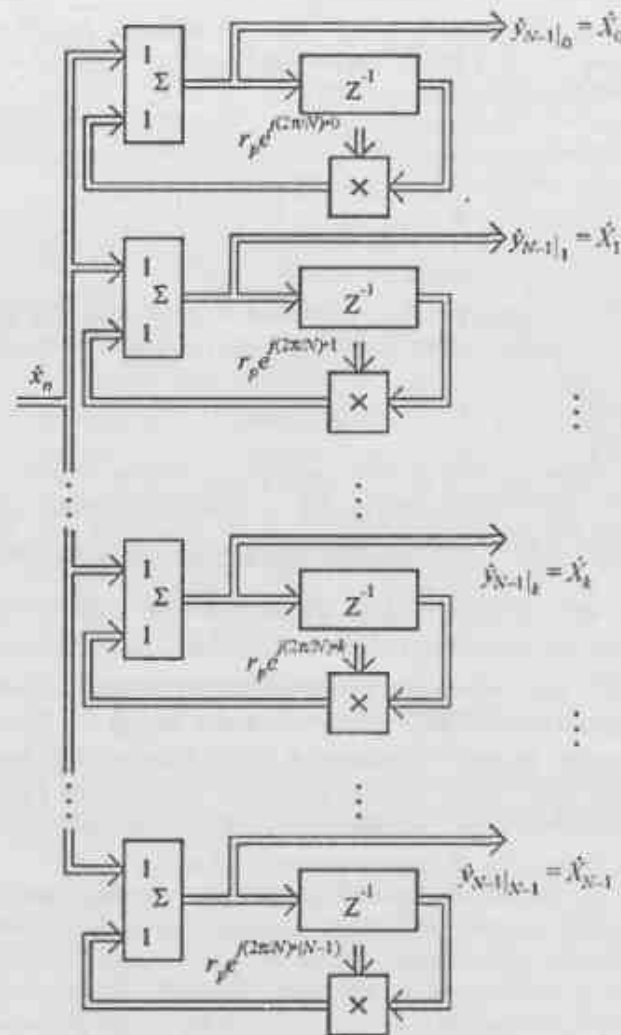


Рис. 10.6. Структурная схема устройства вычисления коэффициентов ДПФ на основе цифровых резонаторов

$$H(z)|_k = \frac{1}{1 - r_p e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} = \frac{1}{1 - r_p e^{j\varphi_{pk}} z^{-1}} \quad (10.5)$$

Характеристики цифровых резонаторов, передаточная функция каждого из которых на  $Z$ -плоскости описывается выражением (10.5), были подробно



рассмотрены в главе 4, и здесь рассматриваться не будут. Отметим, что высокая эффективность подобного устройства достигается за счет использования итеративного алгоритма расчета ДПФ.

АЧХ отдельного  $k$ -го фильтра гребенки цифровых резонаторов, каждый из которых также называется экспоненциальным весовым накопителем, в нормированном виде описывается выражением

$$\left. \frac{H(\omega T)}{H_{\max}} \right|_k = \frac{1-r_p}{\sqrt{1+r_p^2-2r_p \cos(\omega T - \varphi_{pk})}}$$

Ширина полоса пропускания на уровне 0,707 в герцах для каждого из них может быть получена из (4.23) и определяется выражением [15, 39]

$$\Delta f_{0,7} = \frac{1-r_p}{\pi \sqrt{r_p} T} \quad (10.6)$$

При этом форма АЧХ в области вершины повторяет форму частотной характеристики простого контура в области малых расстройек, а при  $\varphi_p = 0$  повторяет форму АЧХ интегрирующей аналоговой RC-цепи, как показано на рис. 3.9.

Очевидно, что для гребенки фильтров полюса на  $Z$ -плоскости будут располагаться внутри единичного круга на расстоянии  $r_p$  от центра, а угловые расстояния, в случае фильтров с одинаковой разрешающей способностью по частоте, будут равны  $2\pi/N$  радиан. Отметим также, что достоинством гребенки фильтров является возможность построения АС с различной разрешающей способностью по спектру. Последнее достигается заданием различных значений величин  $r_p$ , причем значения  $\varphi_p$  изменяются таким образом, чтобы обеспечить требуемое разрешение по частоте.

Отметим, что все рассмотренные параллельные методы цифрового спектрального анализа характеризуются, в случае построения специализированных вычислителей, достаточно большими затратами оборудования и требуют, при изменении разрешающей способности в заданном диапазоне частот, изменений в затратах оборудования, что не всегда возможно осуществить простыми средствами.

### 10.3. Цифровой последовательный анализатор спектра

Последовательные методы цифрового спектрального анализа позволяют существенно сократить затраты оборудования в случае, если анализу подвергаются стационарные эргодические случайные процессы. Кроме того, достаточно просто при использовании последовательного спектрального анализа изменять в широких пределах разрешающую способность без изменения затрат оборудования.

Рассмотрим цифровой последовательный спектральный анализ на основе рекуррентного вычисления коэффициентов ДПФ, который основан на том, что центральная частота ЦМФ последовательно во времени линейно перестраивается по заданному частотному диапазону [81, 82].

Пусть имеется синусная ЦКЯ, передаточная функция которой на  $Z$ -плоскости имеет вид

$$H(z)_{nT} = \frac{z}{z - r_p \exp(j2\pi nT/N)} \quad (10.7)$$

где  $r_p \exp(j2\pi nT/N)$  – значение полюса на  $Z$ -плоскости, положение которого изменяется в зависимости от момента времени  $t = nT$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $N$  – любое целое число, определяющее общее количество положений полюсов синусной ЦКЯ. Полюса расположены на угловом расстоянии  $2\pi/N$  радиан друг от друга на окружности радиуса  $r_p < 1$  внутри единичной окружности на  $Z$ -плоскости.

Из выражения (10.7) следует, что в течение времени анализа с каждым вновь поступившим входным отсчетом положение полюса изменяется от одного положения к другому на физический угол  $2\pi/N$ . Импульсная характеристика устройства, описываемого (10.7), имеет вид

$$h(nT) = r_p^n \exp[j2\pi(nT)^2/N]$$

и представляет собой затухающее дискретизированное колебание с линейно изменяющейся частотой, что соответствует квадратичному набегу фазы, параметры которого определяются величиной  $N$ .

Рассмотрим отклик синусной ЦКЯ с передаточной функцией (10.7) при воздействии на ее вход комплексной дискретизированной экспоненты

$$\hat{x}_{(nT)} = \exp[j(2\pi knT/N + \varphi)], \quad (10.8)$$

где  $\varphi$  – неизвестная начальная фаза,  $0 \leq 2\pi kn/N \leq 2\pi(N-1)/N$  – величина фазового набега во входном сигнале от отсчета к отсчету.

Поскольку синусная ЦКЯ, описываемая выражением (10.7), является линейным устройством с переменными во времени параметрами, то для анализа можно применить принцип суперпозиции, а, следовательно, можно рассматривать воздействие каждого входного отсчета независимо от воздействия других. Как и ранее, полагая  $T=1$ , отклик на выходе устройства в  $n$ -й момент времени от воздействия в момент времени  $t = 0, 1, 2, \dots, m, \dots$  будет

$$\begin{aligned} \hat{y}_{(n)}^{(0)} &= \hat{x}_{(0)} r_p \exp \left[ j \left( \frac{\pi}{N} \right) (2 \cdot 0 + 1) \right] r_p \exp \left[ j \left( \frac{\pi}{N} \right) (2 \cdot 1 + 1) \right] \times \dots \times \\ &\times r_p \exp \left[ j \left( \frac{\pi}{N} \right) [2 \cdot (n-1) + 1] \right] = \hat{x}_{(0)} r_p^n \exp \left[ j \left( \frac{\pi}{N} \right) \left( n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} i \right) \right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\sum_{i=1}^{n-1} i = 0,5n(n-1)$  [63] и подставляя из (10.8)

$\hat{x}_{(0)} = \exp(j\varphi)$ , получаем

$$\hat{y}_{(n)}^{(0)} = \exp(j\varphi) r_p^n \exp(j\pi n^2 / N).$$

Определим реакцию на выходе в  $n$ -й момент времени от воздействия в момент времени  $t = 1$  при условии, что  $\hat{x}_{(1)} = \exp[j(2\pi k/N + \varphi)]$ , откуда

$$\begin{aligned} \hat{y}_{(n)}^{(1)} &= \hat{x}_{(1)} r_p \exp\left[j\left(\frac{\pi}{N}\right)(2 \cdot 1 + 1)\right] r_p \exp\left[j\left(\frac{\pi}{N}\right)(2 \cdot 2 + 1)\right] \times \dots \times \\ &\times r_p \exp\left[j\left(\frac{\pi}{N}\right)[2 \cdot (n-1) + 1]\right] = \hat{x}_{(1)} r_p^n \exp\left[j\left(\frac{\pi}{N}\right)\left[(n-1) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} i\right]\right] = \\ &= \exp[j(2\pi k/N + \varphi)] r_p^{n-1} \exp\left[j\left(\frac{\pi}{N}\right)(n^2 - 1)\right]. \end{aligned}$$

Реакция на выходе в  $n$ -й момент времени от воздействия в момент времени  $t = 2$  при условии, что  $\hat{x}_{(2)} = \exp[j(2\pi k \cdot 2/N + \varphi)]$ , будет

$$\begin{aligned} \hat{y}_{(n)}^{(2)} &= \hat{x}_{(2)} r_p \exp\left[j\left(\frac{\pi}{N}\right)(2 \cdot 2 + 1)\right] r_p \exp\left[j\left(\frac{\pi}{N}\right)(2 \cdot 3 + 1)\right] \times \dots \times \\ &\times r_p \exp\left[j\left(\frac{\pi}{N}\right)[2 \cdot (n-1) + 1]\right] = \\ &= \exp[j(2\pi k \cdot 2/N + \varphi)] r_p^{n-2} \exp\left[j\left(\frac{\pi}{N}\right)\left(n - 2 + 2 \sum_{i=2}^{n-1} i\right)\right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\sum_{i=m}^{n-1} i = \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{m-1} i = 0,5(n^2 - n - m^2 + m)$ , для  $m = 2$  получаем

$$\hat{y}_{(n)}^{(2)} = \exp[j(2\pi k \cdot 2/N + \varphi)] r_p^{n-2} \exp[j\pi(n^2 - 4)/N].$$

Аналогично отклик на выходе в  $n$ -й момент времени от воздействия отсчета на входе в  $m$ -й момент времени ( $m \leq n$ ) будет

$$\hat{y}_{(n)}^{(m)} = \exp[j(2\pi km/N + \varphi)] r_p^{n-m} \exp[j\pi(n^2 - m^2)/N].$$

Отклик в  $n$ -й момент времени от воздействия отсчетов входной реализации (10.8) в моменты времени  $t = 0, 1, 2, \dots, m$  будет равен сумме откликов от этих воздействий:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{(n)} &= \sum_{m=0}^n \hat{y}_{(n)}^{(m)} = \sum_{m=0}^n \exp[j(2\pi km/N + \varphi)] r_p^{n-m} \exp[j\pi(n^2 - m^2)/N] = \\ &= \exp[j(2\pi n^2/N + \varphi)] \sum_{m=0}^n r_p^{n-m} \exp[j\pi(2km - m^2)/N]. \end{aligned} \quad (10.9)$$

В выражении (10.9) член перед суммой может рассматриваться как «заполнение», а выражение под знаком суммы — как огибающая.

Рассмотрим в (10.9) выражение под знаком суммы. Видно, что максимальная скорость нарастания амплитуды огибающей достигается при синхронном суммировании входных отсчетов, когда выполняется условие баланса фаз в экспоненте, т.е. при  $\pi(2km - m^2)/N = 0$ . Данное условие соответствует точке на оси частот называемой точкой синфазности.

Решая последнее уравнение, находим, что точке синфазности соответствует временной отсчет с номером  $m = 2k$ . Этому временному отсчету от начала анализа соответствует колебание с фазовым набегом от отсчета к отсчету, равным  $2\pi k/N$ , т.е. равным набегу фазы анализируемого сигнала (10.8).

В том случае, если бы центральная частота синусной ЦКЯ не перестраивалась от отсчета к отсчету, на выходе, после определенного числа циркуляций, определяемого величиной  $r_p$ , установилась бы определенная амплитуда. Сдвиг центральной частоты синусной ЦКЯ приводит к тому, что происходит нарушение баланса фаз. Это приводит к прекращению синхронного накопления, а в силу условия  $r_p < 1$  происходит уменьшение накопленной амплитуды огибающей.

Для определения количества входных отсчетов, участвующих в синхронном суммировании в районе точки синфазности, будем полагать, что этот процесс начинает приблизительно выполняться при условии, что  $\pi(2km - m^2)/N = -0,5\pi$ . Исключим из дальнейшего анализа влияние местоположения точки синфазности, заменив  $m$  на  $p$ , и положим  $k = 0$ .

Тогда из последнего выражения получим  $p = \sqrt{0,5N}$ . Полученное количество входных отсчетов  $p$ , участвующих в процессе синхронного суммирования, связано с величиной  $r_p$  через соотношение (10.4)

$r_p \approx (p - 2,3)/p \approx 1 - 3,25/\sqrt{N}$ , которое достаточно точно выполняется при величинах  $N \geq 25$ . Разрешающая способность определяется аналогично тому, как она определялась для отдельного фильтра гребенки, т.е. по выражению (10.6). Очевидно, что для цифрового последовательного АС величина  $N$  определяет как скорость перестройки в диапазоне анализа так и величину модуля  $r_p$  и разрешающую способность  $\Delta f_{0,7}$ . Чем больше  $N$ , тем

медленнее перестройка центральной частоты, тем ближе к единичной окружности на  $Z$ -плоскости будут располагаться полюса и тем более узкой будет полоса пропускания синусной ЦКЯ.

При необходимости проведения спектрального анализа в заданном диапазоне частот, что соответствует какому-либо сектору на  $Z$ -плоскости, передаточная функция (10.7) преобразуется к виду

$$H(z)_{nT, \Delta\varphi} = \frac{z}{z - r_p \exp\{j2\pi[n(\text{mod } Q + q)]/N\}}$$

где  $2\pi q/N$  — начальный угол сектора анализа на  $Z$ -плоскости, соответствующий начальной частоте анализа;  $2\pi Q/N$  — угол, занимаемый сектором анализа, соответствующий заданному диапазону частот, в котором происходит перемещение полюса от отсчета к отсчету;  $0 \leq q < N$  и  $0 < Q \leq N - q$  — целые числа. При  $q = 0$  и  $Q = N$  последнее выражение совпадает с (10.7).

При использовании более сложного фильтра, расчет его целесообразно проводить по рассмотренным в главе 6 методикам. Использование данных ЦМФ позволяет сохранить постоянными коэффициент передачи и заданную форму АЧХ при всех преобразованиях. Простейшим примером цифрового последовательного анализатора спектра может служить устройство, структурная схема которого изображена на рис. 10.7.

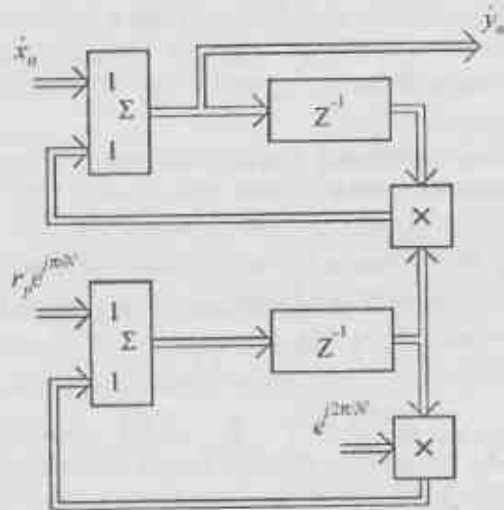


Рис. 10.7. Структурная схема цифрового последовательного анализатора спектра

На рис. 10.8 изображены кривые, характеризующие отклик на выходе простейшего цифрового последовательного анализатора спектра, при воздей-

ствии входного сигнала с параметрами  $k=32$ ,  $N=128$ ,  $\varphi=0$ . Видно, что при согласовании величины  $r_p$  с  $N$  (или, что то же самое,  $\Delta f_{0,7}$  с  $N$ ) огибающая имеет минимальные искажения (кривая  $r_p=0,7$ ). Как и в случае аналоговых последовательных анализаторов спектра, наблюдается смещение максимумов огибающей отклика от истинного нахождения частоты сигнала, причем чем больше рассогласование  $r_p$  с  $N$ , тем больше это смещение (кривая  $r_p=0,9$ ).

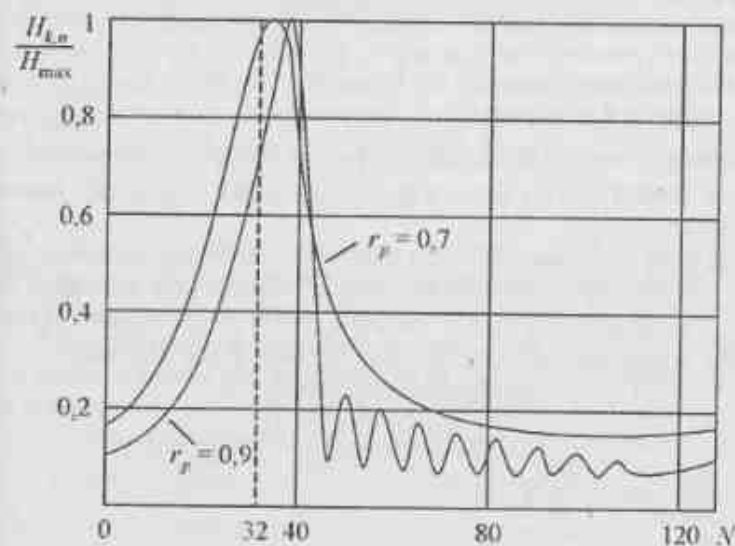


Рис. 10.8. Отклики на выходе последовательного цифрового анализатора спектра

Отметим, что достоинством рассмотренного цифрового метода последовательного спектрального анализа является отсутствие «обратного» хода у соответствующего АС, в отличие от аналоговых АС, независимость результатов анализа от числа отсчетов входного процесса, а также возможность произвольного выбора числа  $N$ .

#### 10.4. Цифровые анализаторы спектра на основе быстрых алгоритмов расчета коэффициентов ДПФ

10.4.1. Видно, что в случае организации вычислительного процесса согласно алгоритма (10.1), требуется  $N^2$  комплексных умножений и сложений и, в частности, для  $N=1024$  требуется 1048576 таких операций. В том случае, когда входная последовательность  $\tilde{x}_n$  имеет строгое ограничение по длительности, а момент ее появления известен, для экономии затрат ма-

шинного времени были предложены алгоритмы быстрого расчета ДПФ, которые носят общее название алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). В этих методах используется искусственный прием, основанный на том, что в некоторых случаях сумма произведений по выражению (10.1) может быть упрощена за счет приведения подобных членов, что позволяет выполнить операции сложения до умножения, или на том, что комплексные операции иногда могут быть заменены на действительные.

Алгоритмы БПФ находят применение в том случае, когда число отсчетов временной последовательности является сложносоставным числом, причем предполагается, что все отсчеты перед началом вычислений находятся в памяти вычислителя и пригодны для обработки. Заметим, что в том важном частном случае, когда  $N$  является степенью числа 2, алгоритмы БПФ требуют проведения  $N \log_2 N$  вычислений, а не  $N^2$ , как для случая вычисления ДПФ по выражению (10.1), что при  $N=1024$  составляет 99%-ную экономию в вычислениях.

Существуют два больших класса алгоритмов БПФ – алгоритмы с прореживанием во времени и алгоритмы с прореживанием по частоте. Общим условием для их эффективной реализации является требование, при котором  $N$  разлагается бы на возможно большее число отсчетов [26, 37].

При дальнейшем изложении будем пользоваться обозначениями в виде индексов. Тогда ДПФ, описываемое выражением (10.1) и с учетом ранее сделанных обозначений в параграфе 10.2, можно записать в виде

$$\hat{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}_n W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}_n W^{nk}$$

Отметим, что индекс  $N$  в функции  $W_N^{nk}$  используется тогда, когда нужно подчеркнуть ее периодичность.

10.4.2. Рассмотрим алгоритм БПФ с прореживанием во времени. Предположим, что число отсчетов делится на два. Тогда рассмотрим преобразование Фурье двух более коротких последовательностей:

- $\hat{q}_l$ , состоящей только из четно пронумерованных отсчетов  $\hat{x}_n$ ;
- $\hat{h}_l$ , состоящей из нечетно пронумерованных отсчетов  $\hat{x}_n$ .

Эти последовательности изображены на рис. 10.9, причем на рис. 10.9,а изображена последовательность, состоящая из 8-ми точек, на рис. 10.9,б изображена последовательность  $\hat{q}_l$  из 4-х точек, образованная из четно пронумерованных отсчетов  $\hat{x}_n$ , а на рис. 10.9,в изображена последовательность  $\hat{h}_l$  из 4-х точек, образованная из нечетно пронумерованных отсчетов  $\hat{x}_n$ .

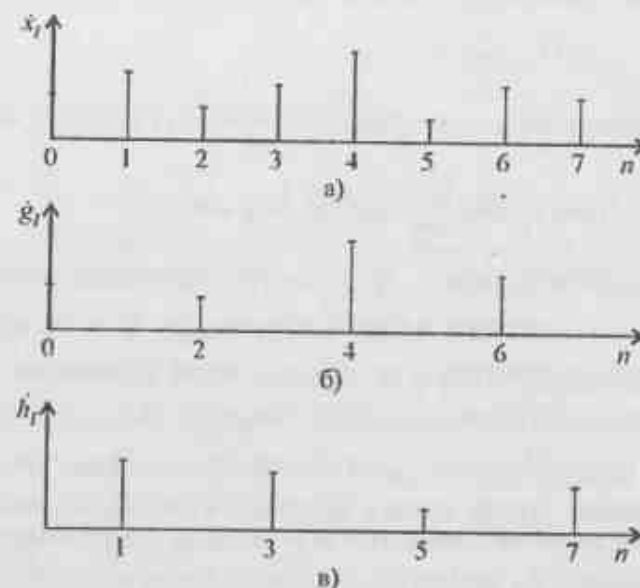


Рис. 10.9. Последовательности и их разбиение для алгоритма БПФ с прореживанием во времени:

- а) вся последовательность;
- б) последовательность из четно пронумерованных отсчетов;
- в) последовательность из нечетно пронумерованных отсчетов

Эти последовательности формально задаются как

$$\hat{q}_l = \hat{x}_{2l}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1. \quad (10.10)$$

$$\hat{h}_l = \hat{x}_{2l+1}.$$

ДПФ этих последовательностей также являются последовательностями, состоящими из  $N/2$  точек, и могут считаться периодическими последовательностями с периодом  $N/2$ .

Они могут быть записаны в виде

$$\hat{Q}_k = \sum_{l=0}^{N/2-1} \hat{q}_l (W^2)^{lk}, \quad (10.11)$$

$$\hat{H}_k = \sum_{l=0}^{N/2-1} \hat{h}_l (W^2)^{lk}.$$

ДПФ всей последовательности, которое может быть выражено через  $\hat{q}_l$  и  $\hat{h}_l$  из (10.10), будет

$$\hat{X}_k = \sum_{l=0}^{N/2-1} (\hat{q}_l W^{2lk} + \hat{h}_l W^{(2l+1)k}).$$

После ряда простейших преобразований, используя (10.10) и (10.11), будем иметь

$$\hat{X}_k = \sum_{l=0}^{N/2-1} \hat{q}_l (W^2)^{lk} + W^k \sum_{l=0}^{N/2-1} \hat{h}_l (W^2)^{lk} = \hat{G}_k + W^k \hat{H}_k \quad (10.12)$$

Соотношение (10.12) между  $\hat{X}_k$ ,  $\hat{G}_k$  и  $\hat{H}_k$  имеет важное значение для организации вычислительного процесса. Очевидно, что  $\hat{G}_k$  и  $\hat{H}_k$  могут быть вычислены прямым ДПФ за  $(N/2)^2$  операций каждая, а соединение их, дающее  $\hat{X}_k$ , требует дополнительно только  $N$  операций, что в сумме составляет  $N + (N/2)^2$  операций. Под операцией понимается комплексное умножение и сложение, которое требует четырех операций умножения над действительными числами, сложения и вычитания. В то же время, как указывалось выше, прямое вычисление  $\hat{X}_k$  требует выполнения  $N^2$  операций и поэтому (10.12) экономит вычислений почти в два раза при больших величинах  $N$ .

В выражении (10.12) индекс  $k$  меняется от 0 до  $N-1$ . Однако  $\hat{G}_k$  и  $\hat{H}_k$  имеют период  $N/2$  и вычисляются только в диапазоне от 0 до  $N/2-1$ .

Поэтому при вычислении в диапазоне значений от 0 до  $N-1$  применяют следующие выражения:

$$\hat{X}_k = \begin{cases} \hat{G}_k + W^k \hat{H}_k, & 0 \leq k \leq N/2-1; \\ \hat{G}_{k-N/2} + W^k \hat{H}_{k-N/2}, & N/2 \leq k \leq N-1. \end{cases} \quad (10.13)$$

На рис. 10.10 изображен граф восьмиточечного ДПФ, приведенного к двум четырехточечным ДПФ с помощью прореживания по времени, который отражает соотношения между  $\hat{X}_k$ ,  $\hat{G}_k$  и  $\hat{H}_k$  в (10.13).

В том случае, когда  $N/2$  также делится на два, то количество операций, требуемых для вычисления  $\hat{G}_k$  и  $\hat{H}_k$ , может быть уменьшено тем же способом, каким было уменьшено для вычисления  $\hat{X}_k$ .

Следуя этим путем объем вычислений можно уменьшить, если увеличивать число ДПФ от все меньшего числа точек со все большей экономией вычислительных операций. В этом и заключается сущность метода БПФ.

На рис. 10.11 два четырехточечных ДПФ из рис. 10.10, приведены к четырем двухточечным, а на рис. 10.12 каждое двухточечное ДПФ приведено к двум одноточечным.

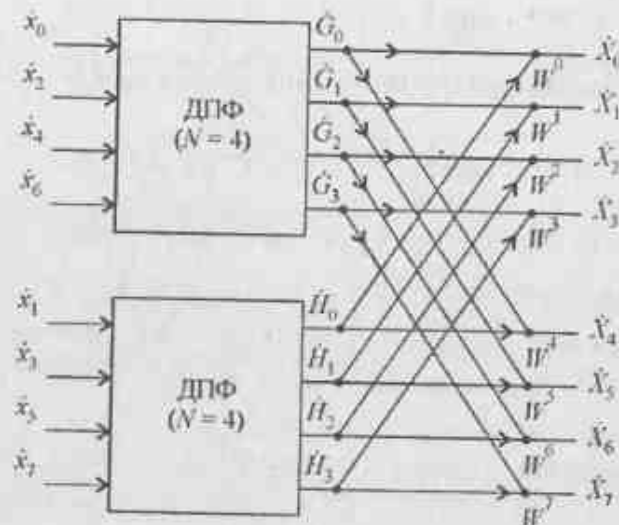


Рис. 10.10. Граф преобразования восьмиточечного ДПФ к двум четырехточечным ДПФ

Из рис. 10.12 видно, что там имеется  $8 \times 3$  узлов и  $2 \times 8 \times 3$  стрелок, соответствующих  $N \log_2 N$  сложениям и  $2N \log_2 N$  умножениям. В данном случае половина умножений может быть опущена, поскольку линии-передачи, обозначенные стрелкой без надписи, имеют коэффициент умножения равный единице. Половину оставшихся умножений также можно исключить, если учесть, что  $W^{(N/2)} = -1$ .

Поэтому, если  $N$  есть степень числа 2, то для вычисления ДПФ последовательности из  $N$  точек требуется  $N \log_2 N$  сложений и  $0,5N \log_2 N$  умножений.

Из рис. 10.12 видно, что входные данные поступают на обработку не в том порядке, в каком происходила их запись в устройств памяти, а в порядке

$$\hat{x}_0, \hat{x}_4, \hat{x}_2, \hat{x}_6, \hat{x}_1, \hat{x}_5, \hat{x}_3, \hat{x}_7.$$

В этом случае организация вычислений коэффициентов Фурье  $\hat{X}_k$  может быть основана на перезаписи полученных, после окончания каждой итерации, результатов, в те же ячейки памяти, из которых они были взяты как исходные, поскольку более они не будут нужны. Последнее обстоятельство позволяет организовать вычислительный процесс при существенной экономии в затратах оборудования.

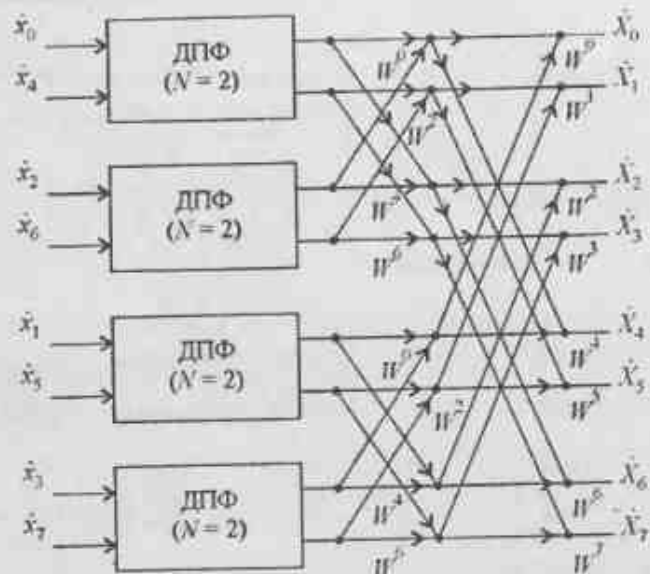


Рис. 10.11. Граф преобразования четырехточечного ДПФ к четырем двухточечным ДПФ

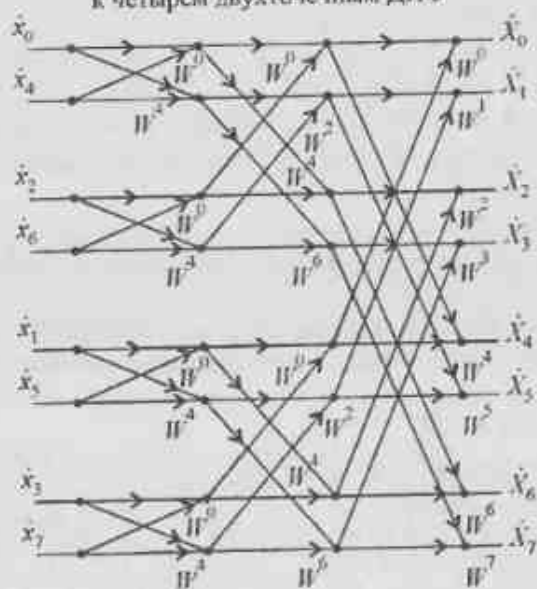


Рис. 10.12. Граф преобразования двухточечного ДПФ к двум одноточечным ДПФ

10.4.3. Рассмотрим другую форму БПФ – с прореживанием по частоте. Пусть функция  $\hat{x}_l$  с четным числом точек  $N$  разделена на две последовательности по  $N/2$  каждая, например  $\hat{q}_l$  и  $\hat{h}_l$ , где  $\hat{q}_l$  образована из первых  $N/2$  точек  $\hat{x}_l$ , а  $\hat{h}_l$  образована из последних  $N/2$  точек  $\hat{x}_l$ .

Формально можно записать

$$\begin{aligned} \hat{q}_l &= \hat{x}_l, \\ \hat{h}_l &= \hat{x}_{l+N/2}, \end{aligned} \quad l = 0, 1, 2, \dots, N/2-1.$$

Тогда  $N$ -точечное ДПФ в значениях  $\hat{q}_l$  и  $\hat{h}_l$  может быть записано в виде

$$\hat{X}_k = \sum_{l=0}^{N/2-1} (\hat{q}_l W^{lk} + \hat{h}_l W^{(l+N/2)k}) = \sum_{l=0}^{N/2-1} (\hat{q}_l + e^{-j\pi k} \hat{h}_l) W^{lk}. \quad (10.14)$$

Здесь учтено, что  $W^{Nk/2} = e^{-j\pi k}$ .

Рассмотрим четные и нечетные отсчеты  $\hat{X}_k$  отдельно (отсюда и название – прореживание, по частоте).

Заменяя в (10.14)  $k$  на  $2k$  получим

$$\hat{X}_{2k} = \sum_{l=0}^{N/2-1} (\hat{q}_l + \hat{h}_l) (W^2)^{lk}, \quad (10.15)$$

а заменяя в (10.14)  $k$  на  $(2k+1)$ , получим

$$\hat{X}_{2k+1} = \sum_{l=0}^{N/2-1} [(\hat{q}_l - \hat{h}_l) W^l] (W^2)^{lk}. \quad (10.16)$$

Выражения (10.15) и (10.16) представляют собой  $(N/2)$ -точечные ДПФ от функций  $\hat{q}_l + \hat{h}_l$  и  $(\hat{q}_l - \hat{h}_l) W^l$ .

Таким образом, определен другой порядок вычисления  $N$ -точечного ДПФ через результаты двух  $(N/2)$ -точечных ДПФ. На рис. 10.13 представлено разложение восьмиточечного ДПФ на два четырехточечных, а на рис. 10.14 и рис. 10.15 показано, как выполняется последовательно деление на меньшие ДПФ до тех пор, пока число точек в подпоследовательностях продолжает делиться на два.

Как и в алгоритме с разделением во времени, здесь количество комплексных операций сложения и умножения пропорционально  $N \log_2 N$ .

Отметим, что алгоритм по рис. 10.15 может быть организован с замещением, как и по рис. 10.12. Очевидно, что можно получить алгоритмы БПФ не только по основанию 2, но и по другим, в частности 4, 8 и т.д. [26].

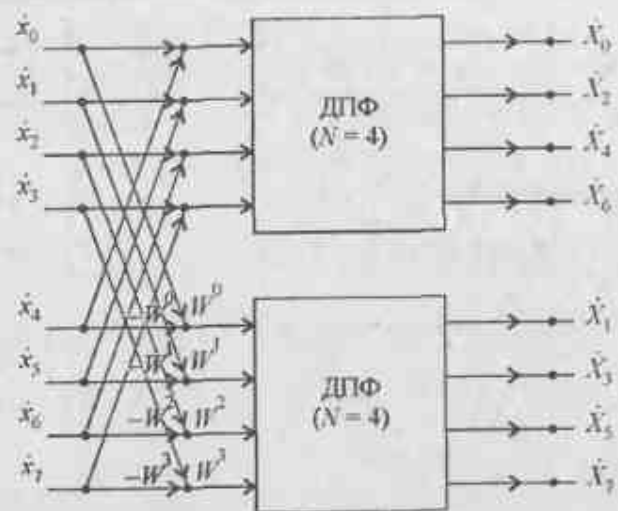


Рис. 10.13. Граф преобразования восьмиточечного ДПФ к двум четырехточечным ДПФ

В случае, когда  $N$  не является сложносоставным числом, производится дополнение массива входных отсчетов  $x_j$  нулями до той величины  $N$ , когда она становится равной требуемой. В этом случае количество отсчетов спектра реализации будет больше, чем количество «информативных» входных отсчетов.

При наличии «нулевых» входных отсчетов «информация по спектру» занимает большее количество отсчетов. Последнее прямо вытекает из свойств ДПФ, а именно – сжатие информации во времени (так «воспринимает» вычислитель появление нулевых отсчетов на входе) приводит к расширению спектра этой информации на выходе и, как следствие, одна и та же информация занимает большее количество спектральных отсчетов.

На рис. 10.16 изображена структурная схема устройства, реализующего алгоритм четырехточечного БПФ с прореживанием по частоте.

Видно, что в данном устройстве операция умножения на  $j$  выполняется путем подачи на суммирующие или вычитающие входы сумматора соответствующим образом действительных и мнимых чисел.

10.4.4. Для решения задач формирования и фильтрации реализаций часто бывает необходимо вычисление обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ). В том случае, когда обрабатываемые реализации имеют ограниченную длительность и их начало известно целесообразно использовать алгоритмы быстрого вычисления ОДПФ, которые носят общее название алгоритмов обратного быстрого преобразования Фурье (ОБПФ).

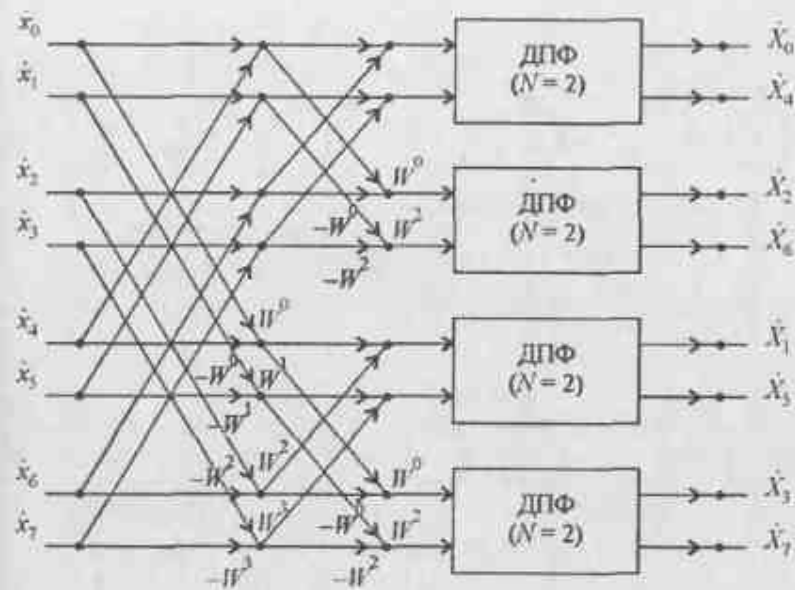


Рис. 10.14. Граф преобразования двухточечного ДПФ к двум одноточечным ДПФ

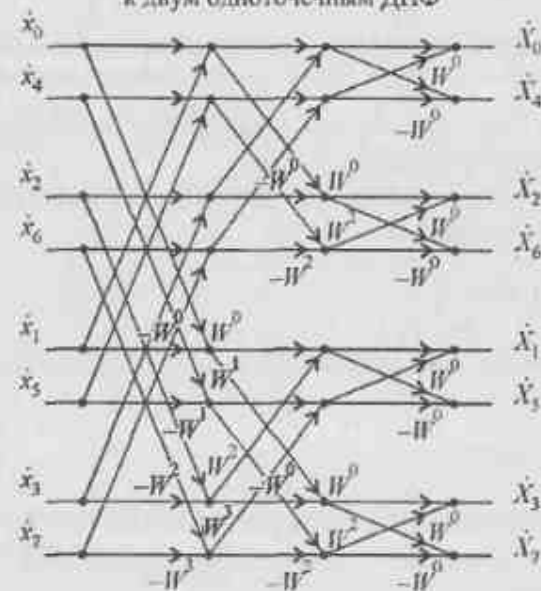


Рис. 10.15. Граф преобразования двухточечного ДПФ к двум одноточечным ДПФ

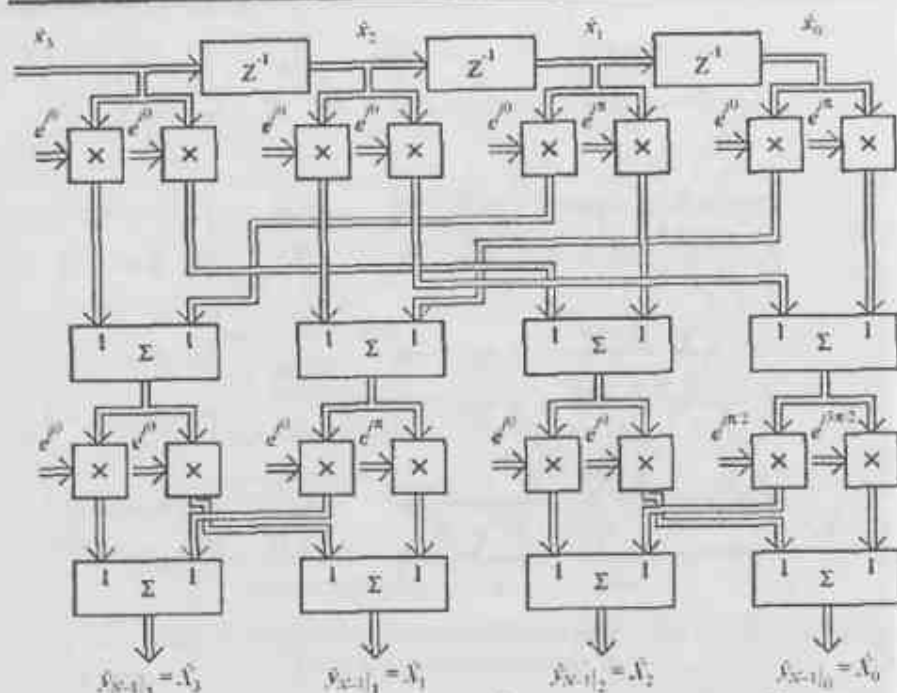


Рис. 10.16. Структурная схема устройства, реализующего алгоритм четырехточечного БПФ с прореживанием по частоте

Рассмотрим каким образом можно вычислять ОБПФ путем прямого использования алгоритмов БПФ [37].

По определению, ОДПФ  $N$ -точечной последовательности  $X_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , имеет вид

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k W^{-nk} \quad (10.17)$$

Взяв выражение комплексно-сопряженное с (10.17) и умножив его на  $N$  получим

$$N x_n^* = \sum_{k=0}^{N-1} X_k^* W^{nk} \quad (10.18)$$

Правая часть формулы (10.18) представляет собой ДПФ последовательности  $X_k^*$  и может быть вычислена с использованием одного из описанных алгоритмов БПФ.

Искомую последовательность  $x_n$  можно получить взяв комплексно-сопряженное с (10.18) выражение и разделив его на  $N$ , т. е.

$$x_n = \frac{1}{N} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} X_k^* W^{nk} \right]^* \quad (10.19)$$

Таким образом, алгоритмы БПФ позволяют вычислять как ДПФ, так и ОДПФ, а, следовательно, одно и то же оборудование может быть использовано для решения различного рода задач.

10.4.5. Очевидно, что рассмотренный выше спектральный анализ, основанный на алгоритмах БПФ, осуществляется в режиме работы вычислителя «скачущее» окно. При этом задача получения спектра входной реализации по  $N$  отсчетам сводится к нахождению ее  $Z$ -преобразования для точек, которые равномерно расположены на единичной окружности в  $Z$ -плоскости. Рассмотренные алгоритмы БПФ и ОБПФ могут быть реализованы как программным путем, так и аппаратным. Отметим, что в настоящее время появилось достаточно большое количество интегральных микросхем, ориентированных на их использование в устройствах, реализующих алгоритмы БПФ.

При проведении спектрального анализа отрезков дискретной комплексной экспоненты с использованием алгоритмов БПФ полученные отклики в частотной области имеют форму вида  $\sin x/x$ . Последнее приводит к тому, что спектр отрезка дискретной комплексной синусоиды как бы «растекается» по оси частот, что является вредным эффектом при проведении спектрального анализа.

Указанный эффект особенно опасен в тех частных случаях, когда в анализируемом отрезке входного сигнала присутствует несколько комплексных синусоид у которых амплитуды существенно отличаются друг от друга. При этом, как указывалось в главе 7, возможна «маскировка» тех спектральных составляющих, интенсивности которых малы, а их частоты расположены в пределах БЛ спектральной плотности, образованной интенсивной спектральной составляющей.

Для устранения указанного недостатка находят применение различные виды временные окна, под которыми понимают модулирующие функции, на которые умножается отрезок входной реализации и которые были рассмотрены в главе 7.

Тогда, с учетом вышесказанного, структурная схема АС на основе алгоритмов БПФ может быть представлена в виде, изображенном на рис. 10.17.

10.4.6. Как уже указывалось ранее, техническая реализация тех или иных алгоритмов БПФ приводит к построению специализированного КИХ-фильтра, осуществляющего вычисление дискретных аналогов интегралов свертки, у которых в качестве отсчетов импульсных характеристик используются отсчеты ДЭФ.



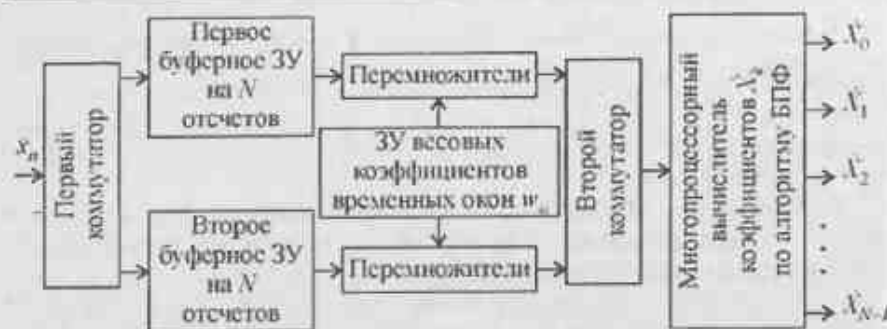


Рис. 10.17. Обобщенная структурная схема анализатора спектра на основе алгоритма БПФ

При этом, в случае, если обрабатываемые отсчеты принадлежат к выборкам, представляющим входной сигнал  $x_n$ , то получаемый результат называется дискретным спектром  $X_k$ . Если обрабатываемые отсчеты принадлежат к выборкам, описывающим импульсную характеристику  $h_n$  того или иного устройства, то получаемый результат носит название дискретной АЧХ  $H_k$ . Произведение соответствующих спектральных компонент входной реализации  $X_k$  на соответствующие отсчеты дискретной АЧХ  $H_k$  позволяет получить отсчеты выходного спектра  $Y_k$ .

Если осуществить ОБПФ над полученными отсчетами выходного спектра  $Y_k$  в соответствии с выражениями (10.17) – (10.19), то получается отфильтрованная реализация  $y_n$ , начало и конец которой известны. Описанная процедура носит название высокоскоростной свертки. На рис. 10.18 изображена структурная схема алгоритма вычисления высокоскоростной свертки с помощью алгоритмов БПФ и ОБПФ.

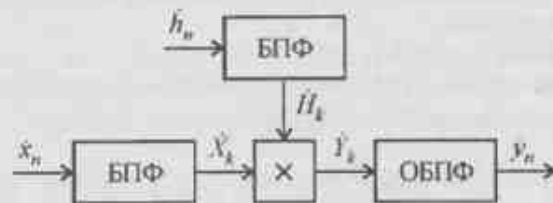


Рис. 10.18. Структурная схема вычислителя высокоскоростной свертки с помощью алгоритмов БПФ и ОБПФ

Эффективность предложенного алгоритма по сравнению с прямым вычислением дискретного аналога интеграла свертки входной реализации, состоящей из  $N$  отсчетов тем выше, чем больше величина  $N$ . Однако при 254

использовании рассмотренного алгоритма следует учесть то обстоятельство, что получаемый результат есть результат вычисления круговой свертки. Поэтому, если импульсная характеристика содержит только  $L$  отсчетов, то, как показано в [83], в выходном массиве, состоящем из  $N$  отсчетов, только  $N - L + 1$  отсчет окажется правильными. Очевидно, что если  $L = N$ , то верным будет только один отсчет.

Следовательно, необходимо добавлять нулевые отсчеты (слева или справа) ко входной реализации или к отсчетам импульсной характеристики в количестве достаточном для того, чтобы все выходные отсчеты  $y_n$  были бы правильными. В частности, если  $L = N$ , то количество добавляемых нулевых отсчетов должно быть не менее  $N - 1$ , откуда общее количество обрабатываемых отсчетов будет не менее  $2N - 1$ .

Реализация алгоритма высокоскоростной свертки при помощи БПФ и ОБПФ находит, в частности, применение в импульсной радиолокации при реализации согласованных фильтров (СФ), используемых для сжатия сложных сигналов. При этом использование алгоритмов БПФ с прореживанием по частоте является предпочтительным, поскольку в этом случае упрощается управление вычислительным процессом. Дополнительное сокращение вычислительных операций можно получить если обеспечить хранение расположенных в соответствующем порядке предварительно рассчитанных отсчетов АЧХ  $H_k$ .

### 10.5. Граница применимости прямых и быстрых алгоритмов расчета ДПФ

Очевидно, что рассмотренные алгоритмы расчета ДПФ последовательности  $x_n$ , состоящей из  $N$  отсчетов, позволяют сделать однозначный вывод о том, что получение одних и тех же результатов можно добиться за меньшее количество вычислительных операций при использовании быстрых алгоритмов расчета. При этом число  $N$ , соответствующее количеству входных отсчетов, может быть меньше, равно или больше числа  $K$  используемых базисных ДЭФ.

Выбор числа  $K$  зависит в общем случае от используемого устройства, вычисляющего ДПФ входной последовательности. В том случае, когда  $N < K$  и используется алгоритм БПФ, входную последовательность дополняют до величины равной  $K$  нулями, что в результате приводит к «расширению» спектра. Это связано с тем, что вычислитель воспринимает вновь образованную входную последовательность как «укороченную», а следовательно, спектр ее будет «шире». При  $N = K$  можно получить максимально возможное число независимых спектральных компонент при заданной длине реализации. Эти два случая соответствуют режиму обработки данных в

вычислителе на основе алгоритма БПФ, который, как указывалось, получил название режима работы «скачущее» окно.

В том случае, когда  $N > K$ , выражение (10.1) можно записать в виде

$$\hat{X}_k = \sum_{n=i-L}^i \hat{x}_n \exp[-j(2\pi/N)kn]. \quad (10.20)$$

Выражение (10.20) определяет мгновенное дискретное преобразование Фурье, которое представляет собой спектр отрезка длительности  $LT$  отсчетов, предшествующих отсчету с номером  $i$ , причем

$$L \leq N, i = L, L+1, \dots, M.$$

Отметим, что отрезок реализации длительностью  $MT$  отсчетов также может быть обработан в режиме работы «скачущее» окно, путем последовательного его разбиения на отрезки длиной  $LT$  отсчетов. При этом, как показано в [37], подобная обработка приводит к эффектам наложения. Это связано с тем, что запись отсчетов входной реализации, поступающей на обработку, производится исходя из условий выполнения теоремы Котельникова, а считывание информации производится через интервалы времени  $LT$ .

Использование алгоритмов БПФ для расчета  $K = N$  коэффициентов Фурье, как указывалось, требует  $N \log_2 N$  операций комплексного сложения и умножения, в то время как вычисление такого же количества коэффициентов Фурье по выражению (10.1), требует  $N^2$  таких операций. Отметим, что удается сократить число операций в алгоритме БПФ до величины  $0,5N \log_2 N$  за счет использования периодических свойств ДПФ.

В том случае, когда для расчетов коэффициентов Фурье используется выражение (10.20), то есть используется режим работы «скользящее» окно, то целесообразно использование непосредственного вычисления коэффициентов Фурье [15, 26, 37]. Последнее связано с тем, что при использовании алгоритма БПФ, при сдвиге входной реализации на  $N$  отсчетов требуется  $0,5N^2 \log_2 N$  операций комплексного сложения и умножения, так как необходимо производить расчет по этому алгоритму на каждый вновь поступивший отсчет входной реализации, что намного больше величины  $N^2$ .

В дальнейшем будем полагать, что непосредственное вычисление коэффициентов ДПФ осуществляется при помощи рекурсивных алгоритмов, описываемых выражением (10.5). Применение подобных методов позволяет сократить требуемый объем памяти вычислителя для хранения коэффициентов базисных функций до величины, равной числу рассчитываемых коэффициентов и упростить организацию вычислительного процесса.

Рассмотрим границу применимости алгоритмов основанных на БПФ и алгоритмов основанных на непосредственном вычислении свертки в устройствах линейной обработки сигналов.

Пусть имеется реализация длительностью  $N$  отсчетов, которая подвергается БПФ за  $0,5N \log_2 N$  операций. Каждый из  $N$  коэффициентов Фурье, полученных по этому алгоритму, подвергается масштабированию путем перемножения на соответствующие отсчеты АЧХ  $H_k$  устройства линейной обработки сигналов, что требует  $N$  операций перемножения. Полученный результат подвергается ОБПФ, на что также требуется  $0,5N \log_2 N$  операций. Таким образом, общее количество операций для получения одной обработанной реализации будет равно  $N(\log_2 N + 1)$ .

Для получения  $p$  обработанных реализаций потребуется

$$N \left[ \frac{(p+1)}{2} \log_2 N + p \right]$$

операций, а в случае использования рассмотренного способа в режиме «скользящее» окно потребуется соответственно

$$N^2 \left[ \frac{(p+1)}{2} \log_2 N + p \right]$$

операций комплексного сложения и умножения.

Организация вычислительного процесса для непосредственного вычисления дискретной свертки в аналогичных условиях требует  $N$  операций комплексного сложения и умножения, выполняемых в простейшей цифровой линейной системе, передаточная функция которой описывается полиномом первого порядка. При использовании цифровой линейной системы, передаточная функция которой описывается отношением полиномов соответствующих порядков, количество операций увеличивается на величину  $P + Q$ , равную сумме порядков числителя  $Q$  и знаменателя  $P$ . Полагая, что количество фильтров равно  $p$ , и они одинаковые, получаем, что для режима работы «скользящее» окно требуется выполнение  $Np(P+Q)$  операций комплексного сложения и умножения, при условии, что на каждую единицу порядка требуется такая операция.

Сравнительный анализ показывает, что меньшее количество операций комплексного сложения и умножения в режиме работы «скользящее» окно будет при

$$P+Q \leq \frac{N}{p} \left( \frac{p+1}{2} \log_2 N + p \right).$$

Следует сказать, что в полученном последнем выражении не учтена более сложная организация вычислительного процесса по алгоритму БПФ, а так же то, что достаточно сложно организовать (а в некоторых случаях и невозможно) получение и вывод на анализ промежуточных результатов до

окончания процесса вычислений в отличие от организации вычислительного процесса при прямом вычислении свертки.

Таким образом, можно сделать вывод, что в том случае, когда длительность реализации, ее начало и конец известны априори (или могут быть выбраны из каких-нибудь соображений), следует применять алгоритмы БПФ как для задач спектрального анализа, так и для решения задач свертки. В тех случаях когда подобная информация отсутствует, целесообразно проводить решение задач линейной обработки сигналов на основе непосредственного вычисления свертки.

### 10.6. Цифровой спектральный анализ с использованием параметрических моделей

Как указывалось, все методы спектрального анализа можно условно разбить на два широких класса – непараметрические и параметрические [35]. Согласно данной классификации, рассмотренные выше методы относятся к непараметрическим, так как ДПФ подвергается ограниченная или неограниченная последовательность входных данных. При этом входной процесс может быть как нестационарным (в этом случае целесообразно применение режима «скользящее» окно при параллельном вычислении  $K$  коэффициентов Фурье), так и стационарным, эргодическим. В последнем случае можно применить цифровой последовательный спектральный анализ [81, 82].

К параметрическому спектральному анализу относят рассмотрение таких моделей временного ряда, которые соответствуют анализируемому процессу. В этом случае спектральная плотность мощности модели временного ряда будет некоторой функцией параметров этой модели, а не самого временного ряда. Такой класс моделей включает в себя модель авторегрессионного процесса (АР-процесса), модель процесса скользящего среднего (СС-процесса) и модель процесса авторегрессии – скользящего среднего (АРСС-процесса).

При этом подается что на входах этих моделей воздействует случайный процесс в виде «белого» шума, а выходные процессы имеют спектральные плотности мощности, которые полностью описываются с помощью параметров модели и дисперсии «белого» шумового процесса. Значения этих параметров и дисперсии «белого» шума определяются по автокорреляционной последовательности с помощью соответствующих соотношений.

Одна из причин применения параметрических моделей случайных процессов обусловлена возможностью получения на основе этих моделей более точных оценок спектральной плотности мощности, чем это возможно при помощи классических непараметрических методов спектрального оценивания. Другими важными причинами их применения является возможность получения более высокого спектрального разрешения, а также меньшие

затраты оборудования относительно случаев использования непараметрических методов.

Известные непараметрические методы производят спектральный анализ по временной последовательности входных данных, причем отсутствующие данные за пределами используемого временного окна неявно полагаются равными нулю, что, естественно приводит к искажению спектральных оценок. Особенно это сказывается для случаев, когда время корреляции исследуемого процесса превышает длительность используемого временного окна.

Основой применения параметрических методов спектрального анализа является то, что на практике часто имеется некоторая информация относительно процесса, из которого берутся отсчеты данных. Эту информацию можно использовать для построения модели, аппроксимирующей процесс, который породил наблюдаемую временную последовательность. Такие модели позволяют принимать более реалистические допущения о данных вне временного окна, чем использование допущения об их равенстве нулю (подобные допущения используются в непараметрических моделях). В результате отпадает необходимость в использовании различных видов временных окон, а, следовательно, устраняются и связанные с ними искажения.

Степень улучшения разрешения и повышения достоверности спектральных оценок определяется соответствием выбранной модели анализируемому процессу и возможностью аппроксимации измеренных данных или автокорреляционной последовательности (известной или оцененной по этим данным) с помощью нескольких параметров модели. В свою очередь, задание характеристик спектральной плотности мощности или автокорреляционной последовательности требует обеспечения устойчивости и (или) каузальности (выполнения причинно-следственных связей) применяемого устройства линейной обработки с тем, чтобы получить однозначно определенную модель.

Отметим следующее. Данные параметрические методы не используются непосредственно для анализа спектральных характеристик случайных процессов. Они находят применение тогда, когда имеются временные ряды (запись отсчетов входной реализации), с которыми можно не в реальном масштабе времени производить те или иные вычислительные операции, позволяющие получить более высокий уровень разрешения.

Модель временного ряда, которая пригодна для аппроксимации многих встречающихся на практике детерминированных и стохастических процессов, описывается последовательностью данных на выходе устройства линейной обработки, которые получаются из выражения (4.2) в следующем виде если положить  $N = P$ , а  $M = Q$  [35]

$$\hat{y}_n = - \sum_{m=1}^P \hat{a}_m \hat{y}_{n-m} + \sum_{m=0}^Q \hat{b}_m \hat{x}_{n-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{h}_{n-m} \hat{x}_m, \quad (10.21)$$

где  $y_n$  – последовательность на выходе цифровой линейной системы,  $x_n$  – входная возбуждающая последовательность.

При этом без потери общности можно положить  $b_0 = 1$ .

Из выражения (4.3) видно, что функция  $H(z)$ , связывающая вход и выход цифровой линейной системы, имеет вид

$$H(z) = Y(z)/X(z),$$

в которой полиномы определяются следующими выражениями

$$X(z) = 1 + \sum_{n=1}^P a_n z^{-n},$$

$$Y(z) = 1 + \sum_{n=1}^Q b_n z^{-n},$$

$$H(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n z^{-n}.$$

При этом полагается, что нули полиномов  $X(z)$  и  $Y(z)$  расположены внутри единичной окружности в  $Z$ -плоскости для того, чтобы гарантировать устойчивость ЦМФ.

Известно, что  $Z$ -преобразование функции автокорреляции выходной последовательности  $y_n$  и  $Z$ -преобразование функции автокорреляции входного случайного процесса  $x_n$  связаны соотношением [35]

$$P_{yy}(z) = P_{xx}(z)H(z)H^*(1/z^*) = P_{xx}(z) \frac{Y(z)Y^*(1/z^*)}{X(z)X^*(1/z^*)}. \quad (10.22)$$

Обычно входной возбуждающий процесс  $x_n$  недоступен для наблюдения и поэтому не может быть использован для целей спектрального анализа.

Поэтому целесообразно использовать предположение, что возбуждающая последовательность  $x_n$  является «белым» шумом с нулевым средним значением и дисперсией, так что

$$P_{xx}(z) = \sigma_{\text{бш}}^2.$$

Тогда модель АРСС-процесса для временного ряда  $y_n$  будет определяться выражением (10.21), где  $x_n$  – последовательность, соответствующая «белому» шуму.

Структурная схема устройства, реализующая модель АРСС-процесса, может быть представлена в виде, изображенном на рис. 10.19.

Здесь параметры  $\hat{a}_p$  характеризуют авторегрессионную часть модели, параметры  $\hat{b}_q$  – ту ее часть, которая соответствует скользящему среднему.

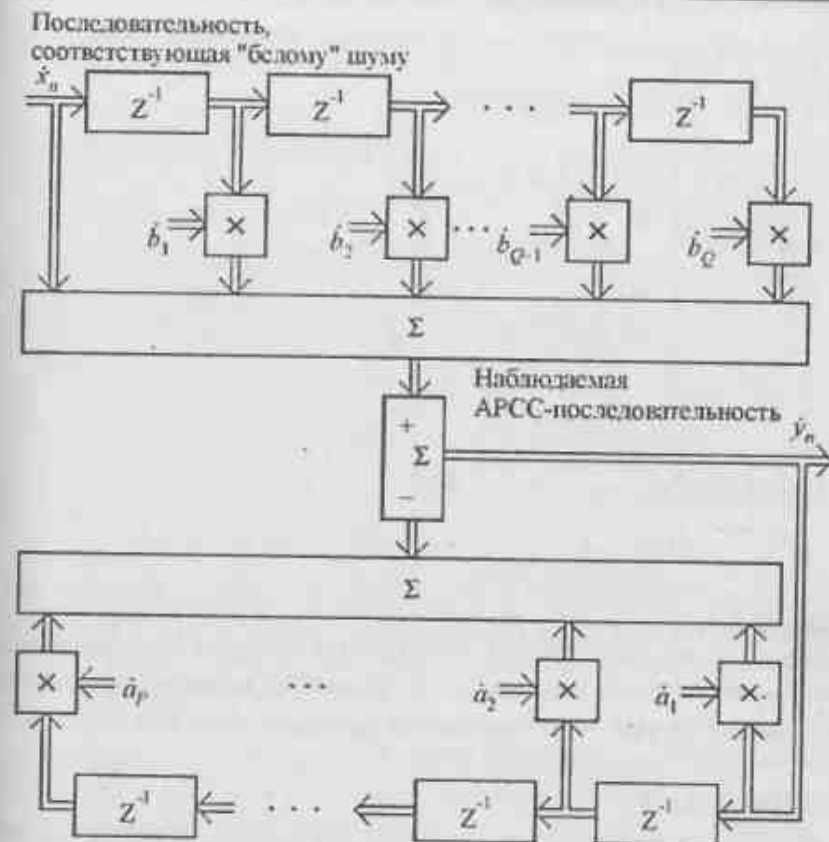


Рис. 10.19. Структурная схема модели АРСС-процесса

Спектральная плотность мощности для модели АРСС-процесса получается, если в (10.22) подставить  $z = \exp(j\omega T) = \exp(j2\pi f T)$ , что дает

$$G_{ARMA}(2\pi k/N) = \sigma_{\text{бш}}^2 \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{Y}_k \\ \mathbf{X}_k \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \mathbf{e}_Q^T(2\pi k/N) \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{e}_Q(2\pi k/N) \\ \mathbf{e}_P^T(2\pi k/N) \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{e}_P(2\pi k/N) \end{vmatrix}}, \quad (10.23)$$

где знак  $T$  означает транспонирование, полиномы  $\mathbf{X}_k$  и  $\mathbf{Y}_k$  определяются

$$\mathbf{X}_k = 1 + \sum_{n=1}^P \hat{a}_n \exp(-j2\pi kn/N),$$

$$\mathbf{Y}_k = 1 + \sum_{n=1}^Q \hat{b}_n \exp(-j2\pi kn/N).$$

а векторы комплексных синусовид  $\mathbf{e}_Q(2\pi k/N)$ ,  $\mathbf{e}_P(2\pi k/N)$  и векторы параметров  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  имеют следующий вид

$$\mathbf{e}_P(2\pi k/N) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi k/N) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi kP/N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_P \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_Q(2\pi k/N) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi k/N) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi kQ/N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_Q \end{bmatrix}$$

Отметим, что выражения (10.22) и (10.23) представляют собой дискретный аналог случая воздействия непрерывного процесса в виде «белого» шума со спектральной плотностью  $N_0$  на линейную аналоговую схему с АЧХ в виде  $H(f)$ . При этом спектральная плотность шума на выходе такой аналоговой схемы определяется в виде [13]

$$G(f) = H^2(f)N_0.$$

Подобные модели иногда обозначаются  $ARCC(P, Q)$ , что кратко обозначает модель  $ARCC$  с параметром авторегрессии  $P$  и параметром скользящего среднего  $Q$ . Следовательно, задание  $AR$ -параметров,  $CC$ -параметров и дисперсии  $\sigma_{\text{бш}}^2$  полностью характеризует спектральную плотность мощности  $ARCC$ -процесса  $\hat{y}_n$ .

Если все  $AR$ -параметры в (10.21) положить равными нулю ( $P=0$ ) и считать  $b_0 = 1$ , получаем, что процесс, описываемый выражением

$$\hat{y}_n = \sum_{m=1}^Q \hat{b}_m \hat{x}_{n-m} + \hat{x}_n$$

будет строго  $CC$ -процессом порядка  $Q$ , т.е.  $CC(Q)$ -процессом.

Спектральная плотность мощности  $CC$ -процесса

$$\mathbf{G}_{CC}(2\pi k/N) = \sigma_{\text{бш}}^2 \mathbf{e}_Q^T(2\pi k/N) \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{e}_Q(2\pi k/N).$$

На рис. 10.20 показана структурная схема устройства, на выходе которого отчеты представляют собой модель  $CC$ -процесса.

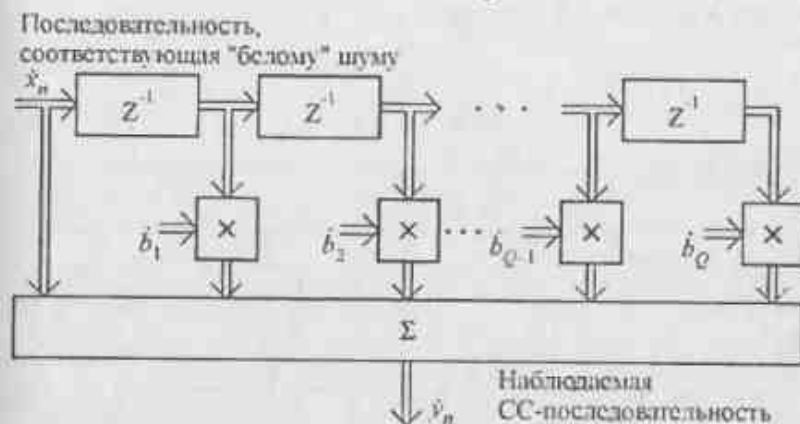


Рис. 10.20. Структурная схема модели  $CC$ -процесса

Если все  $CC$ -параметры, за исключением  $b_0 = 1$ , положить в (10.21) равными нулю ( $Q = 0$ ), то процесс, описываемый выражением

$$\hat{y}_n = - \sum_{m=1}^P \hat{a}_m \hat{y}_{n-m} + \hat{x}_n, \quad (10.24)$$

будет  $AR$ -процессом порядка  $P$ , т.е.  $AR(P)$ -процессом.

Полагая в (10.23)  $Q = 0$ , получаем спектральную плотность мощности  $AR$ -процесса в виде

$$\mathbf{G}_{AR}(2\pi k/N) = \frac{\sigma_{\text{бш}}^2}{\mathbf{e}_P^T(2\pi k/N) \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{e}_P(2\pi k/N)}.$$

На рис. 10.21 показана структурная схема устройства на выходе которого отчеты представляют модель  $AR$ -процесса.

Отметим, что всегда существует шум наблюдения  $N_n$ , присутствующий в последовательности измеряемых данных, и он должен моделироваться как шум источника, отличный от источника возбуждающего шума  $\hat{x}_n$ , являющегося составной частью используемой модели.

В этом случае схема поступающих на обработку данных преобразуется к виду, изображенному на рис. 10.22.

Очевидно, что спектральные плотности мощности на выходе рассмотренных моделей будут пропорциональны квадратам их АЧХ.

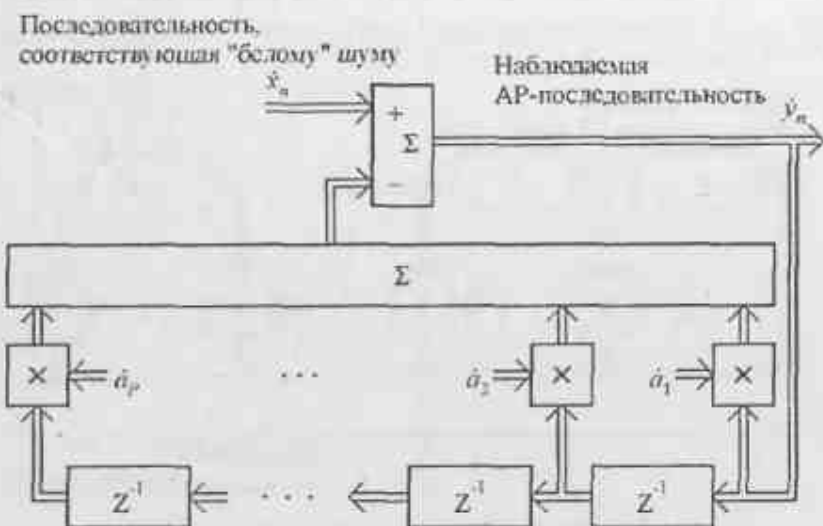


Рис. 10.21. Структурная схема модели АР-процесса

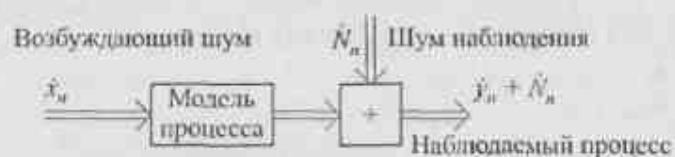


Рис. 10.22. Структурная схема модели измеряемого процесса

Простейшей моделью АР-процесса будет процесс на выходе рекурсивной структуры, а модели СС-процесса – на выходе нерекурсивной структуры, изображенных на рис. 4.4, при подаче на их входы процесса в виде дискретных отсчетов «белого» шума.

На рис. 10.23 изображены примеры спектральной плотности мощности рассмотренных моделей процессов.

Как показано в [35], существуют достаточно простые соотношения между параметрами моделей АР-, СС- и АРСС-процессов. Если задана одна из этих моделей с конечным числом параметров, то ее всегда можно выразить через две другие модели, в том числе и через модели бесконечного порядка. Это позволяет всегда получать приемлемую аппроксимацию реальных процессов при любой выбранной модели и задача в общем случае заключается в выборе той из них, при использовании которой возможно получить те или иные алгоритмические выгоды.

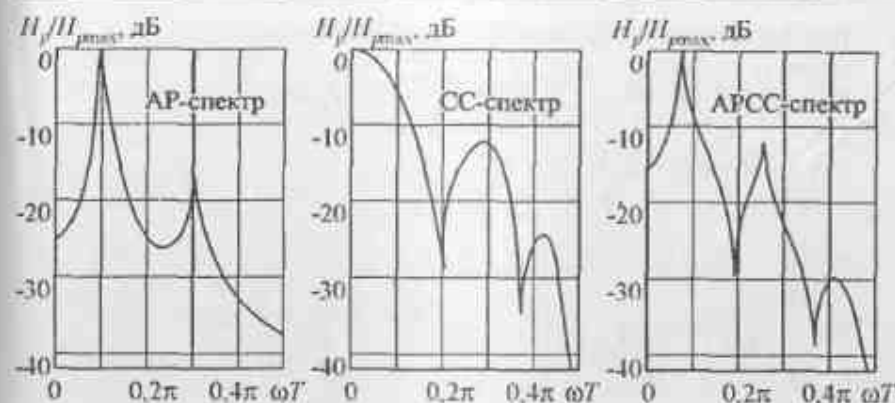


Рис. 10.23. Примеры спектральных плотностей мощностей на выходах моделей АР-, СС- и АРСС-процессов

### 10.7. Методы оценивания параметров моделей

10.7.1. Из всех описанных моделей наибольшее внимание привлекают АР-модели. Это связано с тем, что авторегрессионные спектры имеют острые пики, что позволяет обеспечить высокое спектральное разрешение, большее их соответствие реальным процессам, в так же тем немаловажным обстоятельством, что оценки АР-моделей можно получить путем решения системы линейных уравнений [35].

Наиболее простой метод оценивания параметров АР-модели основан на использовании тесной связи между фильтром линейного предсказания и АР-процессом.

Рассмотрим оценку линейного предсказания отсчета  $\hat{y}_n$ , получаемого на выходе фильтра линейного предсказания в виде

$$\hat{y}_n = - \sum_{m=1}^K \hat{a}_m y_{n-m},$$

где  $\hat{a}_m$  – коэффициент линейного предсказания, соответствующий временному индексу  $m$ .

Предсказание понимается в том смысле, что оценка, соответствующая временному индексу  $n$  вычисляется по  $m$  предыдущим отсчетам.

Комплексная ошибка линейного предсказания на выходе фильтра линейного предсказания будет

$$\hat{\epsilon}_n = \hat{y}_n - \tilde{y}_n \tag{10.25}$$

и имеет действительную дисперсию

$$\sigma_{\text{л.пр}}^2 = |\hat{\epsilon}_n|^2.$$

Подставляя в последнее выражение два предыдущих, получаем

$$\sigma_{\text{сл.пр}}^2 = r_0 + \sum_{m=1}^k \hat{a}_m \hat{r}_{-m} + \sum_{j=1}^k \hat{a}_j^* \hat{r}_j + \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^k \hat{a}_m \hat{a}_j^* \hat{r}_{j-m} =$$

$$= r_0 + \hat{\mathbf{r}}_k^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \hat{\mathbf{r}}_k + \mathbf{a}^T \mathbf{R}_{k-1} \mathbf{a},$$

где

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_k \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{r}}_k = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \vdots \\ \hat{r}_k \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_{k-1} = \begin{bmatrix} r_0 & \dots & \hat{r}_{k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_{k-1}^* & \dots & r_0 \end{bmatrix}.$$

При этом предполагается, что процесс  $y_n$  стационарный в широком смысле, поэтому  $\hat{r}_{-k} = \hat{r}_k^*$ .

Из теории матричной алгебры [62, 84, 85] известно, что минимизировать ошибку  $\sigma_{\text{сл.пр}}^2$  можно путем решения системы линейных уравнений, которые в матричной форме записываются в виде

$$\begin{bmatrix} r_0 & \hat{\mathbf{r}}_k^T \\ \hat{\mathbf{r}}_k & \mathbf{R}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\text{сл.пр}}^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

или в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} r_0 & \hat{r}_1^* & \dots & \hat{r}_k^* \\ \hat{r}_1 & r_0 & \dots & \hat{r}_{k-1}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_k & \hat{r}_{k-1}^* & \dots & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\text{сл.пр}}^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

откуда находятся величины коэффициентов  $\hat{a}_k$ .

Перепишвая (10.25) в виде

$$\hat{y}_k = - \sum_{m=1}^k \hat{a}_m \hat{y}_{n-m} + \hat{\varepsilon}_n,$$

получаем выражение, подобное выражению, описывающему АР-процесс. Однако для АР-процесса последовательность  $\hat{\varepsilon}_n$  соответствует «белому»

шуму, который используется в качестве входного воздействия для авторегрессионного фильтра.

В данном же случае последовательность  $\hat{y}_n$  — это входное воздействие для фильтра предсказания ошибки, как показано на рис. 10.24.

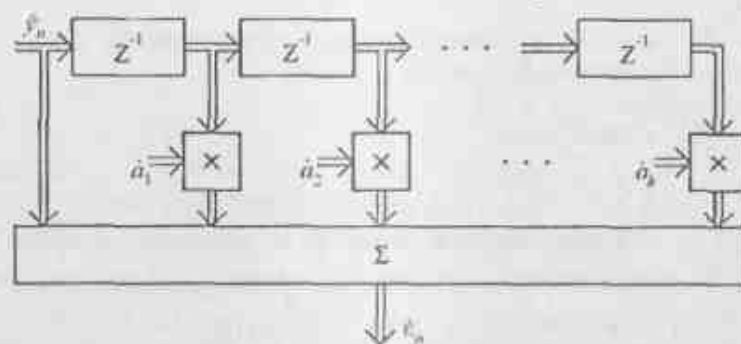


Рис. 10.24. Структурная схема линейного фильтра предсказания ошибки

Последовательность значений ошибки  $\hat{\varepsilon}_n$  в последнем уравнении представляет собой выход фильтра линейного предсказания ошибки. Она не будет представлять собой случайный процесс типа «белого» шума до тех пор, пока  $\hat{y}_n$  не генерируется как АР-процесс порядка  $P=K$ .

Последовательность значений ошибки линейного предсказания  $\hat{\varepsilon}_n$  не коррелирована с оценкой линейного предсказания  $\hat{y}_n$ . При выполнении последнего условия фильтр предсказания ошибки может рассматриваться как отбеливающий («обеливающий») фильтр.

Помимо решения системы линейных уравнений методом подстановки для нахождения весовых коэффициентов  $\hat{a}_k$ , были предложены рекуррентные алгоритмы, основанные на свойствах симметрии и эрмитовости теплицевых уравнений, что эффективно при большом числе пиков спектральной плотности мощности [35].

В реальных условиях подобные методы целесообразно применять при небольшом числе «пику» спектральной плотности мощности, количество которых обычно равно 1, 2 или 3. В случаях, когда модель выбрана правильно, то полученные оценки могут превосходить по точности оценки, получаемые классическими непараметрическими методами. Следует также отметить, что в тех случаях, когда априорная информация о числе синусов в аддитивной смеси с «большим» шумом неполна, то известна методика постепенного (итеративного) повышения порядка «обеливающего» фильтра до тех пор, пока мощность шума  $\hat{\varepsilon}_n$  при повышении порядка не остается постоянной.

10.7.2. Рассмотрим метод уменьшения ошибки смещения в оценке спектральной плотности мощности для случая, когда время корреляции стационарного случайного процесса превышает время его анализа. Очевидно, что в этом случае большую роль играет форма используемого временного окна [86].

В случае использования преобразования Хинчина-Винера спектральная плотность мощности определяется в виде [24]

$$G_k = 4 \sum_{n=0}^{N-1} r_n \cos\left(\frac{2\pi}{N} k\right) n,$$

где  $k, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ;  $r_n = r_{n00} k_{win}$  — отсчеты корреляционной функции процесса  $\hat{x}_n$ , значения которого совпадают со значениями процесса  $\hat{x}_{n00}$ , имеющего корреляционную функцию  $r_{n00}$  на интервале времени, определяемого длительностью  $\text{rect}[n]$ ;  $k_{win}$  — корреляционная функция используемого временного окна. При оценке спектральной плотности мощности с помощью указанного преобразования, возникает ошибка смещения [87]

$$b[G_k] = 4 \sum_{n=0}^{\infty} [k_{win} - 1] r_n \cos\left(\frac{2\pi}{N} k\right) n.$$

При этом разрешающая способность по частоте  $\Delta f = 1/NT$ . Определим значение  $r_{n00}$ , полагая, что  $r_n$  получено путем измерения из отсчетов  $\hat{x}_n$ .

Заменяя индекс  $n$  на  $j$  (причем  $j_{\max} = N-1$ ), будем иметь  $r_j = r_n/k_{win}$ .

Положим, что отсчеты автокорреляционной функции  $r_j$  позволяют получить  $N-1$  конечную разность, т. е. эта функция описывается полиномом  $N$ -го порядка. Учет симметрии автокорреляционной функции относительно индекса  $n = j = 0$ , позволяет использовать в равной степени как восходящие, так и нисходящие разности. Тогда, имея значения автокорреляционной функции в точках  $j = 0, 1, \dots, N-1$  соответственно в виде  $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{N-1}$ , можно любую автокорреляционную функцию представить в виде [36]

$$r_j = r_0 + \Delta^{(1)} r_0 j/1! + \Delta^{(2)} r_0 j(j-1)/2! + \dots, \quad (10.26)$$

где  $\Delta^{(1)} r_0 = r_1 - r_0$ ;

$$\Delta^{(2)} r_0 = \Delta^{(1)} [\Delta^{(1)} r_0] = r_2 - 2r_1 + r_0;$$

$$\Delta^{(N-1)} r_0 = \frac{\Delta^{(1)} [\Delta^{(1)} [\dots [\Delta^{(1)} r_0]]]}{(N-1)!} = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{N-1-j} \binom{N-1}{j} r_j.$$

Учитывая тот факт, что для целых неотрицательных чисел существует понятие обобщенной степени, которое имеет вид [88]

$$j^{(m)} = j(j-1)(j-2)\dots(j-n+1), \quad j^{(0)} = 1, \quad (10.27)$$

имеет свойства

$$0^{(m)} = 0, \quad n^{(m)} = n!, \quad \text{если } n > 1;$$

$$j^{(n)} = 0, \quad \text{если } n > j > 0;$$

$$\Delta^{(1)} j^{(n)} = n j^{(n-1)}, \quad \text{при } n \geq 1$$

и представляет собой мультипликативную функцию, которая может быть представлена в виде многочлена степени  $n$  по  $j$ .

Тогда (10.26) с учетом (10.27) можно записать в виде [88]

$$r_j = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \Delta^{(n)} r_0 j^{(n)}.$$

Используя последнее выражение определим экстраполированные значения  $r_j$ ,  $j > j_{\max} = N-1$ , причем  $j$  «пробегают» ряд значений до величины, при которых  $r_j = \epsilon$ , где  $\epsilon$  — заранее заданная величина, путем использования, например, метода Адамса [61].

Тогда можно записать

$$\eta_i = r_j + r_j,$$

где  $\eta_i = r_j$  при  $i = j \leq j_{\max}$  — рассчитанные значения автокорреляционной функции;  $\eta_i = r_j$  при  $i = \bar{j} > j_{\max}$  — экстраполированные ее значения.

Тогда энергетический спектр (спектральная плотность мощности), согласно теореме Хинчина-Винера и с учетом последнего выражения будет

$$\begin{aligned} G_k &= 4 \sum_{i=0}^I r_i \cos\left(\frac{2\pi}{I} k'\right) i = \\ &= 4 \sum_{i=0}^{j_{\max}} r_i \cos\left(\frac{2\pi}{I} k'\right) i + 4 \sum_{i=j_{\max}+1}^I r_i \cos\left(\frac{2\pi}{I} k'\right) i = \\ &= G_{k'p} + G_{k's}, \end{aligned} \quad (10.28)$$

где  $G_{k'p}$  — составляющая, полученная из той части автокорреляционной функции, которая определяется из отсчетов  $\hat{x}_n$ ;  $G_{k's}$  — составляющая, полученная из экстраполированной части автокорреляционной функции;  $2\pi/I = \Delta f' \leq \Delta f$  — новый интервал дискретизации по частоте, получающийся вследствие расширения массива данных за счет экстраполяции.



С учетом последних соотношений, выражение для ошибки смещения в случае прямоугольного временного окна  $\text{rect}[n]$  переписывается в виде

$$b[G_{k^*}]_p = -4 \sum_{i=N}^{\infty} r_i \cos\left(\frac{2\pi}{I} k^* i\right) i,$$

$$b[G_{k^*}]_s = -4 \sum_{i=I+1}^{\infty} r_i \cos\left(\frac{2\pi}{I} k^* i\right) i < b[G_{k^*}]_p.$$

Полагая, что  $I \gg N \gg 1$ , уменьшение ошибки смещения будет равно

$$\Delta b[G_{k^*}] = b[G_{k^*}]_p - b[G_{k^*}]_s = -4 \sum_{i=N}^I r_i \cos\left(\frac{2\pi}{I} k^* i\right) i.$$

Сравнение последнего выражения с (10.28) показывает, что  $G_{k^*}$  имеет противоположный знак по сравнению со знаком  $\Delta b[G_{k^*}]$  и равна ей по абсолютной величине. Это говорит о том, что данный метод позволяет уменьшить ошибку смещения оценки энергетического спектра.

Определим дисперсию оценки  $G_{k^*}$ . Предположим, что

$$r_i = r_i k_{wi},$$

где

$$k_{wi} = \begin{cases} 1 & \text{при } i \in [-I, I]; \\ 0 & \text{при } i \notin [-I, I]. \end{cases}$$

Тогда, используя выражение для дисперсии оценки энергетического спектра [87] и учитывая последнее выражение, можно записать

$$\sigma_G^2 \approx G_{k^*}^2 \sum_{i=0}^I k_{wi}^2 / i = G_{k^*}^2.$$

Подставляя в последнее выражение (10.28), получаем

$$\sigma_G^2 = G_{k^*p}^2 + 2G_{k^*p}G_{k^*s} + G_{k^*s}^2,$$

откуда квадрат относительной среднеквадратической ошибки будет

$$\xi^2 = \frac{\sigma_G^2}{G_{k^*p}^2} = \left(1 + \frac{G_{k^*s}}{G_{k^*p}}\right)^2.$$

Анализ последнего выражения показывает, что увеличение дисперсии оценки энергетического спектра процесса зависит от соотношения экстраполированной и рассчитанной его компонент. Кроме того, расширение массива данных позволяет повысить разрешающую способность и снизить эффект «частотокла», связанного с эффектом несовпадения анализируемой частоты с частотой, совпадающей с шагом дискретизации по частоте.

### 10.8. Погрешности вычислений

Реальные устройства ЦОС опираются с числовыми кодами, имеющими конечную разрядность (конечную длину слова), что приводит к возникновению погрешностей вычислений. Когда величина этой погрешности мала, то цифровые устройства можно считать приближенно линейными, а искажения, которые вносятся при этом в сигналы при обработке, полагают в виде источников «белого» шума, включенных в соответствующие узлы. К таким узлам относятся АЦП, которые были рассмотрены ранее, и перемножители кодов двух чисел, и иногда и сумматоры [37]. Последнее связано с тем, что цифровые вычислители работают с кодами чисел, значения которых меньше единицы, а перемножение двух таких чисел приводит к увеличению длины разрядной сетки в два раза. Поскольку длина разрядной сетки ограничена, то самые младшие разряды отбрасываются (округляются). При этом предполагается, что эти округления в различных итерациях независимы друг от друга, а следовательно, ошибки вычислений носят случайный характер. При этом полагают, что их плотность вероятности равномерна в пределах величины младшего значащего разряда  $\pm 0,5\Delta$ , имеют математическое ожидание равное нулю и дисперсию равную  $\Delta^2/12$ .

Различные виды устройств ЦОС имеют различные уровни шумов округления. Тем не менее, поскольку все они делятся либо на устройства, реализующие алгоритмы БПФ, либо на устройства, реализуемые на основе соединения рекурсивных и нерекурсивных ячеек, то представляет интерес рассмотреть погрешности вычисления простейшей базовой операции БПФ, рекурсивной и нерекурсивной ячеек первого порядка. При анализе будем рассматривать случай, когда используется арифметика с плавающей запятой, если не оговорено особо, поскольку обычно в устройствах ЦОС используется арифметика с фиксированной запятой.

Структурная схема алгоритма базовой операции БПФ с основанием 2, прореживанием по времени и включенными источниками шумов, изображена на рис. 10.25 [16]. Для базовой операции алгоритма БПФ дисперсия шумов  $\sigma_{\epsilon_{i,c}}^2$ , возникающая при вычислениях на каждой итерации для каждой квадратурной компоненты, равна сумме дисперсий шумов, возникающих в двух перемножителях и сумматоре, которые появляются в случае использования вычислителя, использующего арифметику с плавающей запятой. Шумы перемножителей полагаются равными между собой  $\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = \epsilon_3^2 = \epsilon_4^2 = \Delta_{pu}^2/12$ . Шумы суммирования также полагаются равными между собой  $\epsilon_5^2 = \epsilon_6^2 = \epsilon_7^2 = \epsilon_8^2 = \Delta_{cs}^2/12$ .

Тогда будем иметь

$$\sigma_{\epsilon_{i,c}}^2 = 2\Delta_{pu}^2/12 + \Delta_{cs}^2/12.$$

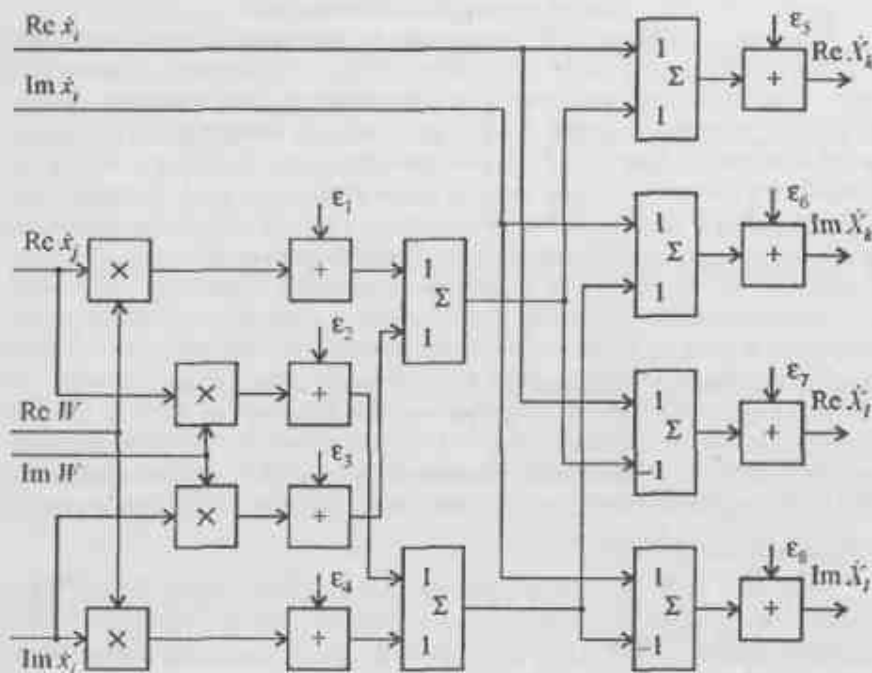


Рис. 10.25. Структурная схема алгоритма базовой операции БПФ с основанием 2, прореживанием по времени и источниками шумов

При этом дисперсия шумов вычислений, появляющихся в результате выполнения  $i$ -й итерации будет равна:

$$\sigma_{(i)}^2 = (2^i - 1)(\Delta_{ум}^2/6 + \Delta_{сч}^2/12).$$

При размере преобразования БПФ равном  $N$ , алгоритм БПФ по основанию 2 заканчивается за  $N \log_2 N$  итераций. Тогда шумы вычисления каждой квадратурной компоненты будут

$$\sigma_{БПФ}^2 = (N - 1)(\Delta_{ум}^2/6 + \Delta_{сч}^2/12).$$

Для случая, когда используется вычислитель, работающий с фиксированной запятой, дисперсия шумов сложения полагается равной нулю.

Рассмотрим шумы вычислений, возникающие при выполнении вычислительных операций в цифровой рекурсивной ячейке, структурная схема которой с включенными источниками «белых» шумов изображена на рис. 10.26.

Положим, что в цифровой рекурсивной ячейке шумы квантования приведены к ее входу и равны  $\epsilon_1$ . Также положим, что в устройстве перемен-

жения комплексных чисел возникают ошибки  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$ , связанные с перемножениями чисел, сложением и вычитанием [89].

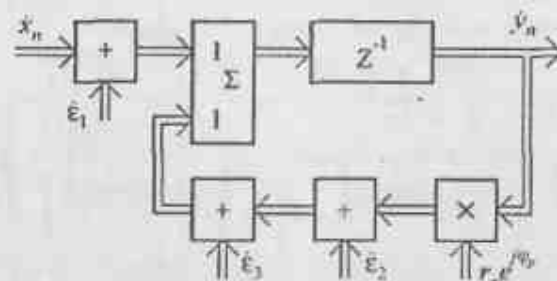


Рис. 10.26. Структурная схема рекурсивной ЦКЯ с включенными источниками шумов

Считая, что все эти ошибки вычислений независимы друг от друга, запишем дисперсию ошибки в момент времени  $nT$  в виде

$$\sigma_n^2 = (\epsilon_1 \epsilon_1^*)^{0.5} + (\epsilon_2 \epsilon_2^*)^{0.5} + (\epsilon_3 \epsilon_3^*)^{0.5}.$$

Очевидно, что дисперсия ошибки будет увеличиваться прямо пропорционально числу итераций  $n$ . Тогда, полагая, что величина  $(\epsilon_1 \epsilon_1^*)^{0.5} = (\epsilon_2 \epsilon_2^*)^{0.5} = (\epsilon_3 \epsilon_3^*)^{0.5} = n\Delta^2/12$ , что имеет место при использовании арифметики с фиксированной запятой, будем иметь в момент времени  $t = NT$

$$\sigma_N^2 = 3N\Delta^2/12 = N\Delta^2/4. \quad (10.29)$$

Учитывая, что полезный сигнал при  $r_p = 1$  накапливается также линейно, то при заданном отношении сигнал/шум на входе (например, в дБ) можно определить требуемую величину разрядной сетки из соотношения [15]

$$K = \lceil \frac{D - 20 \lg(2/\sqrt{3N})}{6} \rceil,$$

где знак  $\lceil \cdot \rceil$  — означает, что выбирается наименьшее целое число, превышающее величину, заключенную внутри этих скобок;  $D$  — динамический диапазон входного сигнала в дБ.

Структурная схема цифровой нерекурсивной ячейки с включенными источниками шумов, изображена на рис. 10.27.

При использовании нерекурсивной ячейки первого порядка производится операция комплексного перемножения и сложения. В этом случае расчет погрешностей вычислений может быть сведен к выражению, полученному для алгоритма БПФ осуществляющего вычисление одной итерации одной квадратурной компоненты и, в случае необходимости, с последующим объ-

единением результатов вычислений по каждой из компонент при вычислении амплитуды отфильтрованной реализации.

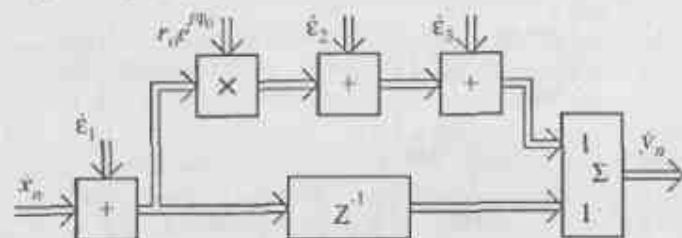


Рис. 10.27. Структурная схема нерекурсивной ЦКЯ с включенными источниками шумов

Рассмотрим погрешности вычислений, возникающие в цифровом последовательном анализаторе спектра [81]. При этом будем полагать, что используется арифметика с фиксированной запятой.

Дисперсия в сигнальной ячейке определяется аддитивной суммой шумов округления произведений кодов коэффициентов на коды входных отсчетов и шумов округления, возникающих при вычислении коэффициентов в опорной ячейке, поскольку эти процессы не коррелированы. Полагая, что длина разрядной сетки одинакова во всех узлах, и учитывая (10.29), получаем, что

$$\sigma_{\Sigma}^2 = 0,5N\Delta^2.$$

Таким образом можно сделать вывод о том, что погрешности вычислений возрастают пропорционально числу операций и для обеспечения заданного уровня отношения сигнал/шум необходимо и достаточно увеличить длину разрядной сетки, уменьшив тем самым величину погрешностей. Так для цифровой рекурсивной ячейки увеличение длины разрядной сетки на один разряд позволяет увеличить число накапливаемых отсчетов в два раза. При этом сохраняется заданный уровень отношения сигнал/шум на выходе.

Общая теория расчета шумов вычислений для случая, когда цифровое частотно-избирательное устройство состоит из последовательного соединения нерекурсивных и рекурсивных ячеек, число которых произвольно, в настоящее время отсутствует. Поэтому необходимо каждый раз производить те или иные расчеты исходя из полученных конкретных структур.

Следует сказать, что используемые в последнее время микропроцессоры, предназначенные для ЦОС, имеют разрядные сетки со столь большим числом разрядов, что проблема погрешностей вычислений потеряла свою прежнюю остроту.

### 10.9. Выводы

В данной главе рассмотрены методы цифрового спектрального анализа, реализация которых может быть осуществлена как программным путем, так и аппаратным, как на однопроцессорных ЦВМ, так и на многопроцессорных. В случае аппаратной реализации АС целесообразно использовать как возможности, предоставляемые современной элементной базой в виде микропроцессоров, ориентированных на ЦОС, так и возможности, которые предоставляют принципы многопроцессорной их реализации.

Показано, что непараметрические методы спектрального анализа могут быть реализованы при помощи параллельного набора цифровых резонаторов, перекрывающих заданный диапазон частот. Отметим, что хотя в данной главе для задач спектрального анализа рассматривались простейшие цифровые резонаторы, осуществляющие обработку в режиме работы «скользящее» окно, нет никаких препятствий для применения наборов полосовых ЦМФ с заданными видами АЧХ. В некоторых случаях для непараметрического спектрального анализа могут найти применение двухкаскадные АС, обладающие более высоким быстродействием по сравнению с однокаскадными [89, 90].

В том случае, когда имеются априорные сведения о характеристиках анализируемых процессов, их использование позволяет существенно сократить или количество требуемых операций, или затраты оборудования, как, например, при использовании цифрового последовательного АС.

Следует отметить, что рассмотрены в данной главе только те виды алгоритмов БПФ, которые появились исторически первыми. В настоящее время имеется достаточно большое количество разновидностей алгоритмов БПФ, однако все они в своей первооснове используют рассмотренные подходы. Широкое применение АС на основе алгоритмов БПФ связано с тем, что многие задачи ЦОС могут быть сведены к этим алгоритмам с приемлемым уровнем информационных потерь, а в ряде частных случаев и вообще без них, как например, при обработке реализаций, начало и конец которых известно строго. При этом получение требуемых результатов требует относительно небольших вычислительных затрат.

Анализ параметрических методов спектрального анализа показал, что платой за достижение более высоких информационных характеристик при оценивании случайных процессов является необходимость иметь достаточно высокий уровень априорной информации об этих процессах, а также либо наличие достаточных временных ресурсов, либо нужно иметь высокопроизводительные вычислительные устройства. Тем не менее, несмотря на указанные ограничения, параметрические методы спектрального анализа в последнее время находят достаточно широкое применение для оценки параметров коррелированных помех в радиолокации, при получении электрокардиограммы для устранения сетевых наводок и в ряде других прикладных

задач. Отметим также, что параметрические методы используются в том или ином виде при решении задач адаптации устройств обработки сигналов.

Показано, что ограничение длины разрядной сетки вычислителя приводит к ошибкам вычислений, которые могут быть представлены в виде отсчетов «белого» шума, добавляемого к результатам вычислений. Выбором числа разрядов можно свести уровень этих шумов до заранее заданной величины. Отметим, что у современных микропроцессоров, предназначенных для ЦОС, число разрядов с которыми оперирует вычислитель, столь велико, что для большинства задач уровнем указанных шумов пренебрегают.

## II. ВЫЧИСЛЕНИЕ АМПЛИТУДЫ КОМПЛЕКСНОЙ ОГИБАЮЩЕЙ СИГНАЛА

### II.1. Вводные замечания

Известно, что в аналоговых устройствах обработки информации полезное сообщение, поступающее на исполнительный элемент, представляется в виде амплитуды сигнала. К элементам, осуществляющим подобные преобразования, относятся детекторы различного вида, в основе построения которых лежат диоды.

Поскольку вольтамперные характеристики (ВАХ) диодов условно делятся на квадратичный и линейный участки, то для обработки аналоговых сигналов приходится учитывать изменения статистических свойств реализаций в зависимости от их интенсивности. Наличие квадратичного участка в ВАХ диодов приводит к нелинейным эффектам. Поэтому стремятся обеспечить линейный режим детектирования.

В задачах ЦОС широкое применение, как указывалось, получило представление выборок сигналов в виде отсчетов квадратурных составляющих комплексной огибающей.

Наиболее часто полезное сообщение является энергетическим параметром и содержится в амплитуде обработанной реализации, представленной в виде квадратурных компонент комплексной огибающей.

В том случае, когда конечным результатом обработки является значение огибающей обработанного сигнала, либо значения амплитуд его спектральных составляющих, возникает необходимость выполнения для каждого отсчета следующей операции

$$R = \sqrt{(\operatorname{Re} \hat{y})^2 + (\operatorname{Im} \hat{y})^2}, \quad (11.1)$$

где  $\operatorname{Re}(\hat{y})$ ,  $\operatorname{Im}(\hat{y})$  – значения реальной и мнимой составляющей комплексного сигнала  $\hat{y}$ ;  $R$  – значение модуля  $\hat{y}$ .

Реализация операции вычисления квадратного корня цифровыми методами связана с трудоемкими вычислительными процедурами на основе

итерационных методов. Поэтому на практике иногда используют алгоритм вида

$$R_0 = R^2 = (\operatorname{Re} \hat{y})^2 + (\operatorname{Im} \hat{y})^2,$$

который является нелинейным и приводит к эффекту подавления слабого сигнала сильным, что бывает недопустимо.

В связи с этим, для выполнения условия (11.1), в устройствах ЦОС, работающих в реальном масштабе времени, более широкое применение нашли упрощенные методы оценки амплитуды, так называемые модульные методы [92]. Алгоритмы этих методов основываются на выборе максимального значения из линейных комбинаций над величинами  $|\operatorname{Re} \hat{y}|$  и  $|\operatorname{Im} \hat{y}|$ . Известные алгоритмы, описанные в [15, 83, 91, 92], обладают низкой точностью и невозможностью получения заранее заданного результата с требуемой точностью. Поэтому представляет интерес рассмотрение алгоритма позволяющего обеспечивать заранее заданную требуемую точность вычисления амплитуды сигнала при использовании модульных значений его квадратурных составляющих.

### 11.2. Обобщенный алгоритм модульного метода вычисления амплитуды

Рассмотрим обобщенный алгоритм модульного метода, позволяющий синтезировать устройства оценки амплитуды и обеспечивающий наперед заданную точность по критерию минимума среднеквадратического отклонения от истинной величины амплитуды [93].

Аппроксимируем (11.1) выражением

$$\hat{R} = \max_{i=1,2,\dots,m} (a_i |\operatorname{Re} \hat{y}| + b_i |\operatorname{Im} \hat{y}|, b_i |\operatorname{Re} \hat{y}| + a_i |\operatorname{Im} \hat{y}|), \quad (11.2)$$

где  $\hat{R}$  – оценочное значение амплитуды;  $a_i, b_i$  – неотрицательные коэффициенты; общее число которых равно  $2m$ .

Покажем, что относительная погрешность оценки амплитуды  $\hat{R}$  по указанному критерию модульным методом не зависит от ее истинной величины  $R$ . Подставляя в (11.2) выражения  $\operatorname{Re} \hat{y} = R \cos \varphi$  и  $\operatorname{Im} \hat{y} = R \sin \varphi$ , где  $\varphi = \arctg(\operatorname{Im} \hat{y} / \operatorname{Re} \hat{y})$  – фаза отсчета сигнала, и нормируя относительно  $R$  получаем

$$\frac{\hat{R}}{R} = \max_{i=1,2,\dots,m} (a_i |\cos \varphi| + b_i |\sin \varphi|, b_i |\cos \varphi| + a_i |\sin \varphi|). \quad (11.3)$$

Поскольку операции производятся над модулями величин  $|\operatorname{Re} \hat{y}|$  и  $|\operatorname{Im} \hat{y}|$ , то достаточно рассмотреть поведение (11.3) в первом квадранте.

### 11. Вычисление амплитуды комплексной огибающей сигнала

Задавшись условием  $a_i \geq b_i$  для каждой  $i$ -й пары коэффициентов, выражение (11.3) представим в виде

$$\frac{\hat{R}}{R} = \max_{i=1,2,\dots,m} [C_i \cos(\varphi - \pi/4 \pm Q_i)], \quad (11.4)$$

где  $C_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ ,  $Q_i = \arctg[(a_i - b_i)/(a_i + b_i)]$ .

Каждое  $i$ -е выражение из (11.4) при  $a_i \neq b_i$  описывает две окружности в полярной системе координат, которые расположены симметрично относительно оси  $\varphi = \pi/4$ , имеют радиусы, равные  $C_i/2$  и центры которых расположены в точках  $[C_i/2, (\pi/4) \pm Q_i]$ . Общее число окружностей, при условии независимости всех коэффициентов, равно  $4n$ , где  $n$  равно общему числу ненулевых коэффициентов, а числа  $m$  и  $n$  связаны соотношением  $m = ]0, 5n[$ , (11.5)

где  $]x[$  – операция взятия ближайшего большего целого.

Следовательно, геометрической интерпретацией алгоритма (11.3) является аппроксимация окружности единичного радиуса кривой, состоящей из  $4n$  дуг, принадлежащих аппроксимирующим окружностям и приходящимся на те участки этих окружностей, где описывающие их выражения из (11.3) принимают максимальные значения.

На рис. 11.1 изображен пример такой аппроксимации для случая  $n=2$ .

Можно показать, что для заданного значения  $n$  аппроксимация окружности единичного радиуса будет наилучшей, когда все центры окружностей, вписанных в нее, расположены через равные сектора, а их радиусы одинаковы. Это соответствует случаю, когда многоугольник, образованный соединением центров всех окружностей, будет правильным.

Тогда, с учетом последнего замечания, выражение (11.4) можно записать в виде

$$\frac{\hat{R}}{R} = C \max_{i=1,2,\dots,m} [\cos(\varphi - \pi/4 - Q_i)]; \quad (11.6)$$

$$Q_i = (2i-1)\psi, \quad \psi = \pi/4n, \quad i=1,2,\dots,m. \quad (11.7)$$

Отметим, что в данном случае коэффициент  $C$  является масштабирующим и используется для устранения ошибки смещения, так как при  $C=1$  среднее значение оценки  $\hat{R}$  отлично от  $R$ . Для устранения ошибки смещения необходимо выполнение равенства

$$C = 1/A(\varphi, n),$$

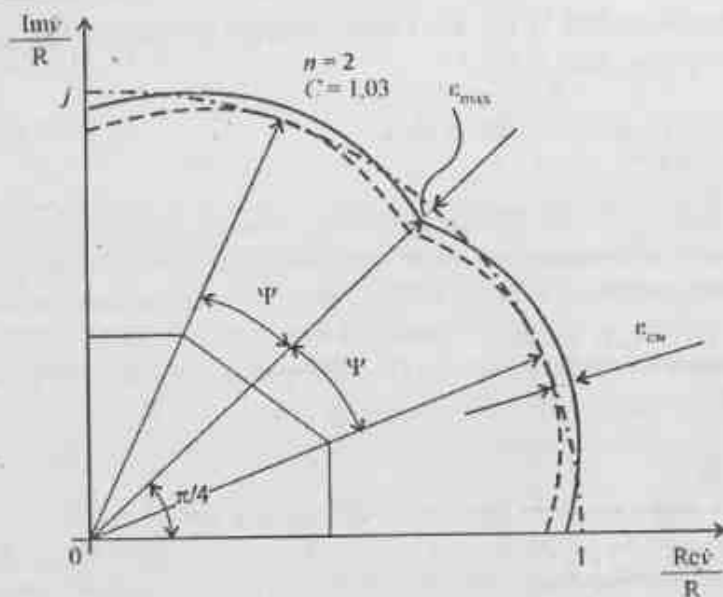


Рис. 11.1. Пример аппроксимации окружности единичного радиуса с вписанными в него окружностями

где  $\overline{A(\varphi, n)}$  соответствует выражению (11.6) при  $C=1$ , черта сверху означает математическое ожидание.

Поскольку в большинстве практических задач появление того или иного значения фазы на интервале  $[0, 2\pi]$  равновероятно, следовательно плотность распределения фазы  $W(\varphi) = 1/2\pi$ . Из рис. 11.1 видно, что для определения ошибки аппроксимации достаточно рассмотреть поведение (11.6) в секторе  $\psi$ . Тогда

$$\overline{A(\varphi, n)} = (2\pi/\psi) \int_{\pi/4+\psi}^{\psi+\pi/4+\psi} \cos(\varphi - \pi/4 - Q) W(\varphi) d\varphi = \sin \psi / \psi.$$

Определим дисперсию ошибки аппроксимации через второй начальный момент и математическое ожидание

$$\begin{aligned} D[n] &= \overline{A^2(\varphi, n)} - [\overline{A(\varphi, n)}]^2 = \\ &= (2\pi/\psi) \int_{\pi/4+\psi}^{\psi+\pi/4+\psi} \cos^2(\psi - \pi/4 - Q) W(\varphi) d\varphi - \frac{\sin^2 \psi}{\psi^2} = \\ &= 0,5 + (\sin \psi / \psi) [0,5 \cos \psi - (\sin \psi / \psi)]. \end{aligned}$$

Как видно из рис. 11.1, ошибка аппроксимации принимает максимальное значение  $\epsilon_{\max}(n)$  в точках пересечения дуг аппроксимирующих окружностей. Для данного случая это всегда выполняется при  $\varphi = \pi/4$ .

Тогда, при несмещенной оценке

$$\epsilon_{\max}(n) = 1 - C \cos \psi = 1 - \psi / \text{tg} \psi.$$

На рис. 11.2 представлены зависимости  $\epsilon_{\max}(n)$ , среднеквадратической ошибки аппроксимации  $\sigma(n) = \sqrt{D(n)}$  и ошибки смещения  $\epsilon_{\text{св}}(n) = 1 - (\sin \psi / \psi)$  в случае, когда  $C=1$ .

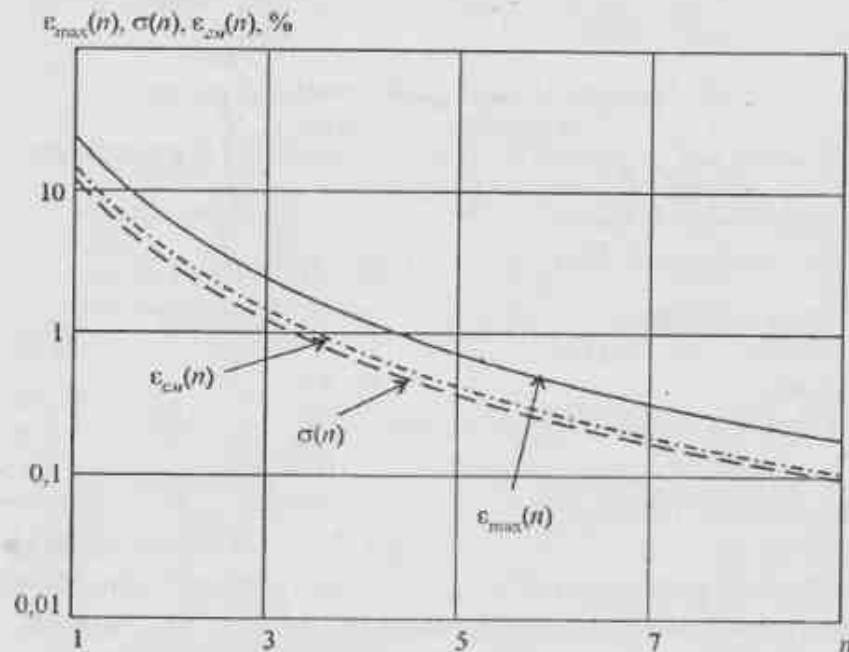


Рис. 11.2. Зависимости величин ошибок аппроксимации от числа аппроксимирующих окружностей n

Видно, что функция  $\sigma(n)$ ,  $\epsilon_{\text{св}}(n)$  практически совпадают. Разложим в ряд функции  $\sigma(n)$ ,  $\epsilon_{\text{св}}(n)$ . Используя разложение в ряд Тейлора функции  $\sin \psi$ ,  $\text{ctg} \psi$  в окрестности  $\psi = 0$ , после ряда преобразований получаем [64]

$$\epsilon_{\text{св}}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} \psi^{2k} = \frac{(\pi/4)^2}{6n^2} - \frac{(\pi/4)^4}{120n^4} + \dots$$

$$\varepsilon_{\max}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_k}{(2k)!} \psi^{2k} = \frac{(\pi/4)^2}{3n^2} + \frac{(\pi/4)^4}{45n^2} + \dots$$

где  $B_k$  – коэффициент Бернулли.

Учитывая высокую сходимость рядов, ограничиваясь их первыми членами, будем иметь  $\sigma(n) \approx \varepsilon_{\text{ср}}(n) \approx 0,1/n^2$ ,  $\varepsilon_{\max}(n) \approx 2\sigma(n)$ .

Приведенные выражения достаточно точно аппроксимируют зависимости, представленные на рис. 11.2, и показывают, что относительный уровень ошибки оценки амплитуды алгоритмом (11.2) имеет квадратичную сходимость от числа используемых коэффициентов, что пропорционально числу вычислительных операций.

### 11.3. Особенности реализации модульного метода вычисления амплитуды

Проведем над алгоритмом (11.2) ряд тождественных преобразований с целью упрощения его технической реализации.

Перепишем (11.2) в виде

$$\bar{R} = \max_{i=1,2,\dots,m} [a_i \max(|\operatorname{Re} \dot{y}|, |\operatorname{Im} \dot{y}|) + b_i \min(|\operatorname{Re} \dot{y}|, |\operatorname{Im} \dot{y}|)].$$

Используя тождество

$$\min(k, l) = k + l - \max(k, l), \quad (11.8)$$

получаем

$$\bar{R} = \max_{i=1,2,\dots,m} \{d_i V + b_i S \max[d_{m-1} V + b_{m-1} S \max(\dots)]\}, \quad (11.9)$$

где  $V = \max(|\operatorname{Re} \dot{y}|, |\operatorname{Im} \dot{y}|)$ ;

$$d_i = a_i - b_i; \quad (11.10)$$

$$S = |\operatorname{Re} \dot{y}| + |\operatorname{Im} \dot{y}|. \quad (11.11)$$

Структурная схема устройства, реализующая алгоритм (11.9), изображена на рис. 11.3, а на рис. 11.4 изображена структурная схема отдельного модульного блока  $M_i$ .

На рис. 11.3 и рис. 11.4 обозначено: блок  $|\cdot|$  – вычислитель модуля; блок  $\max$  – схема сравнения двух чисел по максимуму; блок  $\Sigma$  – сумматор; блок  $\times$  – блок умножения; блок  $T$  – элемент задержки.

Обработка квадратурных отсчетов сигнала, в соответствии с алгоритмом (11.7), разбивается на  $m$  однотипных операций, каждая из которых выполняется модульным блоком  $M_i$ , как показано на рис. 11.3.

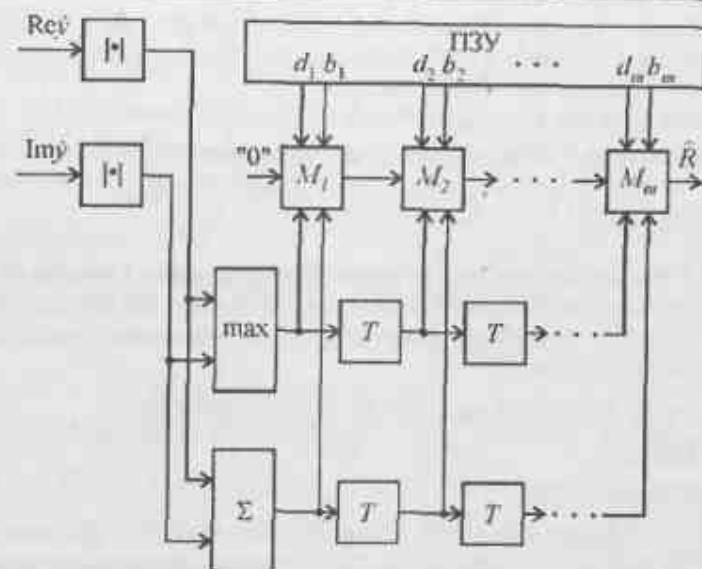


Рис. 11.3. Структурная схема устройства вычисления амплитуды комплексного сигнала по его квадратурным составляющим

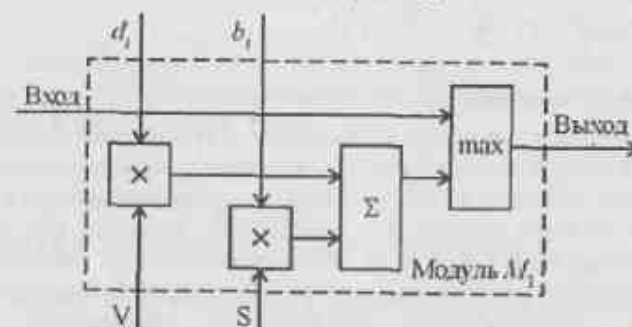


Рис. 11.4. Структурная схема модульного блока  $M_i$

Элемент задержки  $T$  используется для организации синхронной работы устройства, поскольку промежуточные результаты вычислений на выходе каждого  $M_i$ -го модульного блока задерживаются относительно входных данных на время выполнения соответствующих арифметических операций.

Как видно из рис. 11.3 и рис. 11.4 число блоков умножения, в основном определяющих сложность устройства, равно  $n$ . Отметим, что при работе данного устройства с кодами, представленными в форме с фиксированной запятой, на выходе блока  $\Sigma$  возможен случай переполнения разрядной сет-

ки в соответствии с выражением (11.11). Во избежание этого необходимо входные данные уменьшить в два раза с последующим увеличением результата в два раза на выходе устройства.

Подав на вход «0» код числа, соответствующего уровню порога, устройство одновременно с вычислением величины  $\bar{R}$  может производить сравнение полученного результата с порогом, что часто бывает необходимо в задачах обнаружения.

#### 11.4. Расчет параметров устройства вычисления амплитуды

11.4.1. На основании проведенного анализа можно предложить следующий метод расчета параметров устройства вычисления амплитуды комплексной огибающей сигнала.

По заданной точности  $\varepsilon_{\max}$  в %, определяются величины

$$n = \lceil \sqrt{20/\varepsilon_{\max}} \rceil, \quad (11.12)$$

$$C = (\pi/4n)/\sin(\pi/4n), \quad (11.13)$$

после чего по выражению (11.5) и определяется число  $m$ , а по выражению (11.7) находятся  $m$  значений фаз  $Q_i$ . Полученные величины  $Q_i$  используются для определения коэффициентов  $b_i$  и  $d_i$ , рассчитываемых по выражениям

$$b_i = C \cos(\pi/4 + Q_i), \quad d_i = \sqrt{2}C \sin Q_i. \quad (11.14)$$

11.4.2. Рассмотрим реализацию метода с учетом того факта, что коэффициент  $d_i$  может оказаться по абсолютной величине больше единицы. Известно, что при использовании арифметики с фиксированной запятой нет возможности оперирования с числами, значения которых больше единицы. Для того чтобы устройство вычисления амплитуды оперировало с числами, абсолютные значения которых меньше единицы, проведем ряд преобразований исходного алгоритма (11.2). Без потери общности наиболее просто указанные преобразования можно произвести на конкретном примере.

Заданная максимальная погрешностью определения амплитуды  $\varepsilon_{\max} = 3\%$ . По этой величине, используя выражения (11.12) и (11.13), будем иметь

$$n = \lceil \sqrt{20/\varepsilon_{\max}} \rceil = \lceil \sqrt{20/3} \rceil = 3;$$

$$C = (\pi/4n)/\sin(\pi/4n) = (\pi/12)/\sin(\pi/12) = 1,01151516.$$

Определим из (11.5) величину  $m$

$$m = \lfloor 0,5n \rfloor = \lfloor 1,5 \rfloor = 2.$$

Из (11.7) по величинам  $n$  и  $m$  определяются  $m$  значений фаз  $Q_i$ , которые будут равны

$$Q_1 = 0,261799; \quad Q_2 = 0,785398.$$

По выражению (11.14) вычисляются коэффициенты  $b_i$  и  $d_i$ , которые будут

$$b_1 = 0,505758; \quad d_1 = 0,370239;$$

$$b_2 = 0; \quad d_2 = 1,011515.$$

Следуя (11.10), определим значения величины  $a_i$ , которые будут

$$a_1 = 0,875997; \quad a_2 = 1,011515.$$

Подставляя в (11.2) величины  $a_i$  и  $b_i$ , будем иметь

$$\bar{R} = \max \left[ (a_1 |\operatorname{Re} j| + b_1 |\operatorname{Im} j|), (b_1 |\operatorname{Re} j| + a_1 |\operatorname{Im} j|), \right.$$

$$\left. (a_2 |\operatorname{Re} j| + b_2 |\operatorname{Im} j|), (b_2 |\operatorname{Re} j| + a_2 |\operatorname{Im} j|) \right] =$$

$$= \max \left[ (0,875997 |\operatorname{Re} j| + 0,505758 |\operatorname{Im} j|), \right.$$

$$(0,505758 |\operatorname{Re} j| + 0,875997 |\operatorname{Im} j|),$$

$$\left. 1,011515 |\operatorname{Re} j|, 1,011515 |\operatorname{Im} j| \right].$$

Соотношение, связывающее минимум с максимумом при  $A > B$ , имеет вид  $A \max(|\operatorname{Re} j|, |\operatorname{Im} j|) + B \min(|\operatorname{Re} j|, |\operatorname{Im} j|) >$

$$> A \min(|\operatorname{Re} j|, |\operatorname{Im} j|) + B \max(|\operatorname{Re} j|, |\operatorname{Im} j|).$$

Тогда, учитывая последнее соотношение, выражение для  $\bar{R}$  примет вид

$$\bar{R} = \max \left\{ (a_1 \max(|\operatorname{Re} j|, |\operatorname{Im} j|) + b_1 \min(|\operatorname{Re} j|, |\operatorname{Im} j|)), a_2 \max(|\operatorname{Re} j|, |\operatorname{Im} j|) \right\}.$$

Представляя коэффициент  $a_2$  в виде

$$a_2 = a_1 - b_1 + \gamma,$$

и учитывая условие (11.8), получаем

$$\bar{R} = \max \left\{ ((a_1 - b_1) \max(|\operatorname{Re} j|, |\operatorname{Im} j|) + b_1 \min(|\operatorname{Re} j|, |\operatorname{Im} j|)), \right.$$

$$\left. ((a_1 - b_1) \max(|\operatorname{Re} j|, |\operatorname{Im} j|) + \gamma \max(|\operatorname{Re} j|, |\operatorname{Im} j|)) \right\}.$$

Вынося величину  $\gamma$  за общую скобку после того, как вынесена вперед величина  $(a_1 - b_1) \max(|\operatorname{Re} j|, |\operatorname{Im} j|)$ , окончательно получаем

$$\bar{R} = \gamma \left\{ \beta \max(|\operatorname{Re} j|, |\operatorname{Im} j|) + \right. \quad (11.15)$$

$$\left. + \max \left[ \max(|\operatorname{Re} j|, |\operatorname{Im} j|), \alpha (|\operatorname{Re} j| + |\operatorname{Im} j|) \right] \right\},$$

где

$$\alpha = b_1/\gamma = 0,788674; \quad \beta = (a_1 - b_1)/\gamma = 0,577347; \quad \gamma = a_2 - a_1 + b_1 = 0,641276.$$

Видно, что в выражении (11.15) все коэффициенты по величине меньше единицы, что позволяет легко использовать микропроцессоры, оперирующие с числами с фиксированной запятой.



11.4.3. В соответствии с уравнением (11.15), структурная схема устройства вычисления амплитуды комплексной огибающей сигнала по его квадратурным составляющим будет иметь вид, изображенный на рис. 11.5, а временные диаграммы ее работы представлены на рис. 11.6.

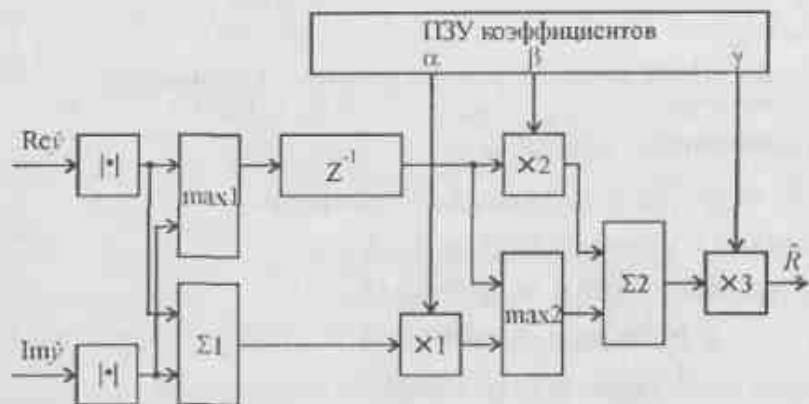


Рис. 11.5. Структурная схема устройства вычисления амплитуды комплексной огибающей сигнала

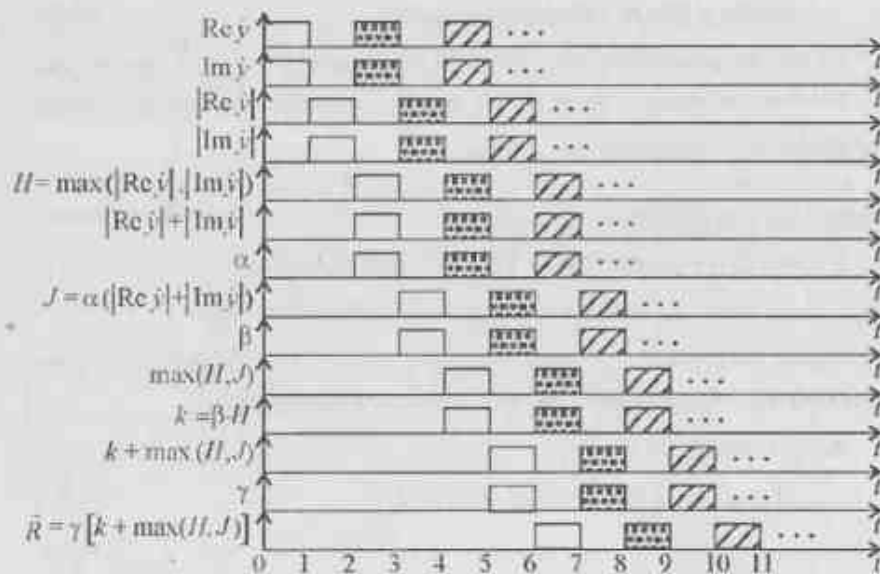


Рис. 11.6. Временные диаграммы работы устройства вычисления амплитуды

Работает данное многопроцессорное устройство следующим образом. Положив, что перед началом работы в ЦЛЗ  $Z^{-1}$  с задержкой на один такт, записаны нули и все узлы выполняют операции за один и тот же интервал времени.

Пусть в момент времени  $t = 0$  на входы устройства поступают отсчеты  $\{\text{Re } y\}$  и  $\{\text{Im } y\}$ . Эти коды поступают на блоки вычисления модуля.

В момент времени  $t = 1$  на выходах блоков вычисления модуля образуются коды, соответствующие числам  $|\text{Re } y|$  и  $|\text{Im } y|$ , которые поступают на входы сумматора  $\Sigma 1$  и блока  $\max 1$ .

В момент времени  $t = 2$  на выходе сумматора  $\Sigma 1$  появится код числа  $|\text{Re } y| + |\text{Im } y|$ , который поступает на первый вход первого умножителя  $\times 1$ , а на выходе блока  $\max 1$  появится код, соответствующий  $\max(|\text{Re } y|, |\text{Im } y|)$ , который поступает на вход ЦЛЗ  $Z^{-1}$ . Одновременно, на второй вход умножителя  $\times 1$  поступает код числа  $\alpha$  с первого выхода ПЗУ коэффициентов.

В момент времени  $t = 3$  на выходе первого умножителя  $\times 1$  появится код, соответствующий числу  $\alpha(|\text{Re } y| + |\text{Im } y|)$ , который поступает на первый вход второго блока  $\max 2$ . На второй вход этого блока поступает с выхода ЦЛЗ  $Z^{-1}$  код, соответствующий числу  $\max(|\text{Re } y|, |\text{Im } y|)$ . Одновременно этот же код с выхода ЦЛЗ  $Z^{-1}$  поступает на первый вход второго умножителя  $\times 2$ , на второй вход которого со второго выхода ПЗУ коэффициентов поступает код числа  $\beta$ .

В момент времени  $t = 4$  на выходе блока  $\max 2$  появится код, соответствующий числу  $\max[\max(|\text{Re } y|, |\text{Im } y|), \alpha(|\text{Re } y| + |\text{Im } y|)]$ . Одновременно, на выходе второго умножителя  $\times 2$  появится код числа  $\beta \max(|\text{Re } y|, |\text{Im } y|)$ . Эти коды поступают на входы второго сумматора  $\Sigma 2$ .

В момент времени  $t = 5$  на выходе второго сумматора  $\Sigma 2$  появится код, соответствующий числу

$$\beta \max(|\text{Re } y|, |\text{Im } y|) + \max[\max(|\text{Re } y|, |\text{Im } y|), \alpha(|\text{Re } y| + |\text{Im } y|)],$$

который поступает на первый вход третьего умножителя  $\times 3$ . На второй вход умножителя  $\times 3$  одновременно поступает код числа  $\gamma$  с третьего выхода ПЗУ коэффициентов.

В момент времени  $t = 6$  на выходе третьего умножителя  $\times 3$  появится код числа

$$\hat{R} = \gamma \{ \beta \max(|\text{Re } y|, |\text{Im } y|) + \max[\max(|\text{Re } y|, |\text{Im } y|), \alpha(|\text{Re } y| + |\text{Im } y|)] \},$$

который является оценкой амплитуды комплексной огибающей сигнала.

Величина среднеквадратической погрешности определения амплитуды этим устройством, полученная расчетным путем по приводимым ранее выражениям, составляет  $\sigma = 1,1\%$ , а максимальная погрешность соответственно будет равна величине  $\varepsilon_{\max} = 2,2\%$ .

Очевидно, что на входы этого устройства могут поступать коды следующих отсчетов квадратурных составляющих не дожидаясь окончания процесса обработки предыдущих отсчетов во всех узлах многопроцессорного вычислительного устройства. Этот режим работы вычислителя соответствует конвейерному принципу обработки сигналов.

Отметим также, что, как и для схем, изображенных на рис. 11.3 и рис. 11.4, при определенных условиях для схемы, изображенной на рис. 11.5 также возможно появление чисел больших единицы на выходе сумматора  $\Sigma 1$  в соответствии с выражением (11.11). Подобные условия возникают при величинах квадратурных составляющих обработанного сигнала приближающихся к максимальным и при значениях фазы равной или близкой к  $(\pi/4 + k\pi/2)$ , где  $k = 0, 1, 2, 3$ . Последнее может привести к переполнению разрядной сетки в случае использования арифметики с фиксированной запятой.

Для предотвращения подобных ситуаций необходимо произвести, как указывалось ранее, предварительное масштабирование входных данных путем их сдвига на входе на один разряд вправо, а после выполнения вычислений — произвести обратную операцию, т.е. сдвинуть полученный результат на один разряд влево.

11.4.4. Сравнительный анализ рассматриваемого алгоритма с итерационной процедурой вычисления корня квадратного, предложенного в [64], по выражениям

$$R_j = 0,5(R_{j-1} + R_0/R_{j-1}), \quad R_0 = (\operatorname{Re} y)^2 + (\operatorname{Im} y)^2$$

показывает, что при обеспечении точности вычисления амплитуды до значений порядка  $10^{-3}$  применение алгоритма (11.2) требует меньшего объема вычислений даже для случая, когда скорость сходимости последнего выражения максимальна, т.е. при величинах  $R_j$  близких к 1.

Отметим также, что частные случаи рассмотренного обобщенного метода, например, при  $n = 1$ , приводит к результатам, описанным в [94]; при  $n = 2$  уточняются результаты, полученные на основе методов, описанных в [91, 92]; при  $n = 3$  уточняются значения коэффициентов, приводимых в [83]. В частности, при  $n = 3$  получаемые результаты при использовании рассмотренного алгоритма  $\varepsilon_{\max}(3) = 2,29\%$ ,  $\sigma(3) = 1,01\%$ , а согласно алгоритму, изложенного в [83], величина  $\varepsilon_{\max} = 2,98\%$ .

Вычисление модуля  $N$ -мерного вектора по ортогональным составляющим  $x, y, z, \dots$  выполняется аналогично с использованием алгоритма

$$R = \sqrt{x^2 + u^2}, \quad \text{где } u = \sqrt{y^2 + z^2},$$

причем требуемая точность обеспечивается при

$$n = \sqrt{20(N-1)/\varepsilon_{\max}}.$$

### 11.5 Выводы

Таким образом, рассмотренный обобщенный модульный метод определения амплитуды комплексного сигнала по его квадратурным составляющим реализуется в виде вычислителя с регулярной структурой, способного производить вычисления в конвейерном режиме с заранее заданной точностью по критериям минимума как среднеквадратической, так и максимальной ошибок.

Рассмотрена структурная схема многопроцессорного устройства вычисления амплитуды, позволяющая осуществлять вычисления при представлении чисел в арифметике с фиксированной запятой в конвейерном режиме. Регулярность синтезированной структуры вычислителя позволяет также производить операцию сравнения получаемых результатов с заранее рассчитанным пороговым значением, что, в ряде случаев, существенно упрощает техническую реализацию обнаружителей.

## 12. ГОМОМОРФНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

### 12.1. Вводные замечания

В предыдущих главах рассматривались линейные, инвариантные к сдвигу во времени системы.

Гомоморфная обработка сигналов является обобщением класса линейных систем. Линейные системы, вследствие применимости к ним принципа суперпозиции, удобны для обработки сигналов, представляющих собой аддитивную сумму независимых компонент.

В свою очередь, классы нелинейных систем, подчиняющихся обобщенному принципу суперпозиции и линейным преобразованиям векторных пространств, называются *гомоморфными системами* [34].

В данной главе будут кратко рассмотрены вопросы обработки таких сигналов, которые представимы в виде свертки или произведения двух независимых компонент.

### 12.2. Обобщенная суперпозиция

Принцип суперпозиции, используемый для анализа линейных систем, рассмотрен в главе 3 и может быть применен при любом числе независимых компонент.

Чтобы сформулировать этот принцип в общем виде, обозначим через знак « $\square$ » правило объединения входных сигналов друг с другом (например сложение, умножение, свертку), а через знак « $\circ$ » правило для объединения входных сигналов со скалярами. Аналогично будем обозначать знаком « $\circ$ » правило объединения выходных сигналов системы и знаком « $\cup$ » – правило объединения выходных сигналов со скаляром.

Тогда, обозначая через  $H$  преобразование, осуществляемое системой, запишем следующую систему равенств

$$H(x_{1n} \square x_{2n}) = H(x_{1n}) \circ H(x_{2n});$$

$$H(c \cup x_{1n}) = c \cup H(x_{1n}).$$

Такие системы подчиняются обобщенному принципу суперпозиции со входной операцией  $\square$  и выходной операцией  $\circ$ . На рис. 12.1 дано изображение такой системы.

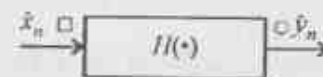


Рис. 12.1. Система обработки сигналов, подчиняющаяся обобщенному принципу суперпозиции

Линейные системы при таком представлении могут рассматриваться как частный случай, для которого операции « $\square$ » и « $\circ$ » являются операциями сложения, а « $\cup$ » и « $\cup$ » – операциями умножения.

Если входные и выходные сигналы трактовать как векторы в векторных пространствах, сложение в которых производится по правилам « $\square$ » и « $\circ$ », а умножение на скаляры по правилам « $\cup$ » и « $\cup$ », то преобразование, осуществляемое системой, является линейным преобразованием векторного пространства входных сигналов в векторное пространство выходных сигналов.

Для использования теории линейных векторных пространств необходимо выполнение условий коммутативности и ассоциативности, т. е.

$$x_{1n} \square x_{2n} = x_{2n} \square x_{1n};$$

$$y_{1n} \circ y_{2n} = y_{2n} \circ y_{1n};$$

$$x_{1n} \square (x_{2n} \square x_{3n}) = (x_{1n} \square x_{2n}) \square x_{3n};$$

$$y_{1n} \circ (y_{2n} \circ y_{3n}) = (y_{1n} \circ y_{2n}) \circ y_{3n}.$$

В этом случае, все системы, удовлетворяющие указанным требованиям, могут быть представлены в виде каскадного соединения трех систем, как показано на рис. 12.2. Такая каскадная форма называется каноническим представлением гомоморфных систем.

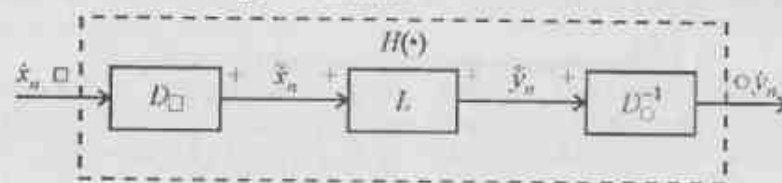


Рис. 12.2. Каноническая форма гомоморфных систем

Первая система  $D_{\square}$  характеризуется свойствами

$$D_{\square}(x_{1n} \square x_{2n}) = D_{\square}(x_{1n}) + D_{\square}(x_{2n}) = \bar{x}_{1n} + \bar{x}_{2n};$$

$$D_{\square}(c \cup x_{1n}) = c D_{\square}(x_{1n}) = c \bar{x}_{1n}.$$

Система  $D_{\square}$  подчиняется обобщенному принципу суперпозиции со входной операцией « $\square$ » и выходной операцией «+» и преобразует комбинацию сигналов  $x_{1n}$  и  $x_{2n}$ , объединенных правилом « $\square$ », в обычную линейную комбинацию.

Система  $L$  является обычной линейной системой, удовлетворяющей условиям

$$L(\bar{x}_{1n} + \bar{x}_{2n}) = L(\bar{x}_{1n}) + L(\bar{x}_{2n}) = \bar{y}_{1n} + \bar{y}_{2n};$$

$$L(c\bar{x}_{1n}) = c(L(\bar{x}_{1n})) = c\bar{y}_{1n}.$$

Система  $D_{\square}^{-1}$  преобразует сложение «+» в « $\square$ » и удовлетворяет условию

$$D_{\square}^{-1}(\bar{y}_{1n} + \bar{y}_{2n}) = D_{\square}^{-1}(\bar{y}_{1n}) \square D_{\square}^{-1}(\bar{y}_{2n}) = \bar{x}_{1n} \square \bar{x}_{2n};$$

$$D_{\square}^{-1}(c\bar{y}_{1n}) = c \cup D_{\square}^{-1}(\bar{y}_{1n}) = c \cup \bar{x}_{1n}.$$

Система  $D_{\square}$  называется *характеристической системой* для операции « $\square$ ». Аналогично, система  $D_{\circ}$  является *характеристической системой* для операции « $\circ$ ».

Очевидно, что если нужно выделить сигнал  $x_{1n}$  из сигнала  $x_n = x_{1n} \square x_{2n}$ , то нужно выбрать линейную систему так, чтобы ее выходной сигнал  $\bar{y}_n = \bar{x}_{1n}$ . Тогда при  $D_{\circ} = D_{\square}$  получим

$$y_n = D_{\square}^{-1}(\bar{x}_{1n}) = x_{1n}.$$

Таким образом, чтобы полностью разделить сигналы  $x_{1n}$  и  $x_{2n}$  нужно иметь возможность разделить сигналы  $\bar{x}_{1n}$  и  $\bar{x}_{2n}$  с помощью линейного фильтра.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением сигналов, которые представляют собой операции умножения и свертки.

### 12.3. Мультипликативные гомоморфные системы

Рассмотрим класс гомоморфных систем, подчиняющихся обобщенному принципу суперпозиции, у которых операция « $\square$ » является умножением, а операция « $\circ$ » – возведением в степень, что соответствует сигналам вида

$$x_n = (x_{1n})^{\alpha} (x_{2n})^{\beta}.$$

Характеристическая система для умножения должна обладать свойством

$$D[(x_{1n})^{\alpha} (x_{2n})^{\beta}] = \alpha D(x_{1n}) + \beta D(x_{2n}).$$

Очевидно, что формальным оператором, обладающим подобным свойством, является логарифм. Например, если  $x_n = x_{1n} x_{2n}$ , где  $x_{1n} > 0$  и  $x_{2n} > 0$  то

$$\ln(x_{1n} x_{2n}) = \ln x_{1n} + \ln x_{2n}.$$

Если входной сигнал представлен в виде комплексных отсчетов, то используется комплексная логарифмическая функция.

Тогда каноническое представление для комплексного сигнала может быть представлено в виде, изображенном на рис. 12.3.



Рис. 12.3. Каноническая структурная схема гомоморфной системы для обработки комплексного сигнала

Рассмотрим свойства комплексной логарифмической функции. Если  $\hat{x}_n = |\hat{x}_n| \exp[j \arg(\hat{x}_n)]$  – комплексная последовательность, то комплексный логарифм от  $\hat{x}_n$  запишется в виде

$$\text{Ln}(\hat{x}_n) = \ln |\hat{x}_n| + j \arg(\hat{x}_n).$$

Обратной функцией по отношению к  $\text{Ln}(\hat{x}_n)$  является комплексная экспонента

$$e^{\text{Ln}(\hat{x}_n)} = e^{\ln |\hat{x}_n|} e^{j \arg(\hat{x}_n)}.$$

Ясно, что результат не изменится, если прибавить целое число, умноженное на  $2\pi$ , к мнимой части комплексного логарифма, т.е. к  $\arg(\hat{x}_n)$ . Поэтому комплексный логарифм является неоднозначной функцией.

К свойствам комплексного логарифма можно отнести

$$\text{Ln} |\hat{x}_n| = \text{Ln} |\hat{x}_{1n}| + \text{Ln} |\hat{x}_{2n}|;$$

$$\arg[\hat{x}_n] = \arg(\hat{x}_{1n}) + \arg(\hat{x}_{2n}).$$

При этом необходимо выбрать  $\arg(\hat{x}_n)$  так, чтобы не было неоднозначности, что представляет в некоторых случаях достаточно сложную задачу. Последнее связано с тем, что сумма главных значений аргументов сигналов  $\hat{x}_{1n}$  и  $\hat{x}_{2n}$  не всегда дают главное значение аргумента сигнала  $\hat{x}_n$ .

В дальнейшем будем полагать, что выполняется условие однозначности. Очевидно, что если требуется провести раздельную обработку компонент  $\hat{x}_{1n}$  и  $\hat{x}_{2n}$ , то указанный вид обработки линейной системой, изображенной на рис. 12.3 целесообразен тогда, когда одна из компонент меняется быстро, а другая медленно. В частности, это имеет место при сжатии динамического диапазона звуковых сигналов, при обработке изображений.

На последнем этапе осуществляется потенцирование результатов прохождение компонент сигнала через линейную систему.

### 12.4. Гомоморфные системы относительно свертки

Рассмотрим последовательности объединенные посредством дискретной свертки в виде

$$\hat{x}_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}_{1k} \hat{x}_{2(n-k)} = \hat{x}_{1n} * \hat{x}_{2n}.$$

Это выражение удовлетворяет аксиомам векторного сложения и может служить основной операцией для класса гомоморфных систем. Умножение на целое число  $d$  соответствует повторной свертке  $\hat{x}_n$  с собой  $d$  раз, умножение на скаляр при целом  $d$  является обобщением этой операции.

Каноническая форма гомоморфных фильтров для свертки изображена на рис. 12.4.



Рис. 12.4. Структурная схема канонической формы гомоморфных фильтров для свертки

Характеристическая система  $D_s$  обладает свойством

$$D_s(\hat{x}_{1n} * \hat{x}_{2n}) = D_s(\hat{x}_{1n}) + D_s(\hat{x}_{2n}) = \hat{x}_{1n} + \hat{x}_{2n};$$

$$D_s(c \cdot \hat{x}_{1n}) = c D_s(\hat{x}_{1n}) = c \hat{x}_{1n}.$$

Система  $L$  является линейной, а система  $D_s^{-1}$  — обратной по отношению к системе  $D_s$ .

Основной математическое представление характеристической системы  $D_s$  является то свойство  $Z$ -преобразования, из которого следует, что  $Z$ -преобразование свертки двух временных последовательностей есть произведение их  $Z$ -преобразований.

В этом случае  $Z$ -преобразование может рассматриваться как гомоморфное преобразование у которого входной операцией является свертка, а выходной — умножение. Следовательно, используя  $Z$ -преобразование можно представить операции свертки в виде произведения.

Тогда каноническая система, изображенная на рис. 12.4, может быть представлена в виде, изображенном на рис. 12.5.

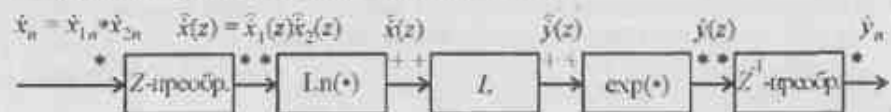


Рис. 12.5. Структурная схема канонической системы для гомоморфного преобразования сигнала, представленного в виде свертки

В данном случае также необходимо выполнение требования исключения неоднозначности комплексного логарифма.

### 12.5. Понятие о кепстре сигнала

Кепстром сигнала называют преобразование Фурье логарифма спектра мощности этого сигнала. Поскольку спектр мощности есть преобразование Фурье от автокорреляционной функции и он всегда положителен, то кепстр можно рассматривать как выходной сигнал характеристической системы  $D_s$ , когда на ее вход подается автокорреляционная функция. Так как спектр мощности всегда положителен, то потребуется только действительный логарифм.

Тогда система, обеспечивающая вычисление кепстра, принимает вид, изображенный на рис. 12.6.



Рис. 12.6. Структурная схема системы вычисления кепстра

Очевидно, что кепстр сигнала имеет размерность времени, а не частоты. Но это особое, кепстральное время. Кепстральный анализ следует применять для тех случаев, когда фазовые спектры функций, образующих результирующий сигнал, могут не приниматься во внимание.

Рассмотрим пример применения кепстрального анализа для оценки параметров ЛЧМ-сигнала [95]. Известно [13], что характеристики спектра ЛЧМ-сигнала зависят от величины, являющейся произведением полной девиации частоты на его длительность и которая называется базой сигнала.

Положим, что сигнал, поступающий на обработку, представим в виде  $\hat{x}(t) = \exp[j\psi(t)]$ , где  $\psi(t)$  — аналитическая функция, характеризующая закон фазовой модуляции.

Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности  $t = 0$  в виде

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(0)^{(k)}}{k!} t^k.$$

где  $\psi(0)^{(k)}$  — коэффициенты ряда, имеющие для  $k = 0, 1, 2$  физический смысл начальной фазы  $\phi_0$ , центральной частоты  $\omega_0$  и девиации частоты  $\mu$  ЛЧМ-сигнала соответственно.

Ограничиваясь величиной  $k_{\max} = 2$  и полагая, что во временной области сигнал ограничен весовым окном

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0, \tau_u], \\ 0 & \text{при } t \notin [0, \tau_u], \end{cases}$$

где  $\tau_u$  – длительность ЛЧМ-сигнала.

Тогда можно записать следующее выражение

$$s(t) = w(t) \exp \{ j[\varphi_0 + \omega_0 t + \mu t^2 / 2] \}.$$

В дальнейшем положим, что частота дискретизации настолько велика, что побочными эффектами можно пренебречь. Спектр мощности полученного ЛЧМ-сигнала описывается выражением [75]

$$|X(\omega)|^2 = (\pi/4\mu) \{ [C(x_1) + C(x_2)]^2 + [S(x_1) + S(x_2)]^2 \},$$

где  $C(x) = \int_0^x \cos(\pi\xi^2/2) d\xi$ ,  $S(x) = \int_0^x \sin(\pi\xi^2/2) d\xi$  – интегралы Френеля;

$$x_1 = \frac{0.5\mu\tau_u + (\omega - \omega_0)}{\sqrt{\pi\mu}}; \quad x_2 = \frac{0.5\mu\tau_u - (\omega - \omega_0)}{\sqrt{\pi\mu}},$$

причем  $x_1$  и  $x_2$  – безразмерные величины.

Известно, что функция  $|X(\omega)|^2$  не выражается аналитически через элементарные функции, однако в диапазоне частот  $[\omega_0 - 0.5\mu\tau_u, \omega_0 + 0.5\mu\tau_u]$  ее можно представить в виде произведения двух функций, т.е.  $|X(\omega)|^2 = H_m(\omega)H\delta(\omega)$ , где  $H_m(\omega)$  – медленно меняющаяся компонента,  $H\delta(\omega)$  – быстроосциллирующая, причем ее период обратно пропорционален величине  $\mu$ .

Тогда, подвергая полученный результат, представленный в виде спектральной плотности мощности  $|X(\omega)|^2$  ЛЧМ-сигнала, логарифмированию, получаем следующее выражение:

$$\ln |X(\omega)|^2 = \ln H_m(\omega) + \ln H\delta(\omega).$$

Поскольку спектры слабых различны в частотной области, то выделяя быстроосциллирующую функцию при помощи соответствующего полосового фильтра (или фильтра верхних частот) и подвергая полученный результат обратному преобразованию Фурье, получаем результат на временной оси, который связан с параметром  $\mu$ . На рис. 12.7 показана зависимость времени появления отклика от величины  $\mu_u = \mu\tau_u/\pi$ , где  $\pi$  – диапазон анализируемых частот.

Нормированный отклик

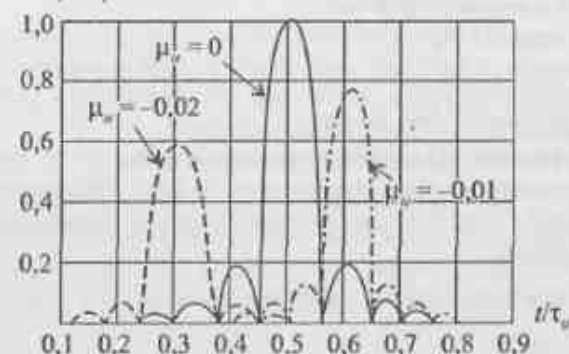


Рис. 12.7. Зависимость появления отклика во времени от  $\mu_u$ .

Анализ приведенных зависимостей показывает возможность определения величины девиации принимаемого ЛЧМ-сигнала. При этом на рис. 12.7 знаки ( $\pm$ ) величины  $\mu$  свидетельствуют о большей или меньшей величине девиации относительно выбранного среднего значения. Данный эффект связан с тем, что при заданной длительности импульса  $\tau_u$  изменение величины  $\mu$  приводит к изменению базы сигнала, от которой зависит частота пульсаций в огибающей спектра мощности ЛЧМ-сигнала.

### 12.6. Выводы

В данной главе рассмотрено понятие гомоморфной обработки сигналов, которое является обобщением понятия линейной обработки. При этом сигналы представимы в виде произведения или свертки функций. Показано, каким образом используются соответствующие представления входных сигналов для проведения операций обработки, отвечающих принципу обобщенной суперпозиции. Для этих целей приведены краткие определения свойств, которым удовлетворяют указанные виды преобразований.

Отметим, что слово «спектр» получило свое название от слова спектр, если слово «спектр» читать сначала справа налево от буквы «к», а затем слева направо от буквы «т». Подобное название было предложено для обозначения функции, поведение которой на оси времени зависит от частоты входного сигнала.

Как правило, входные сигналы, которые наиболее эффективно обрабатываются при помощи рассмотренных методов, описываются функциями, у которых информация заложена только в абсолютных значениях их огибающих. К таким сигналам, например, относятся сигналы, описывающие

отражающие свойства поверхностей при их облучении некогерентным светом, речевые и сейсмические сигналы.

Следует сказать, что обработка комплексных сигналов при использовании рассмотренных методов требует наложения ограничений на поведение их фазовых составляющих. При этом получающийся в результате обработки сигнал является действительной величиной.

Рассмотренный подход позволяет использовать для получения требуемых результатов при операциях над сигналами, которые представимы в виде произведения или свертки функций, хорошо разработанные методы линейной обработки.

### 13. ОБРАБОТКА БИНАРНО-КВАНТОВАННЫХ СИГНАЛОВ

#### 13.1. Вводные замечания

Как известно, у минимально-фазовых сигналов существует взаимно-однозначное соответствие между их амплитудной и фазовой функциями. В предыдущих главах была рассмотрена обработка квадратурных составляющих огибающей, представленных многоурядными кодами.

Очевидно, что представление сигнальной функции в виде огибающей, позволяет вести обработку в базисе ДЭФ. При этом сигнальная функция представляется в виде суммы независимых компонент.

В том случае, когда сигнал представлен в виде произведения комплексных экспоненциальных функций, получение в некоторых случаях строгих математических результатов либо затруднительно, либо требует достаточно большого числа нелинейных операций, как например, при оценке параметров ЛЧМ-сигнала.

Будем полагать, что по-прежнему на обработку поступает аналитический (минимально-фазовый) сигнал и рассмотрим случай, когда однорядному квантованию подвергаются значения его фазовой функции, а значения огибающей не учитываются.

Следует сказать, что построение устройств однорядного аналого-цифрового преобразования проще построения многоурядных. Построение же устройств обработки в виде устройств обнаружения сигналов, представленных в бинарно-квантованной форме, позволяет получать характеристики лишь незначительно уступающие характеристикам оптимальных устройств, которые используют как амплитудную, так и фазовую информацию одновременно [1].

В то же время построение измерителей параметров таких бинарно-квантованных сигналов характеризуется использованием эвристических алгоритмов. Кроме того, отсутствие разрешающей способности ограничивает применение указанного представления сигналов в цифровой форме, вследствие чего наиболее часто производится обработка только монохроматических сигналов [96].

13.2. Метод определения параметров процессов, подвергшихся бинарному квантованию

Рассмотрим метод цифрового определения количества и величин частот модуляции бинарно-квантованных сигналов с информацией, заключенной в дискретных отсчетах его полной фазовой функции [97].

Пусть имеем сигнал вида

$$\hat{x}(t) = E(t) \exp[j\psi(t)].$$

Положим, без потери общности,  $E(t) = 1$  и положим, что  $\psi(t)$  – непрерывная, конечное число раз дифференцируемая функция у которой отсутствуют точки разрыва. Данное условие всегда выполняется из-за конечности полосы пропускания ЛПП.

Выражение для полной фазовой функции запишем

$$\psi(t) = 2\pi f_1 t + \sum_{n=2}^N \frac{2\pi f_n t^n}{n!} + \varphi, \quad (13.1)$$

где  $f_1 \in [f_0 - F, f_0 + F]$  – несущая частота сигнала,  $f_0$  – центральная частота ЛПП,  $2F = f_0/l$  – полоса частот, занимаемая сигналом;  $l$  – величина, показывающая во сколько раз центральная частота ЛПП больше его полосы пропускания;  $f_n$  –  $n$ -я частота модуляции полной фазовой функции;  $2 \leq n \leq N$  – количество частот модуляции;  $f_1 \gg f_2, f_3, \dots, f_N$ .

Пусть параметрами, подлежащими определению, являются количество  $N$  и величины  $f_n$  в выражении (13.1) при условии, что сигнал

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } \operatorname{Re}\{\exp[j\psi(t)]\} > 0, \\ 0 & \text{при } \operatorname{Re}\{\exp[j\psi(t)]\} \leq 0. \end{cases}$$

В моменты времени перехода через нуль, которые соотношены с моментами времени  $t = m\Delta t$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , формируются отсчеты единичной амплитуды длительностью  $\tau < \Delta t < 1/2(f_0 + F)$ . Моменты появления отсчетов однозначно связаны с частотами модуляции  $f_n$ .

Тогда уравнение (13.1) в дискретной форме принимает вид

$$\psi(m\Delta t) = 2\pi(k+1) \sum_{n=1}^N p_n (m\Delta t)^n / n!, \quad (13.2)$$

где  $p_n = f_n/f_1$ ;  $p_1 = 1$ ;  $(k+1)$  – количество отсчетов, соответствующее частоте  $f_1$ .

В выражении (13.2) значение  $\varphi = 0$ , поскольку первый значащий отсчет всегда расположен в интервале  $[0, 2\pi]$ .

Учитывая, что информационные отсчеты отстоят друг от друга на интервал времени  $T = l\Delta t$  [96], вычисление конечных разностей произведем путем вычитания значений полной фазовой функции через эти интервалы времени. Это позволяет выполнить условия теоремы Котельникова. Отсюда следует, что частоты модуляции могут быть разделены, если отличаются на величину  $\Delta F = 1/NT$ . Положив без потери общности  $\Delta t = 1$ , формулы для конечных разностей запишем в виде [88]

$$\Delta\psi(m) = 2\pi k(k+1) \sum_{n=1}^N \frac{p_n m^n}{n!} - 2\pi(k+1) \sum_{n=1}^N \frac{p_n (m-1)^n}{n!};$$

$$\Delta^r \psi(m) = \frac{\Delta[\Delta \dots [\Delta\psi(m)] \dots]}{r \text{ раз}} =$$

$$= 2\pi(k+1) \left\{ \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \sum_{n=1}^N p_n \frac{(m-k)^n}{n!} \right\};$$

$$\Delta^N \psi(m) = 2\pi(k+1)p_N l^N = 2\pi(k+1)p_N T^N;$$

$$\Delta^{N+1} \psi(m) = 0.$$

Номер конечной разности, равной нулю, определяет количество частот модуляции, которых на единицу меньше.

С учетом того, что между конечными разностями  $n$ -го и  $(n+1)$ -го порядков есть соотношение

$$\Delta^N \psi(m) = 2\pi(k+1)p_N T^N + \gamma_n \Delta^{n+1} \psi(m) + \chi_n \sum_{n=1}^N \frac{\Delta^{n+1} \psi(m)}{T},$$

где  $\gamma_n$  и  $\chi_n$  числовые коэффициенты, получим

$$2\pi(k+1)p_N T^N = \Delta^N \psi(m);$$

$$2\pi(k+1)p_{N-1} T^{N-1} = \Delta^{N-1} \psi(m) + \gamma_{N-1} \Delta^N \psi(m) + \chi_n \sum_{n=1}^N \frac{\Delta^{n+1} \psi(m)}{T};$$

$$2\pi(k+1)p_1 T = \Delta\psi(m) - \gamma_1 2\pi(k+1)p_2 T^2 - \dots - \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{N-1} \Delta^N \psi(m) - \dots -$$

$$- \chi_1 \sum_{m=1}^N \chi_2 \sum_{m=1}^N \dots \chi_{N-1} \sum_{m=1}^N \frac{\Delta^N \psi(m)}{T^{N-1}}.$$

Поделив  $n$ -й результат в последней системе равенств на  $T^n$  найдем коды величин  $f_n - x$  частот модуляции на интервале времени  $T$ .



Анализ последнего выражения показывает, что для сигналов, фазовая функция которых является непрерывной и представлена в виде произведения экспоненциальных функций, использование бинарного представления информации в цифровой форме позволяет при помощи предложенного метода достаточно просто разделить частоты модуляции.

Применим рассмотренный метод для восстановления огибающей процесса для случая, когда входной сигнал представляет собой сумму экспоненциальных функций на примере частного случая суммы двух монохроматических сигналов

$$\tilde{x}(t) = E_1 \exp(j2\pi f_1 t) + E_2 \exp(j2\pi f_2 t). \quad (13.3)$$

При  $\frac{E_2}{E_1} = \alpha_E \ll 1$ ,  $0 < f_2 - f_1 = \Delta f \ll 0,5(f_1 + f_2)$  соотношения для огибающей и фазы колебания (13.3) примут вид [13]

$$E(t) = E_1 (1 + \alpha_E \cos 2\pi \Delta f t);$$

$$\psi_E(t) = 2\pi f_1 t + \alpha_E \sin 2\pi \Delta f t.$$

Разлагая функцию  $\sin 2\pi \Delta f t$  в ряд [63], с учетом конечности величины  $N$  и полагая  $p_0 = \Delta f / f_1$ , запишем

$$\psi_E(m) = 2\pi(k+1)m + \alpha_E \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n [2\pi(k+1)p_0 m]^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Величины конечных разностей для рассматриваемого случая будут следующими

$$\Delta \psi_E(m) \approx 2\pi(k+1)T + \alpha_E 2\pi(k+1)p_0 T \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n [2\pi(k+1)p_0(m-1)]^{2n}}{(2n+1)!};$$

$$\Delta \psi_E(m) \approx \alpha_E 2\pi(k+1)p_0 T^{2N+1}.$$

Учитывая, что первая производная синуса есть косинус, дискретную огибающую можно выразить как сумму разностей второго и более высокого порядков с добавлением кода, равного единице

$$\tilde{E}(m) = 1 + \alpha_E \sum_{n=2}^N \Delta^n \psi(m).$$

Как показано в [96], пропуская  $\tilde{E}(m)$  через фильтр с частотной характеристикой вида

$$H(f) = \begin{cases} \text{sign}(f) \pi(k+1)p_0 \exp(-j\pi/2) & |f| \in [f_0 - F, f_0 + F]; \\ 0 & |f| \notin [f_0 - F, f_0 + F]; \end{cases}$$

получаем на его выходе нормированную и восстановленную в непрерывном времени огибающую  $E(t)$ .

### 13.3. Метод измерения фазы бинарно-квантованных сигналов

(случай  $\psi(t) \equiv \mu_0 \equiv \varphi$ )

Представим выражение (13.1) в виде полинома

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \varphi + \frac{1}{1!} \frac{d\varphi}{dt} t + \frac{1}{2!} \frac{d^2\varphi}{dt^2} t^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3\varphi}{dt^3} t^3 + \dots = \\ &= \mu_0 + \mu_1 t + \frac{\mu_2 t^2}{2} + \frac{\mu_3 t^3}{6} + \dots = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \mu_i t^i, \end{aligned} \quad (13.4)$$

где  $\mu_0 = \varphi$  — начальная фаза или разность фаз двух когерентных колебаний;  $\mu_1 = \omega$  — несущая частота;  $\mu_2$  — девиация частоты;  $\mu_3$  — скорость девиации частоты.

Особенность алгоритмов оценки начальной фазы  $\varphi$ , в отличие от измерений других параметров  $\mu_i$  полной фазовой функции, является циклическая с периодом  $2\pi$ . Последнее приводит к решению задачи в виде построения достаточно сложного вычислителя, реализующего алгоритм вида [91]

$$\varphi = -\text{arctg} \frac{\text{Im} \tilde{x}}{\text{Re} \tilde{x}}, \quad (13.5)$$

где  $\text{Re} \tilde{x}$ ,  $\text{Im} \tilde{x}$  — действительная и мнимая квадратурные составляющие измеряемого сигнала.

При построении фазометров в виде счетчиков временных интервалов между пересечениями оси абсцисс, например, с положительной производной опорного и входного сигналов, можно достаточно простыми техническими средствами измерять фазу [1]. Однако при непосредственном усреднении результатов независимых измерений на интервале наблюдения возможно возникновение «грубых» ошибок при флуктуации отсчетов фазы вокруг точки «размыкания» окружности в линию, так как для циклической случайной величины разность порядка  $2\pi$  также мала, как и разность порядка нуля.

13.3.1. Рассмотрим итеративную шаговую процедуру для оценки фазы в режиме работы «скользящее» окно для сигналов, представленных в бинарно-квантованной форме [98].

Положим, для удобства анализа, что входное колебание представляет собой такой узкополосный процесс, что плотность вероятности  $W(\varphi)$  разности фаз опорного и входного колебаний цифрового фазометра на основе счетчика временных интервалов отлична от нуля в некотором секторе

$[\varphi_n, \varphi_n]$ , меньшем чем  $2\pi$ , и равна нулю вне его, причем центр этого сектора может находиться в любой точке окружности [99].

Пусть величина кода разности фаз в  $(i+1)$ -м испытании с выхода счетчика записывается в память усредняющего устройства в зависимости от кода, записанного в нем в  $i$ -м испытании по следующему правилу

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta[\varepsilon(\varphi_{i+1} - \varphi_n) - \varepsilon(\varphi_n - \varphi_{i+1})], \quad (13.6)$$

где  $\varphi_n, \varphi_{n+1}$  — коды разности фаз колебаний, запомненные в памяти усредняющего устройства в  $i$ -м и  $(i+1)$ -м испытаниях соответственно;

$\Delta = 2\pi/N$  — величина младшего разряда счетчика;  $N = 2^k$  — число состояний счетчика разрядности  $k$ , причем величине  $N$  соответствует величина  $\omega T = 2\pi$  опорного колебания;  $\omega$  и  $T$  — соответственно частота и период опорного колебания;

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0; \end{cases}$$

$\varphi_{i+1}$  — код фазы, полученный в результате  $(i+1)$ -го испытания;  $0 \leq n \leq N-1$ .

Таким образом, коды разности фаз записываемые последовательно в память усредняющего устройства в соответствии с алгоритмом (13.6), могут изменяться на величины  $-\Delta, 0, \Delta$  от испытания к испытанию и являются на интервале наблюдения реализацией дискретной цепи Маркова с  $N$  состояниями [100]. Очевидно также, что код в первом испытании записывается в память усредняющего устройства непосредственно с выхода счетчика.

Введем вероятности переходов:  $r_n$  — вероятность того, что код разности фаз в памяти усредняющего устройства в  $i$ -м и  $(i+1)$ -м испытаниях не изменился и равен  $\varphi_n$ ;  $q_n$  — вероятность того, что код разности фаз в  $(i+1)$ -м испытании увеличился на величину  $\Delta$  при записи в память усредняющего устройства по сравнению с кодом, записанным в ней в  $i$ -м испытании;  $s_n$  — вероятность того, что код разности фаз в  $(i+1)$ -м испытании уменьшился на величину  $\Delta$  при записи в память усредняющего устройства по сравнению с кодом, записанным в ней в  $i$ -м испытании.

Полная вероятность событий будет

$$r_n + q_n + s_n = 1.$$

Для определения финального распределения вероятностей  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_i$  необходимо знать начальные распределения вероятностей

$$\mathbf{P}_0 = (P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_{N-1}^{(0)})$$

разностей фаз входного и опорного колебаний, которые в данном случае могут быть приняты равновероятными, и матрицу вероятностей перехода  $\mathbf{P}_i$ , элементы которой определяются из графа состояний кодов разности фаз, построенного с учетом их цикличности. Вид графа изображен на рис. 13.1, причем узлы соответствуют значениям  $r_n$ , а ветви  $q_n$  и  $s_n$ . Полагем, что точке разрыва окружности в линию соответствует узел  $r_0 = r_N$ .

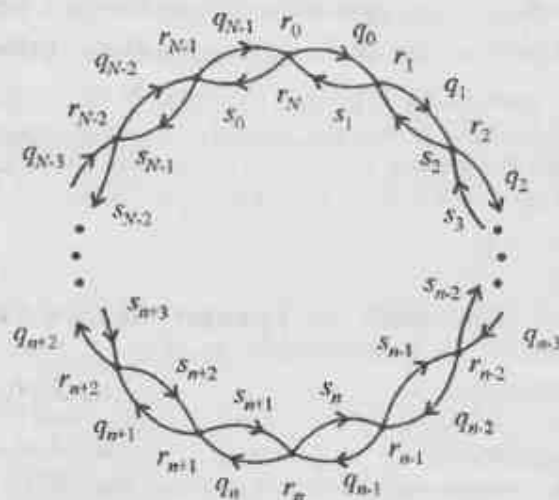


Рис. 13.1. Граф состояний кодов разности фаз

В случае перехода кода разности фаз через эту точку в любом направлении происходит смена знака, величины и индекса у кода разности, обрабатываемого в усредняющем устройстве по следующему правилу

$$\varphi(\text{mod}_N(N \pm n)) = -\varphi_n, \quad (13.7)$$

причем вероятности перехода будут  $q_{N-1} = q_{-1}, s_N = s_0$ .

Тогда матрица перехода  $\mathbf{P}_i$  примет вид

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} r_0 & q_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_0 \\ s_1 & r_1 & q_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & r_2 & q_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & s_{N-2} & r_{N-2} \\ q_{N-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (13.8)$$

Финальное распределение  $\mathbf{P} = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_{N-1})$  может быть определено путем решения системы  $N$  алгебраических уравнений [100], которая с учетом (13.7) и (13.8) будет

$$\left. \begin{aligned} q_{N-1}p_{N-1} + (r_0 - 1)p_0 + s_1p_1 &= 0; \\ q_0p_0 + (r_1 - 1)p_1 + s_2p_2 &= 0; \\ \dots &\dots \\ q_{N-2}p_{N-2} + (r_{N-2} - 1)p_{N-2} + s_0p_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.9)$$

Следует учесть, что в данном случае выполняется условие нормировки в виде

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{N-1} = 1,$$

причем  $p_0 = p_N = p_{-1} = p_{N-1}$ .

Из системы уравнений (13.9) с учетом (13.7) получаем

$$p_{n+1} = \frac{r_n q_n}{s_{n+1}}. \quad (13.10)$$

Очевидно, что если имеется один максимум у функции  $W(\varphi)$ , то он будет располагаться в точке, где выполняется условие

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{p_{n+1} - p_n}{\Delta} \rightarrow 0,$$

откуда из (13.10) получаем

$$q_n = s_{n+1}. \quad (13.11)$$

Величины  $q_n$  и  $s_n$  определяются из следующих выражений

$$q_n = \int_{\varphi_n}^{\varphi_0} W(\varphi) d\varphi, \quad s_n = \int_{\varphi_n}^{\varphi_n} W(\varphi) d\varphi.$$

Учитывая, что величина  $\Delta$  мала, а, следовательно,  $\varphi_{n+1} \approx \varphi_n \approx \varphi_c$ , из (13.11) окончательно получаем

$$\int_{\varphi_c}^{\varphi_0} W(\varphi) d\varphi = \int_{\varphi_c}^{\varphi_n} W(\varphi) d\varphi,$$

откуда наиболее вероятное значений разности фаз входного и опорного колебаний совпадает с медианой распределения плотности вероятности  $W(\varphi)$ . Поскольку не накладывалось ограничений на величину сектора, в котором располагается распределение плотности вероятности  $W(\varphi)$ , то при  $\varphi_c = \varphi_c + \pi$  и  $\varphi_n = \varphi_c - \pi$  получаем аналогичный результат, а следовательно,

но, исключаются «грубые» ошибки при усреднении и в случае, когда плотность непрерывна в интервале  $[0, 2\pi]$ .

На рис. 13.2 изображена структурная схема цифрового фазометра с марковской последовательностью циклических отсчетов, причем штриховой линией обведено усредняющее устройство.



Рис. 13.2. Структурная схема цифрового фазометра с марковской последовательностью циклических отсчетов

Работает устройство следующим образом. Из опорного колебания, умноженного в  $N$  раз в умножителе частоты на  $N$ , формируются сигналы, совпадающие во времени с моментом пересечения оси абсцисс входным процессом с положительной производной. Полученные сигналы поступают на счетный вход счетчика и на первый вход схемы «И».

Каждому началу периода опорного колебания соответствует запись нулей во все разряды счетчика с одновременной фиксацией этого момента в усредняющем устройстве, состоящем из блока анализа и управления записью кода в регистр, и памяти, в виде регистра.

По каждому началу периода опорного колебания код из регистра принимается в блок анализа и управления записью кода в регистр, где находится в течение периода опорного колебания. В момент совпадения на входах схемы «И» умноженного в  $N$  раз опорного сигнала и сигнала, сформированного из входного колебания в формирователе, с ее выхода поступает сигнал на управляющий вход блока анализа и управления записью кода в регистр. При этом код, поступающий с выходов счетчика, сравнивается в соответствии с алгоритмом (13.6) с учетом (13.7) с кодом, поступившим с выхода регистра, и, в

зависимости от результата сравнения, выдается код, записываемый в регистр. Одновременно этот код поступает на выход.

Далее работа устройства повторяется. После окончания переходного процесса на выходе усредняющего устройства будет находиться код, соответствующий наиболее вероятному значению разности фаз входного и опорного колебаний и совпадающий с медианой плотности распределения вероятностей  $W(\varphi)$ .

Проведем сравнительный анализ цифрового фазометра на основе счетчика временных интервалов, использующего только накапливающий сумматор в качестве усредняющего устройства [1] и рассмотренное устройство.

Пусть точка разрыва окружности в линию соответствует величине  $0 (2\pi)$  и наблюдаются флуктуации отчетов вокруг этой точки, причем на прямых выходах счетчика будут коды 0001, 0000, 1111, 0000, 0001, 0000, 1111, 0000. Непосредственное усреднение результатов дает код 0010, что соответствует  $\pi/2$  и является «грубой» ошибкой.

В анализируемом устройстве на регистре (и, соответственно, на выходе) будут появляться коды 0001, 0000, -0001, 0000, 0001, 0000, -0001, 0000, откуда код среднего значения будет 0000, что соответствует истинному значению разности фаз.

Таким образом, применение рассмотренной процедуры позволит избежать «грубых» ошибок в оценке разности фаз.

Рассмотренный метод оценки величин  $\varphi_c$  дает указанные результаты без наложения ограничений на вид плотности распределения вероятностей, что адекватно отсутствию ограничений на соотношение сигнал/шум на входе устройства.

13.3.2. Рассмотренная задача касалась оценки величины  $\varphi$  без наложения ограничений на отношение сигнал/шум на входе устройства.

В реальных условиях работы каких-либо систем, как правило задается отношение сигнал/шум на входе для обеспечения требуемой точности измерений. В этом случае могут быть использованы упрощенные методы измерения фазы при условии, что плотность распределения вероятности разности фаз занимает ограниченный сектор в диапазоне значений  $[0, 2\pi]$ .

Рассмотрим устройство оценки разности фаз, укрупненная структурная схема которого изображена на рис. 13.3 и которое подробно описано в [101].

Работает устройство следующим образом. Блок оценки и запоминания квадранта, в котором находилось значение разности фаз в предыдущем испытании и в который поступает информация о нахождении разности фаз в следующем испытании, оценивает информацию о совпадении или несовпадении номеров квадрантов в этих соседних испытаниях.

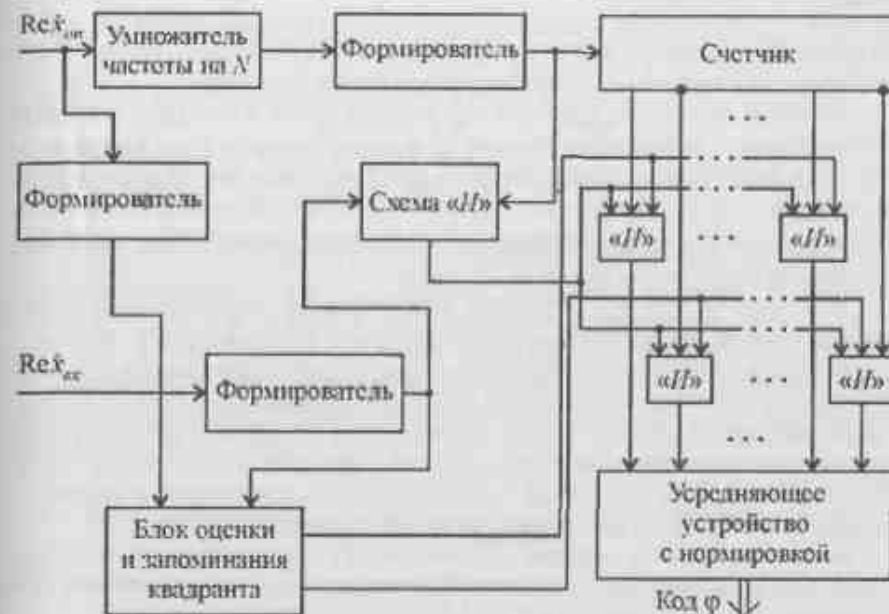


Рис. 13.3. Структурная схема устройства измерения разности фаз

Поскольку в качестве измерителя разности фаз используется счетчик временных интервалов, то первый и четвертый квадранты расположены вокруг точки разрыва «окружности» в линию.

В этом случае, величина и знак кода  $\varphi_{n+1}$ , который поступает на устройство усреднения с выхода счетчика временных интервалов, определяется согласно выражению

$$\varphi_{n+1} = \begin{cases} \varphi_{n+1}, & \text{если } \text{sign}[\varphi_{n+1}] = \text{sign}[\varphi_n], \\ 2\pi - \varphi_{n+1}, & \text{если } \text{sign}[\varphi_{n+1}] \neq \text{sign}[\varphi_n], \end{cases}$$

где  $\text{sign}[\varphi_n]$  – знак кода фазы, полученный в предыдущем испытании. Знаки равны, если величина фазы находилась соответственно в первом и втором, втором и третьем, или в третьем и четвертом квадрантах в соседних испытаниях. При переходе разности фаз из первого в четвертый или из четвертого в первый квадранты знаки кодов будут различны. Отметим, что блок оценки и запоминания квадранта подробно описан в [1].

Счетчик временных интервалов работает аналогично описанному ранее. Очевидно, что если отсутствует перескок фазы из первого в четвертый квадрант или наоборот, то происходит усреднение и нормирование непосредственно с выходов счетчика (положим, прямых). Если произошел перескок фазы из первого квадранта в четвертый квадрант или наоборот, то блок

оценки и запоминания квадранта подает разрешающий потенциал на те схемы «Н», которые по входу соединены с инверсными выходами счетчика временных интервалов. Усреднение производится аналогично.

Отметим, что как показано в [101], в соответствии с алгоритмом работы блока оценки и запоминания квадранта, данный фазометр позволяет исключить «грубые» ошибки измерения фазы при усреднении при ее флуктуациях в пределах  $\pm\pi/4$  относительно среднего значения, расположенного в секторе  $\pm\pi/4$ , что позволяет производить измерение разности фаз при отношениях сигнал/шум не менее 5.

13.3.3. Для проверки правильности рассмотренных теоретических положений было проведено машинное моделирование рассмотренных алгоритмов.

В соответствии с рассмотренными алгоритмами формировался входной процесс в виде сигнал+шум. Сигнал был с заранее заданной частотой и фазой. Сформированный входной процесс сравнивался с сигналом опорной частоты, фаза которого условно приравнивалась нулю. Измерялась разность фаз между входным процессом и опорным сигналом, которая возводилась в квадрат и усреднялась. При этом задавались отношения сигнал/шум  $q = 3$  и  $q = 10$ .

На рис. 13.4 – 13.6 изображены зависимости дисперсий ошибок от разности фаз входного «зашумленного» сигнала и опорного колебаний для различных алгоритмов обработки и отношений сигнал/шум.

На рис. 13.4 показаны зависимости дисперсии ошибки вычисления разности фаз на основе алгоритма (13.5).

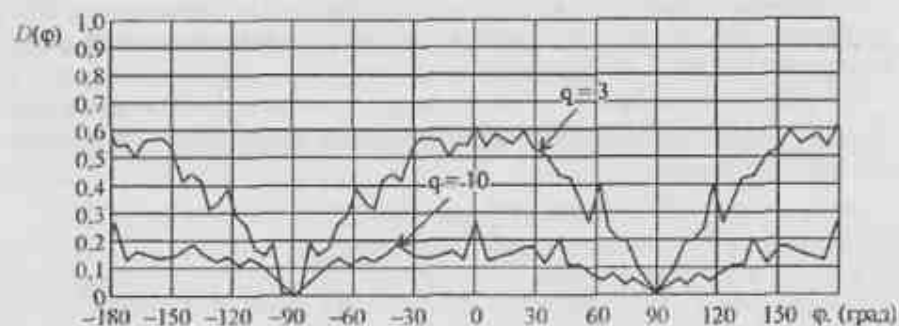


Рис. 13.4. Зависимости дисперсии ошибки вычисления разности фаз по алгоритму (13.5)

Анализ показывает, что при отношении сигнал/шум  $q = 3$  имеет место большее изменение величины дисперсии в диапазоне изменения разности фаз, чем для  $q = 10$ . Изменение величины дисперсии от значений разности фаз как для  $q = 3$ , так и для  $q = 10$  связано с нелинейностью функции арктангенса.

На рис. 13.5 изображены графики дисперсий ошибок цифрового фазометра для значений разности фаз от  $-\pi$  до  $\pi$  при  $q = 3$  и  $q = 10$  без учета квадранта, в котором находилась разность фаз в предыдущем испытании.

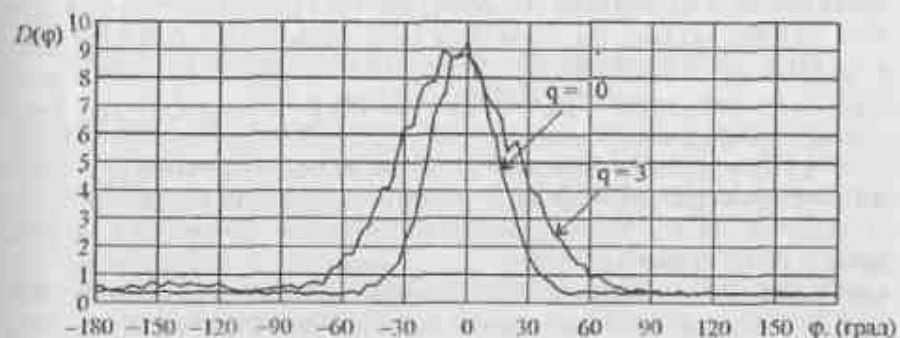


Рис. 13.5. Зависимости дисперсии ошибки вычисления разности фаз без учета квадрантов

Видно, что дисперсия ошибки измерения разности фаз в районе точки «разрыва» окружности в линию ( $\varphi = 0$ ) возрастает от  $\approx 30$  раз для  $q = 3$  и до  $\approx 100$  раз при  $q = 10$  относительно ее значений при  $\varphi = \pm\pi$ . В то же время видно, что для  $q = 3$  график дисперсии на уровне, близком 0,1, в два раза шире, чем для  $q = 10$ .

На рис. 13.6 изображены графики дисперсии ошибок цифрового фазометра в котором учитывается информация о расположении разности фаз в соответствующем квадранте при предыдущем и последующем испытаниях. Видно, что дисперсия ошибки примерно постоянна и сохраняет свои значения независимо от величины  $\varphi$ .

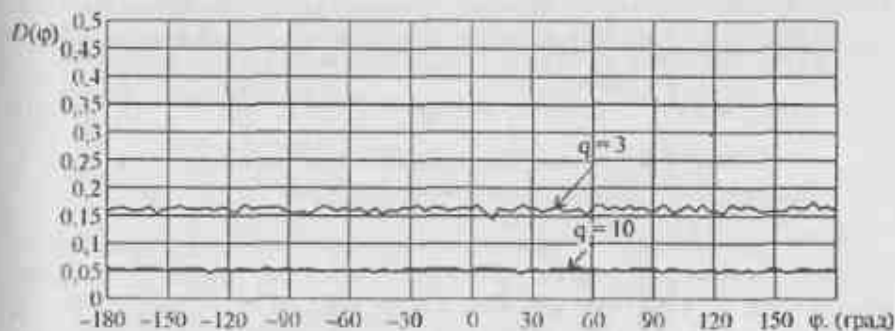


Рис. 13.6. Зависимости дисперсии ошибки вычисления разности фаз с учетом квадрантов

Также видно, что величина дисперсии ошибки зависит от отношения сигнал/шум на входе цифрового фазометра и минимальна для цифрового фазометра у которого учитывается информация о расположении разности фаз в соответствующем квадранте при проведении испытаний.

### 13.4. Особенности измерения частоты монохроматического сигнала (случай $\psi(t) = \mu_1 t = \omega t$ )

Известно, что в общем случае измерение неизвестной частоты сводится к отысканию максимума корреляционного интеграла во всем интервале всех возможных значений измеряемой частоты и технически реализуется либо при помощи параллельных либо последовательных анализаторов спектра, либо их комбинации [1, 13, 15].

Решение задачи определения в полной фазовой функции (13.4) величины  $\mu_1$  (при этом параметр  $\mu_0 = \varphi$  является несущественным, а  $\mu_2 = \mu_3 = \dots = 0$ ), может быть найдено из уравнения конечной разности, если представить исходную фазовую функцию в виде

$$\psi(m\Delta t) = \mu_1(m\Delta t) = 2\pi(k+1)p_1(m\Delta t). \text{ Видно, что здесь } \mu_1 = 2\pi(k+1)p_1,$$

а величина  $p_1 = 1$ . Тогда первая конечная разность имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\psi(m\Delta t) &= 2\pi(k+1)(m\Delta t) - 2\pi(k+1)((m-1)\Delta t) = \\ &= 2\pi(k+1)\Delta t = 2\pi(k+1)T = \mu_1 T, \end{aligned}$$

где  $T = 1\Delta t$  – интервал анализа;  $k$  – количество отсчетов, соответствующее неизвестной частоте

$$\mu_1 = 2\pi(k+1) = \Delta\psi(m\Delta t)/T.$$

Из последнего уравнения видно, что первая конечная разность полной фазовой функции, деленная на интервал анализа  $T$ , соответствует величине  $\mu_1$ .

Очевидно, что  $\Delta^2\psi(m\Delta t) = 0$ . На рис. 13.7 изображен график вычисления первой конечной разности, величина которой соответствует измеряемой частоте.

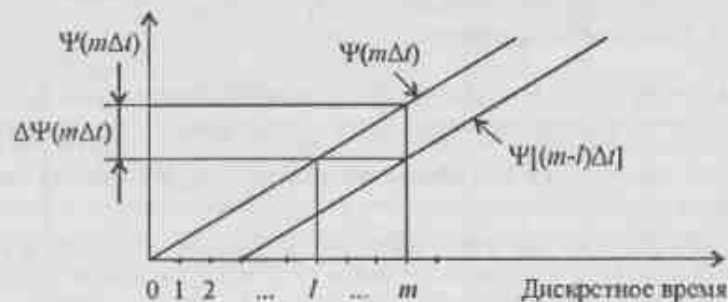


Рис. 13.7. График вычисления первой конечной разности

Структурная схема устройства, реализующего указанный метод, изображена на рис. 13.8.

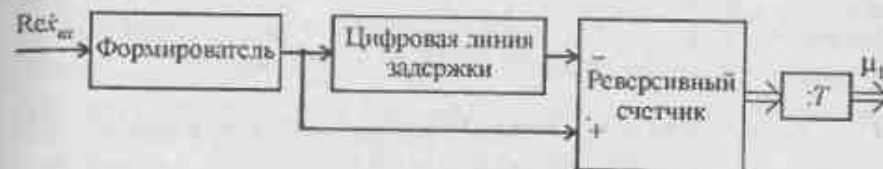


Рис. 13.8. Структурная схема устройства вычисления кода частоты

Отметим, что данное устройство является аналогом цифрового частотомера.

Отличие в том, что цифровой частотомер производит измерение в режиме работы «скачущее» окно, в то время как данное устройство – в режиме работы «скользящее» окно.

Математическое ожидание неизвестной частоты при использовании данного метода совпадает с самой частотой, то есть  $\bar{f} = f_{сигн}$ , а дисперсия оценок выражается в виде [96]

$$\sigma^2 = \overline{(f - f_{сигн})^2} = \left[ \frac{N_0}{E^2(t)T} \frac{12}{T^2} \right] \frac{2FT}{q}$$

где  $q^2 = \frac{E^2(t)}{2N_0 2F} \gg 1$  – отношение сигнал/помеха.

В данном соотношении выражение в квадратных скобках соответствует теоретически предельной точности. Такой измеритель частоты при сильном по мощности сигнале имеет точность близкую к теоретически предельной [96].

Часто требование  $q^2 \gg 1$  является обременительным. Однако высокую точность можно получить и при  $q^2 \approx 1$ , если выполняется условие  $q^2 2FT \gg 1$  (за счет увеличения времени анализа).

В частности, точность, близкая к предельной, достигается для  $q^2 = 5-7$  при  $2FT = 200$ . Следовательно, более высокая точность при заданных величинах  $q^2$  и  $2F$  достаточно просто достигается при увеличении времени измерения  $T$ .

Достоинством такого измерителя является простота, а недостатком – невозможность измерения в случае наличия на входе аддитивной суммы монохроматических сигналов.

### 13.5. Измерение частоты узкополосного сигнала цифровыми частотными дискриминаторами

В тех случаях, когда частота сигнала велика, а сам сигнал представляет собой узкополосное колебание, удовлетворяющее условно близости по характеристикам к гармоническому колебанию, целесообразно использовать предварительное преобразование частоты вниз, как, например, в устройстве, основанном на изложенном методе и описанном в [15], и которое представляет собой цифровой частотный дискриминатор (ЦЧД), в котором операции обработки сигналов производятся на относительно низкой частоте.

13.5.1. Как известно, ЦЧД относится к устройствам оценки параметров сигналов, т.е. к цифровым измерителям. При этом оцениваемый параметр сигнала в виде его частоты  $\omega$  может быть как постоянным на интервале наблюдения, так и изменяющимся. Поскольку измерение частоты производится ограниченное время и происходит на фоне шумов и помех, то задача измерения частоты сигнала является стохастической. Оптимальное решение такой задачи ищется методами теории статистических решений – так называемой теории оценивания параметров. Хотя термины «оценивание» и «измерение» сходны, первый применяется при решении математических задач, а второй – при решении задач синтеза и анализа технически реализуемых устройств [102].

При решении задач оптимального оценивания параметров сигналов возможны два основных подхода [103].

1. Измеряемый параметр  $\omega$  (частота) считается случайной величиной с априорной плотностью распределения вероятностей  $W(\omega)$ . В этом случае при синтезе и анализе устройства можно использовать байесов подход.

2. Параметр  $\omega$  считается неслучайной величиной. В этом случае плотность распределения вероятностей наблюдений  $W(U/\omega)$  рассматривается как функция неслучайного параметра  $\omega$  – так называемая функция правдоподобия  $L(\omega) = W(U/\omega)$ , где  $U = \text{Re} \dot{U}(t) = \text{Re}[\dot{s}(t) + \dot{n}(t)]$  – наблюдаемая реализация,  $\dot{s}(t) = E \exp[j(\omega t + \varphi)]$  – полезный сигнал;  $\varphi$  – начальная фаза;  $\dot{n}(t)$  – «белый» шум. Здесь можно использовать метод максимального правдоподобия.

Рассмотрим случай (рис. 13.9), когда параметр  $\omega$  постоянен на интервале наблюдения и является неслучайной величиной. Иными словами, устройство оценки должно формировать величину  $\omega = \omega_0$ , соответствующую выполнению условия  $L(\omega) = \max$ .

Нахождение максимума функции правдоподобия может быть технически осуществлено двумя путями.

1. Построение многоканальной системы в виде набора полосовых фильтров (неследящий измеритель) с заданными полосами пропускания, перекрывающих априорный диапазон нахождения частоты сигнала, и сравнения выходных эффектов каналов между собой. Поскольку выходные эф-

фекты каналов не нормированы и изменяются в большом динамическом диапазоне, то появляется трудности при построении решающего устройства. Кроме того, существенны затраты оборудования при построении многоканального устройств.

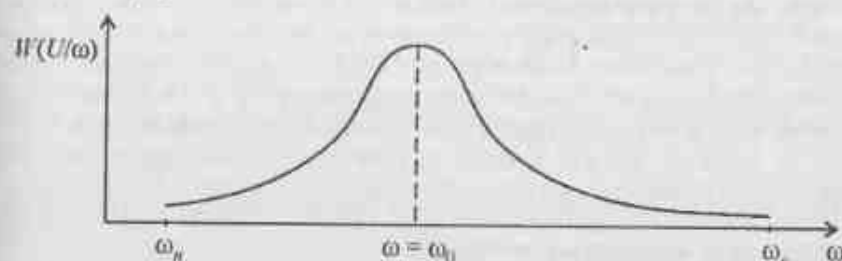


Рис. 13.9. Пример расположения плотности распределения вероятности параметра  $\omega$  на априорном интервале  $[\omega_n, \omega_e]$

2. Второй путь решения задачи заключается в том, что для определения максимума логарифма функции правдоподобия необходимо решить систему уравнений вида [1, 104]

$$\left. \frac{d[\ln W(U/\omega)]}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = 0 \quad \text{при} \quad \left. \frac{d^2[\ln W(U/\omega)]}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} < 0.$$

В этом случае оценка параметра производится не по максимуму выходного эффекта, а по прохождению его через нулевой уровень. Операция логарифмирования позволяет упростить структуру измерителя, поскольку для непрерывных плотностей (аналоговые дискриминаторы) отпадает необходимость формирования показательной функции, а для дискретного распределения (цифровые дискриминаторы) не нужна операция возведения в степень.

Оценим структуру оптимального дискриминатора [1]. Разложим функцию  $\ln W(U/\omega)$  в ряд Тейлора в окрестности ее максимума  $\omega_0$  и ограничимся тремя членами этого ряда

$$\ln W(U/\omega) \approx \ln W(U/\omega) \Big|_{\omega=\omega_0} + (\omega - \omega_0) \left. \frac{d[\ln W(U/\omega)]}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \left. \frac{d^2[\ln W(U/\omega)]}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}$$

Подставляя это соотношение в уравнение для поиска максимума  $d[\ln W(U/\omega)]/d\omega = 0$ ,

в предположении, что третья производная равна нулю, находим

$$\begin{aligned} \frac{d[\ln W(U/\omega)]}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} \left[ \ln W(U/\omega) \Big|_{\omega=\omega_0} + (\omega - \omega_0) \frac{d[\ln W(U/\omega)]}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \frac{d^2[\ln W(U/\omega)]}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} \right] = \\ &= 2 \frac{d[\ln W(U/\omega)]}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} + 2(\omega - \omega_0) \frac{d^2[\ln W(U/\omega)]}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} = 0. \end{aligned}$$

Из последнего равенства видно, что оценка  $\omega = \omega_0$  максимального правдоподобия определяется уравнением

$$\omega = \omega_0 = \frac{\frac{d[\ln W(U/\omega)]}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0}}{\frac{d^2[\ln W(U/\omega)]}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0}}$$

Дискриминационная характеристика получается из последнего выражения

$$D(U/\omega) = \omega - \omega_0 = \frac{\frac{d[\ln W(U/\omega)]}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0}}{\frac{d^2[\ln W(U/\omega)]}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0}}$$

Обозначая

$$\frac{d[\ln W(U/\omega)]}{d\omega} = A, \quad \frac{d^2[\ln W(U/\omega)]}{d\omega^2} = B$$

структурную схему оптимального дискриминатора представим в виде, изображенном на рис. 13.10.

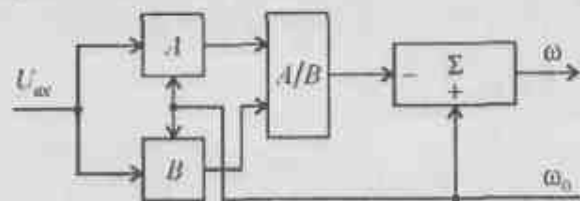


Рис. 13.10. Структурная схема оптимального дискриминатора

Блок *A* формирует собственно функцию рассогласования, блок *B* регулирует коэффициент усиления в зависимости от мощности, поступающей на вход смеси сигнала с шумом. Поэтому блок *A* называют дискриминатором,

а блок *B* – блоком точности. Наличие блока точности в структуре оптимального дискриминатора отличает его от реальных, находящихся применение в схемах, следящих измерителей.

В реальных частотных дискриминаторах (ЧД) техническая реализация операции, присущей блоку точности, выполняется либо схемами автоматической регулировки усиления (поскольку знак второй производной функции противоположен знаку самой функции, а их максимумы совпадают в одной точке), либо, что наиболее часто выполняется вследствие технической простоты в реализации, при помощи «жесткого» ограничения по амплитуде входной смеси. Последнее делает ЧД одноканальным.

На рис. 13.11 изображены примерные формы дискриминационной (Выход *A*) и точностной (Выход *B*) характеристик оптимального дискриминатора.

13.5.2. В аналоговом исполнении существует ряд частотных дискриминаторов (детекторов) – дискриминатор на одном контуре (простейший), дискриминатор на расстроенных контурах, дискриминатор с контуром и фазовращателем (автокорреляционного типа), дискриминатор со смесителями и дифференцированием, частотный дискриминатор отношений, частотный дискриминатор с двумя связанными контурами [105].

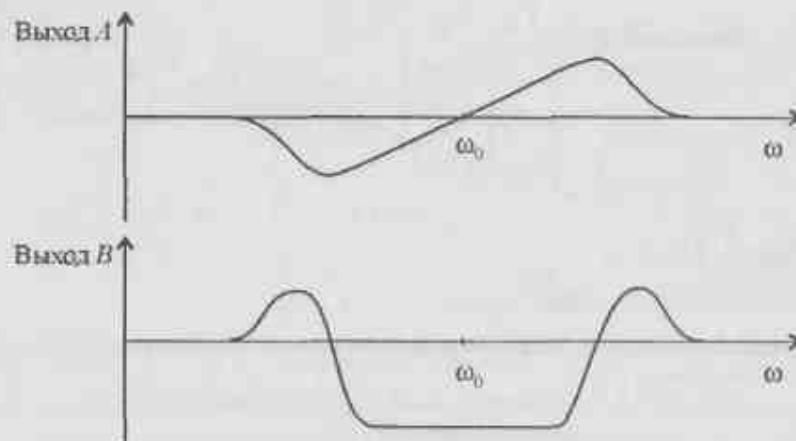


Рис. 13.11. Характеристики каналов оптимального дискриминатора

Особенностью работы всех указанных видов дискриминаторов является предварительное преобразование информации, заключенной в частоте принимаемого сигнала, в амплитуду за счет свойств, присущих частотно-избирательным цепям, и последующего выделения отгибающей, величина которой пропорциональна отклонению от номинальной частоты  $\omega_0$ . Этой частоте, называемой переходной частотой, соответствует нуль дискриминационной характеристики.



В ЦЧД также могут использоваться цифровые частотно-избирательные цепи, например в виде цифрового эквивалента аналогового дискриминатора на расстроенных контурах [1]. Однако такая техническая реализация заданной дискриминационной характеристики требует существенных затрат оборудования и достаточно сложно реализуема.

Наиболее простыми в технической реализации с одновременным обеспечением высоких характеристик являются ЦЧД, выполненные на основе счетчиков бинарно-квантованных отсчетов полной фазовой функции сигнала.

В том случае, когда начальный и конечный моменты времени при измерении частоты известны, то такой режим работы носит название «скачущее» окно [105]. При этом результат измерения появляется после окончания работы устройства. В качестве примера, реализующего ЦЧД на указанном принципе, может быть предложена структурная схема, изображенная на рис. 13.12.

Данное устройство подсчитывает число пересечений нулевого уровня входным процессом частоты  $f$  за интервал времени  $T$ . Интервал времени счета  $T$  определяется импульсами начала и конца, которые управляют триггером  $T_z$ . Потенциал, разрешающий счет, поступает с выхода триггера  $T_z$  на один из входов схемы  $H$ .



Рис. 13.12. Структурная схема ЦЧД для режима работы «скачущее» окно

На второй вход этой схемы  $H$  поступают сформированные в блоке формирования импульсов сигналы, совпадающие по времени, положим, с положительной производной входного процесса, пересекающего ось абсцисс. Эти импульсы записываются в счетчик импульсов, в который на предыдущем интервале измерения занесено число  $N_0$  в дополнительном коде и величина которого соответствует переходной частоте  $f_0$ . В зависимости от того, величина  $N$  больше или меньше  $N_0$ , через вентили съема выдается число либо в прямом коде, если  $\Delta N = N - N_0$  положительно, либо в допол-

нительном, если  $\Delta N$  отрицательно. Линия задержки нужна для того, чтобы съем информации с выходов счетчика импульсов производился после окончания в нем переходных процессов. Отметим также, что здесь не эффективно используется емкость счетчика импульсов. Кроме того, возникают трудности при измерении высокочастотных сигналов.

Рассмотренный ЦЧД может успешно находить применение в случаях, когда допускается прерывистое (скачкообразное) измерение неизвестной частоты.

13.5.3. В тех случаях, когда подобный режим работы недопустим, применим ЦЧД, структурная схема которого изображена на рис. 13.13.

Очевидно, что в этой схеме линия задержки выполняет роль вычислителя временного интервала, равного величине  $T$ . Однако к недостаткам этого устройства следует отнести то, что отсутствует возможность определения знака расстройки входной частоты  $f$  относительно переходной частоты  $f_0$ . В то же время, в этом ЦЧД полностью используется емкость реверсивного счетчика. Полученный код разностной частоты поступает на ЦАП, где преобразуется в аналоговое напряжение.



Рис. 13.13. Структурная схема ЦЧД с непрерывным съемом информации

Для расширения диапазона измерения частоты  $f$  в два раза при сохранении прежней емкости счетчика используют следующее свойство сигнала разностной частоты  $\Delta f$ . Представим входной сигнал  $\hat{x}(t)$  в виде вектора, вращающегося с разностной частотой  $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$  вокруг точки 0, как показано на рис. 13.14,а.

Из рис. 13.14,а видно, что в том случае, когда входная частота  $f$  входного сигнала  $\hat{x}(t)$  выше переходной частоты  $f_0$  гетеродина, вектор вращается против часовой стрелки с разностной угловой скоростью  $\Delta\omega = +2\pi\Delta f$  (сплошная стрелка). В том случае, когда частота  $f$  входного сигнала  $\hat{x}(t)$

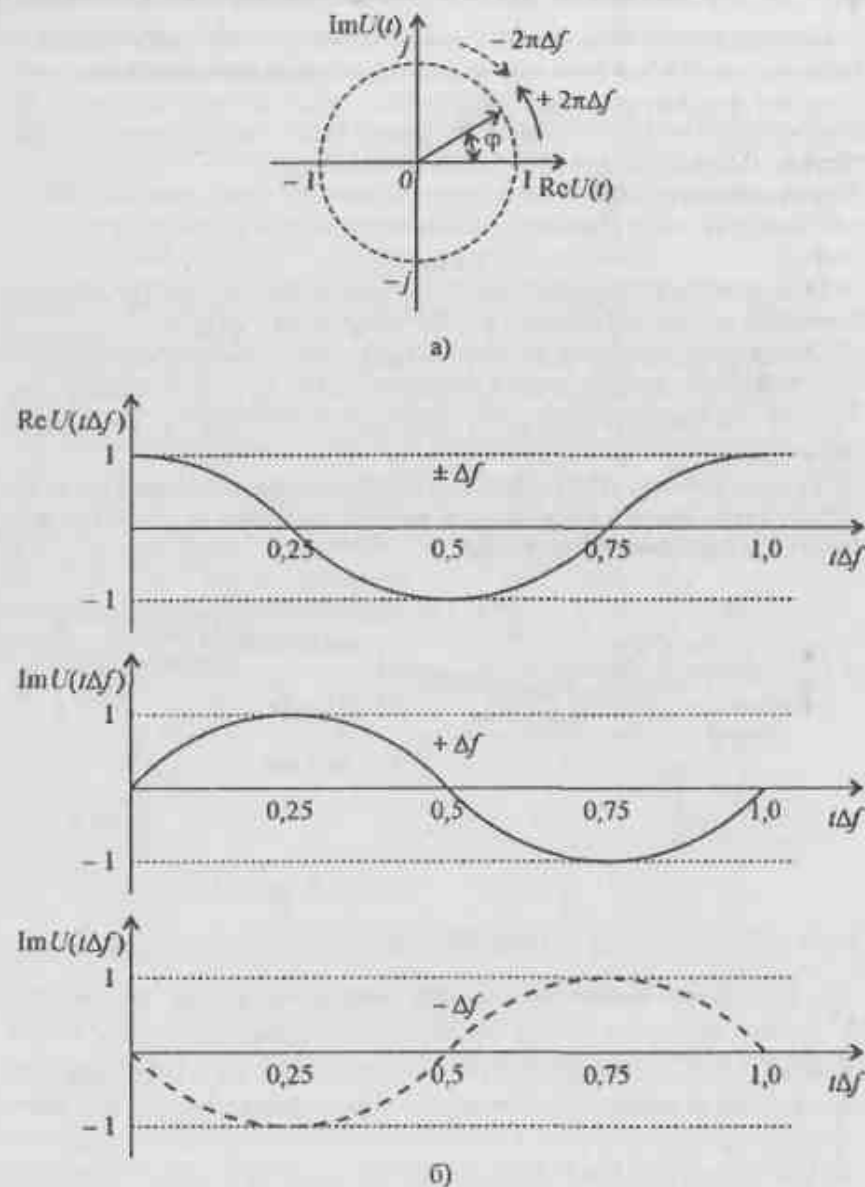


Рис. 13.14. Представление входного монохроматического сигнала в виде вращающегося вектора

ниже переходной частоты гетеродина  $f_0$ , вектор вращается по часовой стрелке с угловой скоростью  $\Delta\omega = -2\pi\Delta f$  (пунктирная стрелка).

При представлении этого вектора в декартовой системе координат, как видно из рис. 13.14,б, можно определить направление его вращения, т.е. знак расстройки частоты  $\Delta f$  входного сигнала относительно переходной частоте гетеродина  $f_0$ . Видно, что когда  $\Delta f$  соответствует случаю превышения частоты входного сигнала  $f$  переходной частоты гетеродина  $f_0$ , мнимая компонента отстает от действительной на  $\pi/2$ , а в обратном случае - опережает на  $\pi/2$ . Следовательно, если поставить устройство фазового различения квадратурных компонент разностного сигнала  $\Delta f$ , то можно определить знак расстройки - например, если частота  $f$  входного сигнала выше переходной частоты гетеродина  $f_0$  - то знак положительный, в противном случае - отрицательный.

Очевидно, что при  $\Delta f = 0$  знак не определен и может быть как положительным так и отрицательным.

На рис. 13.15 изображена структурная схема устройства определения знака расстройки частоты  $f$  входного сигнала  $x(t)$ , поступающего с выхода УПЧ, относительно переходной частоты гетеродина  $f_0$ .

13.5.4. Вследствие того, что линия задержки бинарных сигналов выполняется на различного рода сдвиговых регистрах, т.е. является цифровой линией задержки (ЦЛЗ), управляемой блоком формирования синхроимпульсов, а время появления сигналов на выходе блока формирования импульсов произвольно, то необходимо применение схемы синхронизации асинхронно поступающих входных сигналов в виде сформированных импульсов с синхронно работающей ЦЛЗ.

Эта схема должна устанавливаться сразу после блока формирования импульсов. При этом частота синхроимпульсов (СИ) должна либо превышать, либо быть равной максимальной разностной частоте  $\Delta f$  анализируемого сигнала. Следует стремиться к понижению частоты СИ, поскольку это позволяет достичь максимального времени задержки в ЦЛЗ при заданных ограничениях на затраты оборудования. Требование максимизации  $T$  связано с тем, что его увеличение приводит к увеличению крутизны дискриминационной характеристики ЦЧД. Поскольку для монохроматического сигнала  $\psi(m\Delta t)$  есть линейная функция, то  $T$  может выбираться необязательно из условия выполнения ее равенства  $1/\Delta f$ , а может и превышать ее.



Рис. 13.15. Структурная схема блока определения знака расстройки  $\Delta f$



Рис. 13.16. Структурная схема ЦЧД с непрерывным съемом информации (режим работы «скользящее» окно)

Это связано с тем, что для линейных функций величина дифференциала и первой конечной разности равны друг другу. С учетом вышесказанного, структурная схема ЦЧД принимает вид, изображенный на рис. 13.16 [106, 107]. Количество разрядов ЦАП определяет емкость реверсивного счетчика, а частота СИ, выбираемая из условий выполнения теоремы Котельникова, определяет

максимально возможную величину разностной частоты  $F = \Delta f_{max}$ . Следовательно, вес одного разряда в Гц можно определить из условия  $\delta f = F/\Delta N$ ,

где  $N = 2^n$ ,  $n$  – число разрядов счетчика.

Поскольку при плавном изменении входной частоты изменение кода на выходе реверсивного счетчика происходит дискретно, то дискриминационная характеристика имеет ступенчатый характер, в отличие от идеальной, имеющей линейный характер. На рис. 13.17 изображены дискриминационные характеристики. Видно, что определенному частотному диапазону  $\delta f$  соответствует одно значение напряжения  $U_{max}$  для реальной дискриминационной характеристики того или иного ЦЧД.

Очевидно, что всегда существует погрешность в оценке частоты сигнала, которая может быть оценена следующим образом. Полагая, что на идеальную дискриминационную характеристику накладываются шумы, имеющие определенные статистические характеристики, искажающие выходной процесс так, что свойства его на выходе идеальной дискриминационной характеристики и дискриминационной характеристики ЦЧД совпадают.

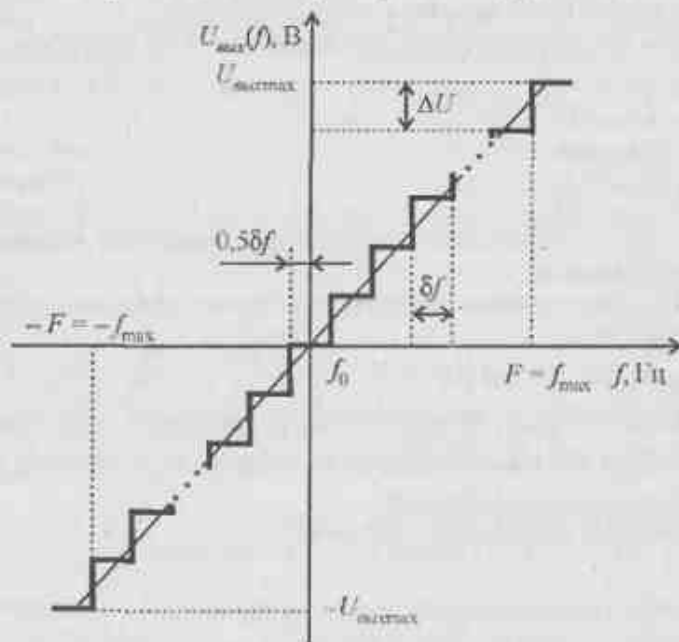


Рис. 13.17. Идеальная (прямая) и реальная (ступенчатая) дискриминационные характеристики

Из рис. 13.17 видно, что точное значение  $U_{\text{вых}}(f)$  соответствует середине интервала  $\delta f$ . Следовательно, можно полагать, что математическое ожидание этого шума равно нулю. С другой стороны, нахождение частоты в любой точке этого интервала – равновероятно, откуда выражение для плотности распределения вероятностей ошибки может быть записано в виде

$$W(f) = 1/\delta f.$$

С учетом того, что математическое ожидание равно нулю, а критерием точности является среднеквадратическая величина

$$\sigma_f = \sqrt{D_f},$$

где  $D_f$  – дисперсия частоты, то имеем

$$\sigma_f = \sqrt{\int_{-\delta f/2}^{\delta f/2} f^2 W(f) df} = \sqrt{(\delta f)^2/12} = \delta f/3,47 \approx 0,29 f \text{ Гц}.$$

Анализ вида дискриминационной характеристики ЦЧД показывает ее отличие от дискриминационной характеристики аналоговых частотных детекторов, которое состоит в том, что при превышении частоты входного сигнала диапазона  $F$  ее величина остается постоянной.

Крутизна дискриминационной характеристики ЦЧД описывается выражением

$$S_{\text{ЦЧД}} = \begin{cases} 0 & \text{при } \Delta f < -F; \\ K & \text{при } \Delta f \leq F; \\ 0 & \text{при } \Delta f > F, \end{cases}$$

где  $K = \Delta U/\delta f$  – коэффициент, характеризующий крутизну дискриминационной характеристики.

Максимальное значение напряжения на выходе ЦЧД определяется согласно выражению

$$U_{\text{вых max}} = \Delta U/\Delta N = \Delta U/2^n.$$

Как правило,  $U_{\text{вых max}}$  задается исходя из требований, предъявляемых к ЦЧД, стоящими на его выходе узлами. В случае их отсутствия  $U_{\text{вых max}}$  определяется характеристиками ЦАП.

Относительная погрешность измерения

$$\varepsilon_f = \delta f/\Delta f$$

увеличивается при приближении  $f$  к переходной частоте  $f_0$ .

В то же время абсолютное значение погрешности измерения  $\delta f$  зависит от диапазона анализа  $F$  и числа разрядов  $n$  в ЦЛЗ и реверсивном счетчике. Следовательно, уменьшение погрешности измерения  $\delta f$  можно достичь

путем увеличения числа разрядов  $n$  в ЦЛЗ и реверсивном счетчике или уменьшением  $F$ .

При фиксированной величине числа разрядов  $n$  можно использовать следующий подход для уменьшения величины  $\delta f$ .

Очевидно, что при использовании ЦЧД в системе автоподстройки частоты наиболее высокая точность требуется при приближении частоты сигнала к переходной частоте. С другой стороны, точность зависит от диапазона анализа, поскольку с его уменьшением уменьшается  $\delta f$ . Тогда повышение абсолютной точности измерения  $\delta f$  частоты можно получить, увеличивая время задержки в ЦЛЗ, что эквивалентно уменьшению величины  $F$ . Последнее достаточно просто может быть реализовано путем понижения частоты СИ, поступающих в ЦЛЗ. В этом случае количество разрядов  $n$  приходится на меньший диапазон частот  $F$ , абсолютная погрешность  $\delta f$  меньше. Одновременно увеличивается крутизна дискриминационной характеристики.

При удалении входной частоты  $f$  от переходной  $f_0$  возрастает разностная частота  $\Delta f$ . Для того, чтобы избежать выхода на горизонтальный участок дискриминационной характеристики, необходимо увеличить частоту СИ, что приводит к увеличению  $F$ , увеличению  $\delta f$  и уменьшению  $K$  (крутизны характеристики).

Управление величиной  $K$  в принципе может осуществляться как вручную, так и автоматически с одновременной индикацией его значения [107].

При использовании ЦЧД в радиотехнических системах процесс измерения происходит при воздействии на измеряемый сигнал тех или иных видов шумов. В качестве «универсального» шума, который присутствует при любых измерениях, является «белый» шум.

Очевидно, что во входной процесс в виде аддитивной смеси сигнала и «белого» шума, который поступает на ЦЧД, добавляется шум, связанный со ступенчатым характером дискриминационной характеристики. Для оценки влияния входного «белого» шума на точность измерения положим, что величина погрешности, связанная с дискретностью дискриминационной характеристики, пренебрежимо мала.

Как показывает анализ, при больших отношениях по мощности сигнал/шум,  $q^2 = (U_c/U_w)^2 = P_c/P_w \gg 1$ , точность измерения частоты рассматриваемого ЦЧД приближается к теоретически предельной. Отметим, что требование иметь сильный полезный сигнал является в ряде случаев обременительным для обеспечения заданной точности измерения. Приближенно точность оценки частоты от соотношения сигнал/шум по мощности определяется согласно [96]

$$\sigma_{f_{pc}}^2 / f_{pc} = (12/q^2 T^3)(2FT/6),$$

где выражение в квадратных скобках показывает соотношение для теоретически предельного случая.

Для обеспечения высокой точности измерений достаточно, чтобы энергетическое соотношение сигнал/шум  $\mu$  было больше единицы. Поскольку величина  $\mu = q^2 2FT$ , то при заданных величинах  $q^2$  и  $F$  получение заданной точности, как указывалось, может достигаться за счет увеличения величины  $T$ .

Таким образом, увеличение времени анализа, сопровождающееся ростом крутизны  $K$ , уменьшением погрешностей, связанных с неидеальностью дискриминационной характеристики, позволяет увеличить либо точность оценки частот сигнала, принимаемого в смеси с «белым» шумом, либо производить измерение с заданной точностью при малых отношениях сигнал/шум. Данное обстоятельство и определяет необходимость перестройки параметров ЦЧД при приближении измеряемой частоты к переходной частоте, т.е. при стремлении  $\Delta f$  к нулю.

### 13.6. Адаптивный цифровой частотный дискриминатор

При решении задач измерения частоты узкополосного сигнала, принимаемого в аддитивной смеси с «белым» шумом, находят применение, как указывалось, непараметрические и параметрические методы. Непараметрические методы используют для измерения параллельные анализаторы спектра, а параметрические решают указанные задачи при применении тех или иных видов частотных дискриминаторов (ЧД) [102–105]. Особенностью этих ЧД является то, что их дискриминационная характеристика, имеющая линейный характер в заданном диапазоне частот, может быть описана в виде функции, представляющей собой первую производную отгибающей энергетического спектра анализируемого сигнала, форма которого описывается параболой [104].

В случае оценки центральной частоты симметричного энергетического спектра сигнала, принимаемого на фоне «белого» шума и остатков коррелированной помехи, возникает ошибка смещения в оценке этой частоты [108]. Аналогично возникает ошибка смещения на выходе ЧД с указанной дискриминационной характеристикой в случае, когда полезный сигнал имеет несимметричную форму энергетического спектра [109]. Указанные ошибки смещения не могут быть устранены путем применения дальнейшей фильтрации получаемых результатов.

Использование рассмотренного в [106, 107] ЦЧД позволяет получать дискриминационную характеристику с переменной крутизной, что обеспечивает одновременно с большим частотным диапазоном анализа высокую

точность получаемых оценок центральной частоты полезного сигнала, принимаемого на фоне «белого» шума. Предложенный в [110, 111] ЦЧД, названный адаптивным (АЦЧД), дает возможность одновременно с обеспечением большого частотного диапазона анализа и высокой точности измерения выполнить компенсацию ошибок смещения центральной частоты энергетического спектра полезного сигнала при произвольных его формах, принимаемого на фоне «белого» шума и остатков коррелированной помехи.

Увеличенная структурная схема АЦЧД, в основе работы которого лежит алгоритм вычисления первой конечной разности полной фазовой функции анализируемого сигнала, изображена на рис. 13.18.



Рис. 13.18. Увеличенная структурная схема адаптивного цифрового частотного дискриминатора

Устройство работает следующим образом. На вход амплитудного ограничителя поступает колебание с частотой  $f$ , которое усиливается до необходимого уровня, ограничивается по амплитуде и поступает на вход формирователя импульсов, представляющего собой триггер Шмидта. На его выходе формируются прямоугольные импульсы с частотой входного колебания и с логическими уровнями используемой цифровой элементной базы. Полученные импульсы поступают на сигнальный вход формирователя квадратурных каналов, на опорный вход которого подается колебание переходной частоты  $f_0$  с выхода генератора опорного сигнала. Квадратурные каналы, как ука-

зывается, необходимы для определения знака расстройки частоты входного сигнала относительно опорного.

С выходов формирователя квадратурных каналов импульсы разностной частоты  $\Delta f = f - f_0$  поступают на вход блока подавления «дребезга», в котором происходит частичное устранение краевых искажений у импульсов и «дребезга» их фронтов, возникающих из-за воздействия шумов на входе АЦЧД.

С выходов блока подавления «дребезга» импульсы разностной частоты  $\Delta f$  поступают на входы блока определения знака расстройки и на сигнальный вход блока вычисления кода разностной частоты. Определение знака расстройки основано на использовании явления скачкообразного изменения фазы на величину, равную  $\pi$ , между импульсами на выходах формирователя квадратурных каналов при переходе входной частоты  $f$  через переходную частоту  $f_0$ . В блоке определения знака расстройки производится усреднение во времени полученных результатов для уменьшения вероятности ошибки определения знака.

Сигнал управления крутизной дискриминационной характеристики формируется в блоке управления, содержащем делитель частоты с изменяемым коэффициентом деления и формирователь синхронимпульсов, которые вырабатываются из сигнала опорной частоты. Коэффициент деления делителя частоты зависит от кода крутиzny дискриминационной характеристики, который подается с выхода блока переключения ее крутиzny. Импульсы тактовой частоты с выхода блока управления поступают на управляющий вход блока вычисления кода разностной частоты. Вычисление кода частоты реализовано с помощью алгоритма вычисления первой конечной разности полной фазовой функции в режиме работы «скользящее окно» в соответствии с алгоритмом, описанным в 13.4.

В основе алгоритма работы блока переключения крутиzny дискриминационной характеристики лежит то обстоятельство, что при малых значениях разностной частоты требуется наибольшая точность работы вычислителя, а при больших значениях – наибольший ее раскрыт. Эти два требования будут удовлетворены тогда, когда в центре дискриминационной характеристики крутизна будет принимать свое максимальное значение, а на краях – минимальное. На выходе блока формируется одно из нескольких значений кода ее крутиzny. Максимальный код крутиzny дискриминационной характеристики в окрестности переходной частоты соответствует максимальному коэффициенту деления делителя частоты блока управления. Кроме того, в данном блоке имеется возможность изменять код крутиzny в зависимости от знака расстройки.

Код крутиzny дискриминационной характеристики поступает на блок изменения ее формы, выход которого подключен к ЦАП. Форма дискриминационной характеристики при использовании компьютера в качестве управ-

ляющего устройства или настроенного ПЗУ с устройством управления может меняться любым образом в соответствии с заданным алгоритмом.

На рис. 13.19 показаны возможные формы дискриминационных характеристик. На рис. 13.19,а – с изменением крутиzny, на рис. 13.19,б – с изменением крутиzny в зависимости от знака расстройки, на рис. 13.19,в – с изменением крутиzny в зависимости от кода разностной частоты, на рис. 13.19,г – с изменением крутиzny в зависимости от кода разностной частоты и от знака расстройки. На этих рисунках обозначено:  $K_1, K_2$  – значения крутиzny дискриминационной характеристики;  $\Delta f_1$  – характерные точки на частотной оси (разностные частоты, на которых крутизна меняет свое значение).

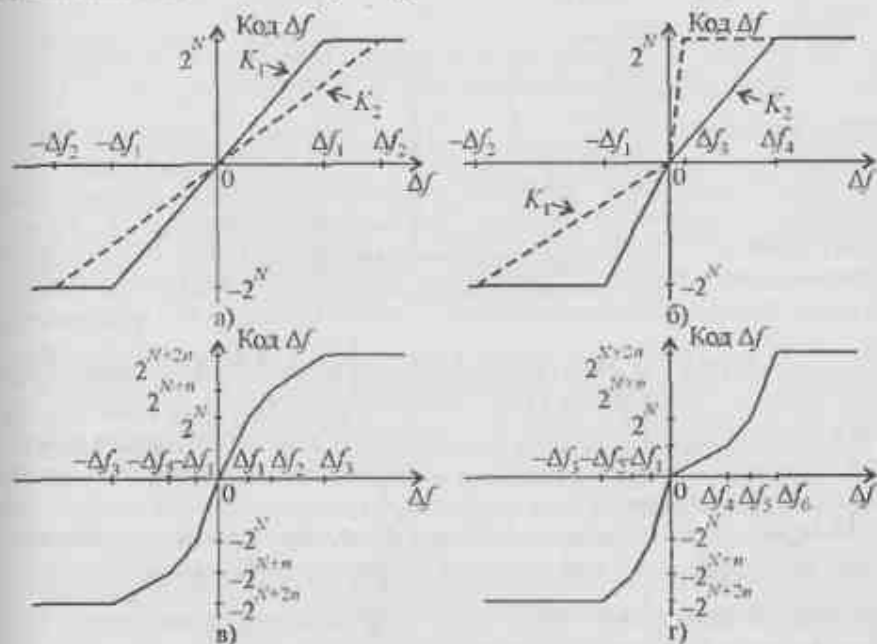


Рис. 13.19. Возможные формы дискриминационных характеристик адаптивного цифрового частотного дискриминатора

Экспериментально исследовалась работа АЦЧД при воздействии на него аддитивной смеси полезного сигнала и помехи в виде «белого» шума. Отношение сигнал/шум  $\rho$  вычислялось как отношение амплитудного значения напряжения сигнала к среднеквадратическому отклонению напряжения шума.

Исследовалось воздействие аддитивной смеси сигнала и «белого» шума на амплитудный ограничитель и формирователь для оценки влияния характеристик этих устройств на выходной сигнал. Измерение частоты импуль-

сов производилось на выходе формирователя в зависимости от величины  $q$  при постоянной частоте сигнала на входе. Эксперимент проводился при двух значениях ширины петли гистерезиса компаратора, равной 0 и 1,7 В. Графики, иллюстрирующие изменение частоты на выходе амплитудного ограничителя и формирователя квадратурных каналов в зависимости от  $q$  на его входе при использовании компаратора без гистерезиса ( $f_{max1}$ ) и с гистерезисом ( $f_{max2}$ ), приведены на рис. 13.20 для математического ожидания частоты импульсов на выходе при 30...50 измерениях каждой частоты, переходной частоте  $f_0 = 500$  кГц и времени счета частотомера 1 с.

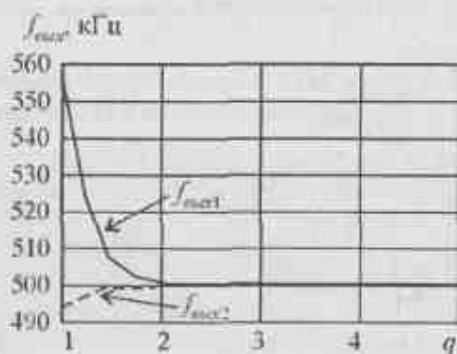


Рис. 13.20. Изменение частоты на выходе блоков амплитудного ограничения и формирователя квадратурных каналов

Для исследования влияния на помехоустойчивость АЦЧД блоков устранения «дребезга» и определения знака расстройки использовался частотомер, вход которого подключался к соответствующим выходам. Очевидно, что при отсутствии «дребезга» на выходах схемы устранения «дребезга» частотомер будет определять разностную частоту  $\Delta f$ . При появлении «дребезга» на выходе схемы частота  $f_m$ , измеренная частотомером, будет несколько больше  $\Delta f$ . Следовательно, результат будет зависеть от величины  $q$ .

Результаты исследований работы блоков подавления «дребезга» и определения знака расстройки представлены на рис. 13.21 в виде математического ожидания разности  $N_{\Delta f} = f_m - \Delta f$  для двух значений разностной частоты – в пределах младшего разряда ( $N_{\Delta f}$ ) и на краю раскрыва дискриминационной характеристики ( $N_{\Delta f_1}$ ). Измерения проводились при времени счета частотомера 10 с. Количество испытаний составило 30...50 для каждого значения  $q$ . Ширина ступеньки дискриминационной характеристики (вс младшего разряда)  $\delta f = 250$  Гц, ширина ее раскрыва  $2F = 32$  кГц.

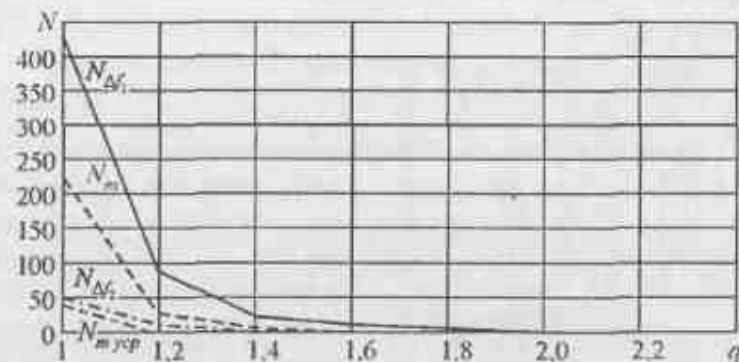


Рис. 13.21. Влияние отношения сигнал/шум на эффективность работы блоков подавления «дребезга» и определения знака расстройки

Исследование блока определения знака расстройки показало, что при воздействии шумов возникают сбоиные ситуации, причем частота сбоев зависит от величины  $q$  и разностной частоты  $\Delta f$ . Для уменьшения частоты появления ошибок знака применяется усреднение. На рис. 13.21 приведены соответствующие графики частоты ошибок знака без усреднения ( $N_m$ ) и с усреднением ( $N_{m уср}$ ) при значении разностной частоты в пределах младшего разряда (в центре дискриминационной характеристики).

Экспериментальные исследования показали, что мощность флуктуации ошибок  $N_{\Delta f}$  на выходе АЦЧД зависит не только от величины  $q$ , но и от значения разностной частоты  $\Delta f$ .

На рис. 13.22 представлены зависимости среднеквадратического отклонения напряжения  $\sigma_{max}$  на выходе ЦАП (мВ) от величины  $q$  на входе АЦЧД при различных значениях разностной частоты  $\Delta f$ , которая пронормирована относительно максимальной частоты  $F$  раскрыва дискриминационной характеристики, а на рис. 13.23 – зависимости среднеквадратического отклонения напряжения  $\sigma_{max}$  от  $\Delta f$  при различных величинах  $q$ .

На рис. 13.24 приведены различные виды дискриминационных характеристик АЦЧД, полученных экспериментально.

На рис. 13.24,а приведены полученные экспериментальные дискриминационные характеристики АЦЧД с постоянной крутизной при  $q > 2$ ; на рис. 13.24,б – с изменением крутизны в зависимости от знака расстройки при  $q > 2$ ; на рис. 13.24,в – с постоянной крутизной при  $q \approx 1,5$ ; на рис. 13.24,г – с постоянной крутизной при  $q \approx 1,3$ . Эти экспериментальные дискриминационные характеристики были получены путем фотографирования с экрана прибора Х1-40 при различных значениях  $q$  на входе АЦЧД.

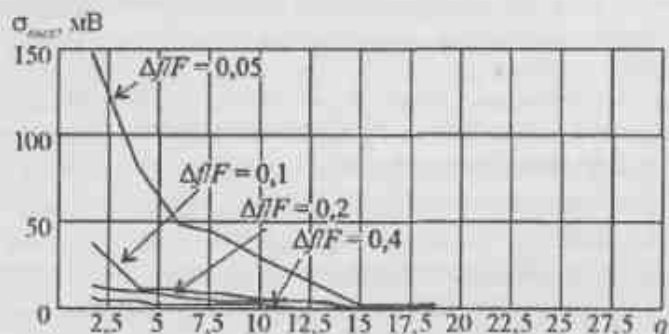


Рис. 13.22. Зависимости среднеквадратического отклонения выходных напряжений от отношения сигнал/шум на входе

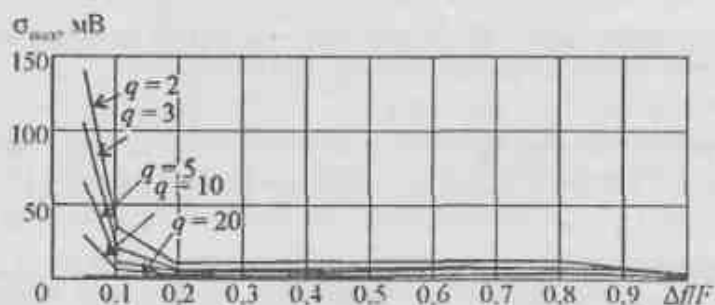


Рис. 13.23. Зависимости среднеквадратического отклонения выходных напряжений от разностной частоты и отношений сигнал/шум на входе

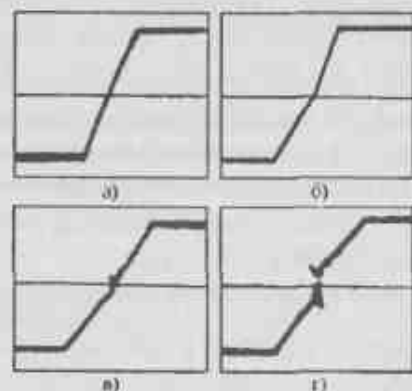


Рис. 13.24. Виды различных дискриминационных характеристик АЧЦД, полученных с экрана осциллографа

13.7. Упрощенный алгоритм непосредственного измерения частот модуляции радиосигнала (случай  $\psi(t) = \mu_1 t + 0,5\mu_2 t^2$ )

13.7.1. Как видно, функция  $\psi(t)$  описывает полную фазовую функцию ЛЧМ-сигнала. Его дискретная фазовая функция принимает вид

$$\psi(m\Delta t) = \mu_1(m\Delta t) + 0,5\mu_2(m\Delta t)^2.$$

Определим первую и вторую конечные разности через интервал  $T = l\Delta t$  отсчетов.

Полагая  $\Delta t = 1$ ,  $\mu_n = 2\pi(k+1)p_n$ ,  $p_1 = 1$ , имеем

$$\Delta\psi(m) = \mu_1 m + 0,5\mu_2 m^2 - \mu_1(m-1) - 0,5\mu_2(m-1)^2 = \mu_1 + \mu_2 m - 0,5\mu_2 l^2;$$

$$\Delta^2\psi(m) = \Delta\psi(m) - \Delta\psi(m-1) =$$

$$= \mu_1 + \mu_2 m - 0,5\mu_2 l^2 - \mu_1 + \mu_2(m-1) + 0,5\mu_2 l^2 = \mu_2.$$

Из последнего равенства и учитывая вышесказанное, получаем величину, являющуюся двенадцатой частоты, которая будет

$$\mu_2 = \Delta^2\psi(m)/T^2.$$

Устройство, реализующее вычисление величины  $\mu_2$ , описано в [112].

Определим величину  $\mu_1$ , являющуюся несущей частотой, в виде

$$\mu_1 = [\Delta\psi(m) - \mu_2 T m + 0,5\mu_2 T^2]/T.$$

Следовательно, величина, соответствующая несущей частоте, зависит от величины первой конечной разности полной фазовой функции, накапливаемой суммой второй конечной разности этой функции и самой второй конечной разности с весовым коэффициентом 0,5.

Структурная схема устройства, реализующая рассмотренный алгоритм обработки, предложена в [113] и изображена на рис. 13.25. Данная структурная схема включает в себя, как частный случай, устройство, описанное в [112].

Работает данное устройство следующим образом.

При поступлении на его вход ЛЧМ-сигнала, он преобразуется в квантователе и формирователе в бинарно-квантованный сигнал, единицы которого, положим, связаны с моментами пересечения действительной части комплексной экспоненты  $\text{Re}\dot{U}(t) = \text{Re}\{\exp[j(\mu_1 t + 0,5\mu_2 t^2)]\}$  нулевого уровня. Сформированная таким образом последовательность нулей и единиц записывается последовательно во времени в первую цифровую линию задержки (ЦЛЗ1) и одновременно поступает на суммирующий вход первого реверсивного счетчика (РС1).

Через момент времени  $T = l\Delta t$  эта последовательность входных импульсов достигнет конца ЦЛЗ1 и начнет записываться во вторую цифровую линию задержки (ЦЛЗ2), поступать на вычитающий вход РС1 и на сумми-



рующий вход второго реверсивного счетчика (РС2). При этом на выходах РС1 образуется величина, равная  $\Delta\psi(m)$ .

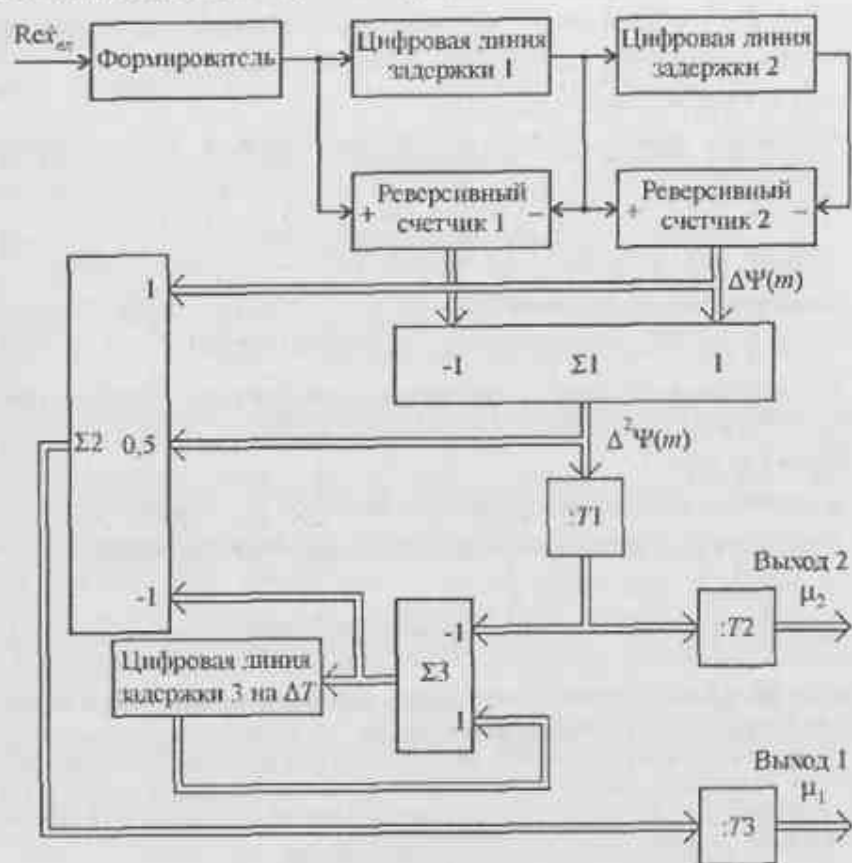


Рис. 13.25. Укрупненная структурная схема устройства измерения параметров ЛЧМ-сигнала

Через момент времени  $T = 2l\Delta t$  входная последовательность достигнет конца ЦЛЗ2 и поступит на вычитающий вход РС2. При этом на выходах РС2 будет код, соответствующий величине  $\Delta\psi(m)$ , а на выходах РС1 будет код, соответствующий величине  $\Delta\psi(m-l)$ . Эти коды, соответствующие первым конечным разностям полной дискретной фазовой функции ЛЧМ-сигнала  $\psi(m)$ , поступают на блок вычитания (блок  $\Sigma 1$ ), на выходе которого образуется вторая конечная разность  $\Delta^2\psi(m)$ , и на блок суммирования

$\Sigma 2$ . Код, соответствующий  $\Delta^2\psi(m)$ , поступает на  $\Sigma 2$  и через первый блок нормировки на  $T$  (блок деления на  $T_1$ ) на схему накапливающего суммирования, выполненной на сумматоре  $\Sigma 3$  и третьей цифровой линии задержки на  $\Delta T$  (ЦЛЗ3). Также эти коды через второй блок нормировки на  $T$  (блок деления на  $T_2$ ), поступают на выход 2 и которые соответствуют скорости изменения частоты ЛЧМ-сигнала  $\mu_2$ .

На выходе схемы накапливающего суммирования образуется величина  $\mu_2 T m$ , которая поступает на вычитающий вход сумматора  $\Sigma 2$ . На других входах сумматора  $\Sigma 2$  находятся коды  $\Delta\psi(m)$  и  $0,5\Delta^2\psi(m) = 0,5\mu_2 T^2$ . На выходе сумматора  $\Sigma 2$  образуется код, который поступает через третий блок нормировки на  $T$  (блок деления  $T_3$ ) на выход 1 устройства и величина которого пропорциональна начальному значению несущей частоты ЛЧМ-сигнала  $\mu_1$ .

Далее работа устройства осуществляется в режиме работы «скользящее» окно, т.е. на каждый вновь поступивший отсчет входного сигнала появляются обновленные кодовые величины  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Отметим, что блоки деления на  $T_1$ , на  $T_2$  и на  $T_3$  одинаковы.

13.7.2. Найдем дисперсию оценок частот модуляции в общем виде, полагая, что математические ожидания величин  $\mu_i$  равны этим величинам. Будем также полагать, что на входе рассмотренных устройств действует аддитивная смесь сигнала и «белого» шума со спектральной плотностью  $N_0$ , отношение которых  $q^2 \gg 1$ . Допустим также, что отсчеты независимы через интервал времени  $T$ , а их распределение подчиняется нормальному закону [96].

Тогда математическое ожидание  $M$  и дисперсия  $\sigma^2$  на каждом временном интервале  $T$  равняется усредненному значению первой разности

$$M = \sum_{n=1}^N \Delta\psi(m)/N; \quad \sigma^2 = (12N_0/[E^2(t)T^3]) \cdot (2FT/6),$$

где первый множитель в выражении для  $\sigma^2$  соответствует теоретически предельной точности,  $N$  – порядок конечной разности.

Дисперсию конечной разности  $N$ -го порядка можно определить из выражения

$$\sigma_N^2 = N\sigma^2 = N(4N_0F/[E^2(t)T^2]),$$

откуда дисперсия оценки частоты  $f_N = 2\pi(k+1)p_n$  будет  $\sigma_{fN}^2/T^{N-1}$ .

С учетом того, что  $NT \gg 1$  предположим, что в (13.1) последний член под знаком суммы намного превышает по величине предыдущие члены, откуда приближенная величина дисперсии оценки  $f_N$ -й частоты модуляции

$$\sigma_{f_N}^2 = \sigma_f^2 (NT)^n / n!$$

Использование рассмотренных алгоритмов позволяет достаточно просто получать оценки и более высоких порядков частот модуляции и техническая реализация которых осуществляется при помощи цифровых линий задержки, реверсивных счетчиков, перемножителей и сумматоров.

### 13.8. Выводы

В отличие от многоразрядного представления входных сигналов в виде квадратурных составляющих, описываемых в декартовой системе координат, можно считать, что обработка бинарно-квантованных сигналов осуществляется в полярной системе координат, причем этому преобразованию подвергаются только значения полных фазовых функций. Последнее связано с тем, что амплитуда сигналов полагается неизменной на всем временном интервале обработки. В этом случае теорема отсчетов будет выполняться при условии, что количество отсчетов, взятых на периоде повторения самой высокой частоты в спектре анализируемого сигнала, будет равно одному.

В реальных условиях, в силу тех или иных технических особенностей устройств обработки, частота выборок входного сигнала превышает предельно низкую частоту, выбираемую из условий выполнения теоремы отсчетов, в два и более раза. Последнее обстоятельство приводит, соответственно, к большим затратам оборудования.

Тем не менее, относительная простота устройств, реализующих те или иные алгоритмы обработки бинарно-квантованных сигналов и полная фазовая функция которых описывается рядом Тейлора, делает эти устройства достаточно эффективными с технико-экономической точки зрения. При этом в ряде случаев, как, например, при фазовых измерениях, получающиеся результаты превосходят по точности результаты, которые обеспечиваются устройствами, оперирующими с многоразрядными отсчетами входных квадратурных составляющих.

Достаточно большое число реальных технических задач связано с измерением центральной частоты узкополосных процессов, частным случаем которых является монохроматический сигнал. Было показано, что в зависимости от формы энергетического спектра сигнала необходимо изменять форму дискриминационной характеристики устройства, т.е. необходимо реализовывать адаптивное устройство измерения центральной частоты. При этом полученные экспериментальные результаты полностью подтвердили правильность рассмотренных теоретических положений, использованных при построении АЦЧД.

Проведенный анализ и предложенные технические решения показывают высокую эффективность предложенного подхода также и для измерения характеристик ЛЧМ-сигнала.

Следовательно, в том случае, когда сигнальная функция может быть представлена в виде суммы комплексных экспонент с соответствующими весовыми коэффициентами, то целесообразно использовать многоразрядное представление входных сигналов и производить их линейную обработку в виде квадратурных составляющих в базисе дискретных экспоненциальных функций.

В том же случае, когда входной сигнал представим в форме произведения комплексных экспонент (мультипликативных сигнал), то его полная фазовая функция наилучшим образом описывается полиномом в виде ряда Тейлора, а обработку такого сигнала целесообразно осуществлять путем вычисления соответствующих конечных разностей.

## 14. ЦИФРОВАЯ АВТОМАТИЧЕСКАЯ РЕГУЛИРОВКА УСИЛЕНИЯ

### 14.1. Вводные замечания

Системы автоматической регулировки усиления (АРУ) входят в состав большинства РПРУ самого различного назначения и предназначены для поддержания уровня выходного сигнала  $U_{вых}$  и вблизи номинального значения при изменении уровня входного сигнала  $U_{вх}$  в широком динамическом диапазоне [1–3]. Известно много причин, из-за которых уровень входного сигнала непрерывно меняется: изменение расстояния между источником излучения и приемным устройством, изменение условий распространения радиоволн, пришедших в точку приема по разным путям; перенастройки приемника с одной станции на другую; изменение взаимонаправленности приемной и передающей антенн и т.д. В радиолокации к этим причинам добавляются флуктуации эффективной отражающей поверхности цели, смена целей с различными эффективными отражающими поверхностями, случайные изменения поляризации принимаемых радиоволн и т.д. В радиосвязи напряжение сигнала на входе РПРУ может измениться в  $10^3$  раз, а в радиолокации – в  $10^5$  раз (соответственно 60 дБ и 100 дБ). Выходное напряжение РПРУ при этом не должно изменяться более чем в 1,2–3 раза (или 1,6–9,6 дБ). Это требование определяется как допустимыми искажениями информационной составляющей сигнала (оглябающей), так и отсутствием перегрузок его каскадов, могущих привести к длительным потерям чувствительности. При этом система АРУ должна быть устойчивой.

В идеальном случае выходное напряжение РПРУ должно оставаться неизменным после достижения некоторого значения  $U_{огл\max}$ , обеспечивающего нормальную работу окончного прибора (детектора). Это означает, что коэффициент усиления должен изменяться согласно следующей закономерности

$$K(U_{вх}) = U_{огл\max} / U_{вх} \quad \text{при } U_{вх} \geq U_{огл\max}.$$

Реальные аналоговые системы АРУ соответствуют этому соотношению с большим или меньшим приближением.

Известно, что аналоговые системы АРУ различаются:

- по принципу организации подачи управляющего напряжения (по виду структурной схемы) на обратные, прямые и комбинированные;
- по виду схемотехнического решения на простые, с задержкой, с задержкой и усилением;
- по виду сигнала, который является управляющим, делятся на системы АРУ управляемые непрерывными полезными сигналами (обычные) и импульсными сигналами – быстродействующая АРУ (БАРУ), мгновенная АРУ (МАРУ), а также программными сигналами – временная АРУ (ВАРУ).

Цифровой АРУ (ЦАРУ), в отличие от всех аналоговых АРУ, свойственны следующие достоинства: независимость длительности процесса установления требуемого усиления от уровня входного сигнала, независимость регулировочных характеристик от разбросов рассчитанных значений и конкретных свойств цепи АРУ и регулируемого усилителя (при полностью цифровом выполнении), возможность установления требуемого усиления в момент появления первого импульса от сигнала цели в случае применения в радиолокационных РПРУ, апатизм и возможность сохранения установленного усиления при перерывах в приеме сигналов, а также имеется возможность текущего контроля коэффициента усиления реализуемого узла в каждый момент времени. ЦАРУ легко выполняемы при использовании в РПРУ цифровой обработки сигналов. Отметим, что различия, характерные для аналоговых АРУ, могут быть реализованы в цифровой форме либо алгоритмически, либо аппаратно.

### 14.2. Цифровая АРУ с управлением по постоянной составляющей

Подробно рассмотрим реализацию ЦАРУ с обратной связью. Функциональная схема РПРУ с ЦАРУ, изображена на рис. 14.1. В данной схеме ЦАРУ регулирует коэффициент усиления усилителей непрерывных сигналов.

Работает данная схема следующим образом. Входной сигнал с выхода антенны А поступает через входную цепь на усилитель радиочастоты. В этих узлах происходит подавление до требуемого уровня паразитного (зеркального) канала приема и некоторое усиление принимаемого сигнала. Пройдевший предварительную обработку сигнал поступает на преобразователь частоты, где происходит его перенос по спектру в область полосы пропускания усилителя промежуточной частоты (УПЧ), в котором реализуется основной коэффициент усиления РПРУ.

После детектирования амплитудно-модулированного (АМ) сигнала в детекторе на его выходе 1 выделяется огибающая, поступающая на усилитель высокой частоты (УНЧ) и выделяются на выходе 2, после ФНЧ аналогового АРУ, составляющие напряжения, которые характеризуют интенсивность принимаемого сигнала по постоянной составляющей.



Рис. 14.1. Структурная схема РПрУ с ЦАРУ и аналоговой АРУ

Составляющие с выхода 2 также поступают на видеоусилитель (ВУ) для соответствующего усиления с целью обеспечения нормальной работы последующих узлов ЦАРУ. Ключ  $K_1$  служит для переключения, в случае необходимости, с аналоговой АРУ на ЦАРУ и наоборот.

На рис. 14.2,а изображены спектральные характеристики АМ-сигнала, прошедшего через УПЧ с идеальным фильтром, имеющего прямоугольную АЧХ, а на рис. 14.2,б изображены спектры сигналов на выходах детектора, УНЧ и идеальная АЧХ ФНЧ АРУ.

Сигнал с выхода ВУ поступает на АЦП, где преобразуется в двоичный код с частотой дискретизации  $F \geq 2F_{\text{max упр}}$ , где  $F_{\text{max упр}}$  — максимальная частота в спектре сигнала, по которому производится управление. Код выходного напряжения  $N_{\text{max}}$  сравнивается с эталонным кодом  $N_{\text{зад}}$  в схеме сравнения кодов (ССК).

В результате образуется код рассогласования  $\Delta N$ . Видно, что ССК выполняет роль порогового устройства, а величина  $N_{\text{зад}}$  — цифровой аналог напряжения задержки  $U_{\text{зад}}$ . Результат сравнения  $\Delta N$  поступает на схему усреднения и запоминания (СУЗ), где вырабатывается код регулирования, который поступает на цифроаналоговый преобразователь (ЦАП). Напряжение с выхода ЦАП поступает на регулирующие элементы каскадов УПЧ. Регулировка, как следует из наличия на рис. 14.1 цифровой части, осуществляется дискретно.

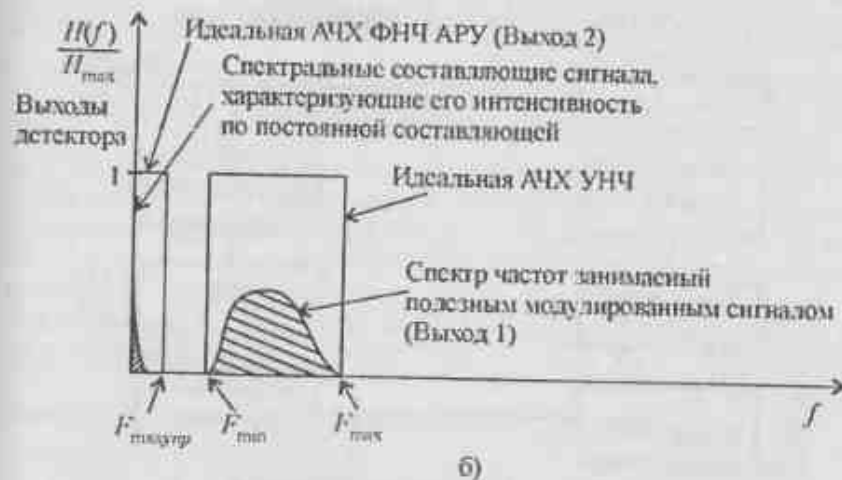
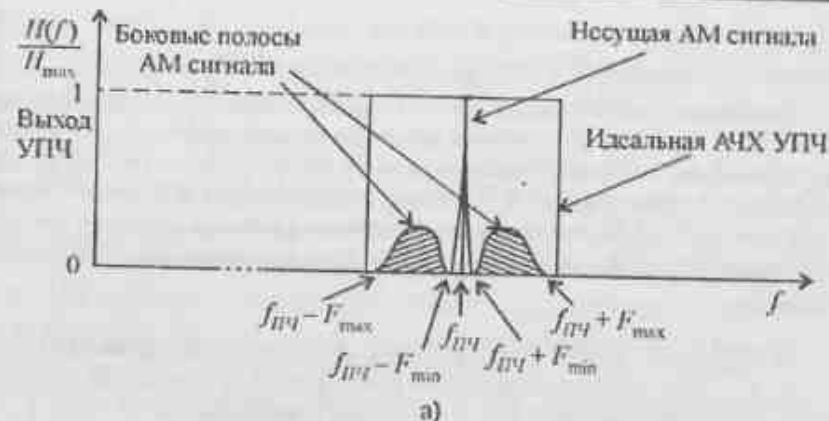


Рис. 14.2. Спектральные характеристики АМ-сигнала: а) на выходе УПЧ; б) на выходах детектора

В аналоговых АРУ с увеличением уровня входного сигнала увеличивается выходная амплитуда, определяемая коэффициентом неэффективности АРУ  $\alpha = dU_{\text{max}}/dU_{\text{ex}}$ . Кроме того, в аналоговых АРУ качество оценивается коэффициентом регулирования усиления, который определяется величиной  $\gamma = K_{\text{max}}/K_{\text{min}}$ .

В ЦАРУ за счет использования СУЗ, которая может рассматриваться как идеальный интегратор, величина  $\alpha = 0$ , а коэффициент регулирования  $\gamma = U_{\text{ex max}}/U_{\text{ex min}}$  равен динамическому диапазону входного сигнала, где

$U_{\text{ст. мин}}$  — минимальное входное напряжение. При  $U_{\text{вых}} < U_{\text{зад}}$  ЦАРУ не работает подобно аналоговой АРУ, и коэффициент усиления УПЧ равен  $K_{\text{max}}$ .

Построение ЦАРУ по схеме рис. 14.1, выполненной по аналоговому прототипу и в котором регулировка усиления осуществляется по изменению интенсивности постоянной составляющей на выходе детектора, требует применения многоразрядного АЦП, который представляет достаточно сложное электронное устройство и для нормального функционирования которого необходимо наличие высокостабильных разнополярных источников питания [21].

### 14.3. Цифровая АРУ с управлением по переменной составляющей

14.3.1. Более простая техническая реализация ЦАРУ может быть достигнута путем применения АЦП с бинарным квантованием. В этом случае структурная схема ЦАРУ принимает вид, изображенный на рис. 14.3 [114].



Рис. 14.3. Структурная схема ЦАРУ с бинарным квантованием аналогового сигнала

В подобной ЦАРУ регулировка усиления осуществляется по интенсивности переменной составляющей сигнала. В рассматриваемом ЦАРУ к выходу регулируемых каскадов УПЧ подключен детектор АРУ, на выходе которого выделяется амплитуда огибающей низкой (звуковой) частоты.

Сигнал на выходе детектора АРУ подается в АЦП бинарному квантованию: если  $U_{\text{вых}} > U_{\text{зад}}$ , то вырабатывается сигнал ошибки  $Z_0 = -1$ ; если  $U_{\text{вых}} < U_{\text{зад}}$ , то  $Z_0 = 1$  [3]. На рис. 14.4 изображены временные диа-

граммы поступления сигналов  $Z_0$  на входы реверсивного счетчика 1 (РС1) при различных значениях средних напряжений. Здесь  $F = 1/T$  — частота преобразования, выбираемая из условия выполнения теоремы отсчетов.

Этот сигнал ошибки поступает в усредняющий РС1 с коэффициентом счета (емкостью счетчика)  $n$ . При переполнении РС1 на его выходе появляется импульс, увеличивающий или уменьшающий на единицу, в зависимости от знака переполнения, число в реверсивном счетчике 2 (РС2).

Код в РС2 меняется от 0 до  $R_{\text{max}}$ . Этот счетчик не должен переполняться. Когда код в РС2 достигает значения 0 или  $R_{\text{max}}$ , происходит блокировка поступления импульсов соответствующего знака с входа РС1. Код в РС2 регулирует коэффициент усиления УПЧ через ЦАП.

В стационарном режиме у описанного ЦАРУ возникают автоколебания, приводящие к изменению кода в РС2 на единицу (например  $R = 15, 16, 15, 16, \dots$ ) и соответственно к появлению паразитной амплитудной модуляции выходного сигнала [3]. Чтобы коэффициент амплитудной модуляции не зависел от амплитуды входного сигнала (и соответственно от значений кода  $R$ ) необходимо, чтобы при изменении кода  $R$  на единицу коэффициент усиления менялся в одно и то же число раз, т.е.  $\delta = (K + \Delta K)/K = \text{const}$ , где  $\Delta K < K$ . Этого можно добиться, если ввести экспоненциальную зависимость в тракт регулирования с помощью управляемого цифровым кодом аттенюатора, либо выбором соответствующей амплитудной характеристики ЦАП.

Коэффициент амплитудной паразитной модуляции  $m_n$  должен быть малым, т.е.  $m_n = \Delta K/2K = (\delta - 1)/2 \ll 1$ . Коду  $R = 0$  соответствует  $K = K_{\text{min}}$ , произвольному коду  $R$  соответствует  $K_i = K_{\text{min}} \delta^R$ , наконец коду  $R_{\text{max}}$  соответствует  $K = K_{\text{min}} \delta^{R_{\text{max}}}$ .

Следовательно, динамический диапазон изменения коэффициента усиления  $\gamma = K_{\text{max}}/K_{\text{min}} = \delta^{R_{\text{max}}} = (2m_n + 1)^{R_{\text{max}}}$  определяется допустимым коэффициентом паразитной амплитудной модуляции  $m_n$  и емкостью РС2  $R_{\text{max}}$ . Отсюда емкость РС2

$$R_{\text{max}} = \frac{\log_2(K_{\text{max}}/K_{\text{min}})}{\log_2(2m_n + 1)} \quad (14.1)$$

14.3.2. Паразитной амплитудной модуляции в стационарном режиме можно избежать, если ввести в характеристику квантователя зону нечувствительности, что соответствует переходу от двухуровневого квантования ( $Z_0 = \pm 1$ ) к трехуровневому ( $Z_0 = \pm 1, 0$ ) [114].

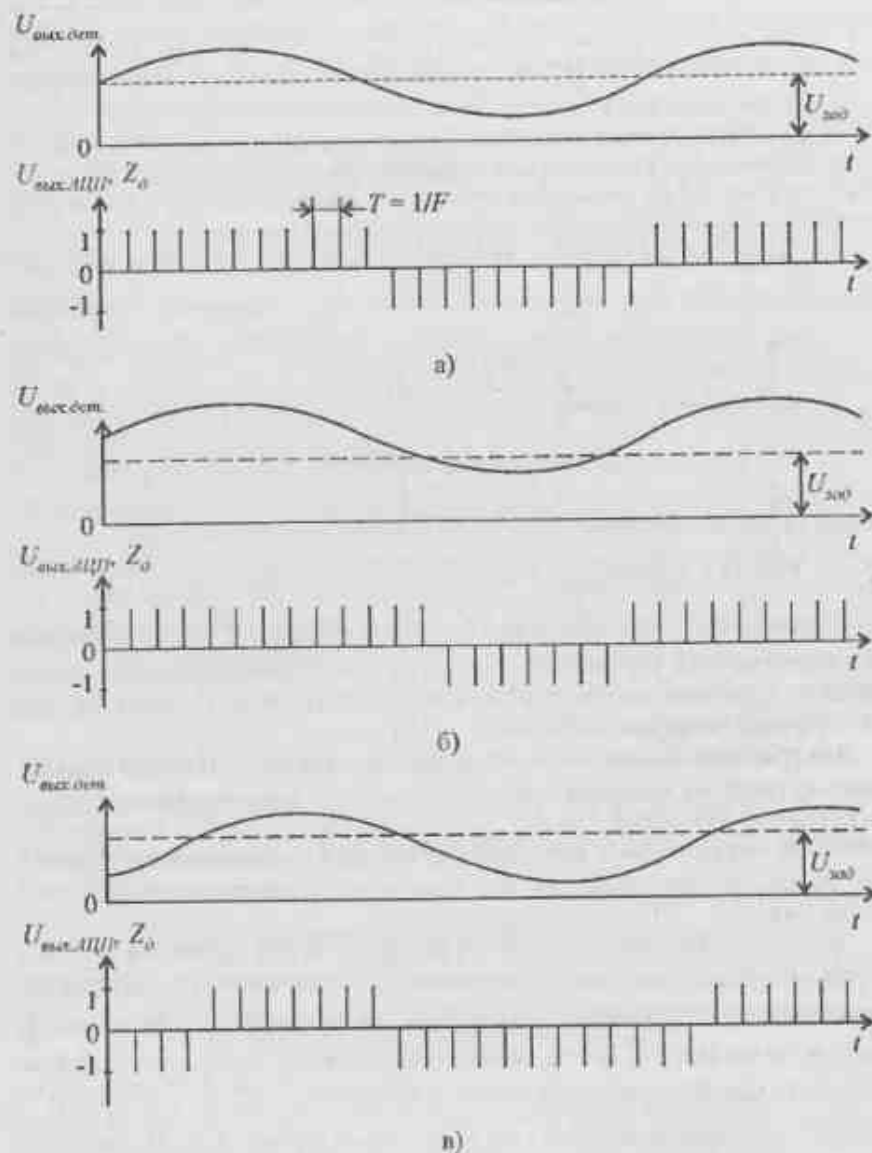


Рис. 14.4. Временные диаграммы работы реверсивного счетчика 1. Среднее значение: а)  $U_{\max \text{ дем}} = U_{300}$ ; б)  $U_{\max \text{ дем}} > U_{300}$ ; в)  $U_{\max \text{ дем}} < U_{300}$

Протяженность зон нечувствительности целесообразно сделать равной дискрету регулирования  $2m_n U_{300}$ . Величина  $m_n$  и в этом случае будет ха-

рактеризовать статическую точность регулирования амплитуды сигнала. При этом для расчета емкости РС2  $R_{\max}$  также можно пользоваться приведенным выше выражением (14.1).

Характеристику АЦП с зоной нечувствительности реализуют с помощью двух компараторов с параметрами, выбираемыми из выражений

$$U_B = U_{300} + m_n U_{300}, \quad U_H = U_{300} - m_n U_{300}. \quad (14.2)$$

На рис. 14.5 изображена характеристика квантования трехуровневого АЦП.

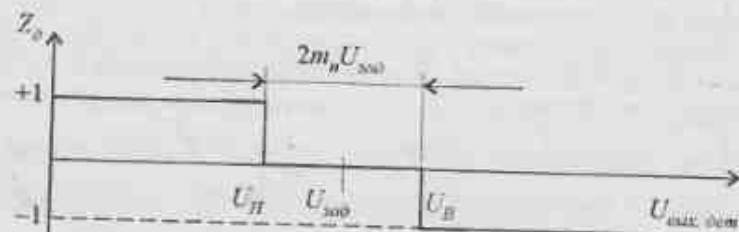


Рис. 14.5. Амплитудная характеристика трехуровневого АЦП

Реально частоту дискретизации  $F = 1/T$  выбирают в 2,5–5 раз выше чем она определяется из условий выполнения теоремы отсчетов, и ее величина зависит от ширины полосы ФНЧ на выходе детектора АРУ, которая в этом случае может быть равна полосе частот АМ сигнала.

Для исключения влияния этого аналогового ФНЧ на длительность переходных процессов в цифровой части системы ЦАРУ его постоянную времени выбирают на порядок больше, чем допустимая длительность переходных процессов, определяемых характеристиками ЦАРУ, т.е. аналоговый ФНЧ в данном случае служит только для устранения влияния высокочастотных составляющих.

При воздействии скачка входного сигнала в ЦАРУ возникает переходный процесс. При переходном процессе вырабатывается сигнал ошибки  $Z_0$  одного знака, что приводит к равномерному увеличению кода в РС2. В худшем случае код в РС2 непрерывно изменяется от 0 до  $R_{\max}$ , откуда максимальная длительность переходного процесса  $t_{II} = R_{\max} t_1$ , где  $t_1 = nT$  – период следования импульсов переполнения на выходе РС1. Величина  $t_1$  выбирается исходя из требований, предъявляемым к диапазону частот, который должен подавляться системой ЦАРУ, т.е.  $F_{\text{пар}} \ll 1/t_1 \ll F_{\text{мин}}$ , где  $F_{\text{мин}}$  – минимальная частота полезной модуляции сигнала,  $F_{\text{пар}}$  – максимальная частота паразитной модуляции.

Величина  $t_H$  определяет максимальное время переходного процесса, которое начинается от момента появления сигнала до окончания переходного процесса. Если это время недопустимо велико, можно увеличить частоту дискретизации. Задаваясь  $t_H$  или  $t_1$ , коэффициент счета РС1 определяется выражением  $n = t_1/T = t_H/T R_{max}$ .

#### 14.4. Статистические характеристики ЦАРУ с управлением по переменной составляющей

Рассмотрим статистические характеристики системы ЦАРУ с трёхуровневым квантованием. Известно, что наиболее полной статистической характеристикой дискретной системы является финальная вероятность её состояния  $P = P_0 P_{ij}$ , где  $P = (p_0, p_1, \dots, p_{N-1})$  – матрица-строка вероятностей финального распределения,  $P_0 = (p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, \dots, p_{N-1}^{(0)})$  – матрица-строка вероятностей начального распределения системы ЦАРУ,  $P_{ij}$  – матрица вероятностей перехода размера  $N \times N$  из состояния  $i$  в состояние  $j$  [100].

Первоначально определим вид матрицы  $P_{ij}$ . Положим, что при рассмотрении работы системы ЦАРУ можно пренебречь влиянием изменения среднего уровня входного сигнала за время переключения коэффициента усиления.

Тогда выполнение условия на выходе линейного тракта  $U_H < U_{ex} K_{min} \delta^R < U_B$  достигается в том случае, когда входной сигнал  $U_{ex}$  находится в диапазоне  $i\Delta U < U_{ex} < (i+1)\Delta U$ , где  $0 \leq i \leq N-1$ ,  $\Delta U$  – фиксированная величина,  $U_{max} = \Delta U N$ ,  $K_i = U_B / (i+1)\Delta U$ ,  $U_B$  и  $U_H$  – определяются из выражений (14.2).

Очевидно, что если в дискретный момент времени  $t = mT$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  на выходе устройства выполняется условие  $U_H < U_{max} < U_B$ , то в момент времени  $t = (m+1)T$  коэффициент передачи не меняется; если  $U_{max} > U_B$ , то  $K_{i+1} = U_B / (i+2)\Delta U$ ; если  $U_{max} < U_H$ , то  $K_{i+1} = U_B / i\Delta U$ .

Рассмотрим величину, обратную коэффициенту передачи. Тогда введём функцию единичного скачка [100]

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

можно записать правило регулировки в системе ЦАРУ следующим образом

$$K_{i+1,0}^{-1} = K_i^{-1} + \Delta U [\varepsilon(U_{max} - U_B) - \varepsilon(U_H - U_{max})] / U_B. \quad (14.3)$$

Из выражения (14.3) видно, что величина, обратная коэффициенту передачи и связанная с соответствующим состоянием реверсивного счетчика,

#### 14. Цифровая автоматическая регулировка усиления

является случайной величиной марковского типа и может изменяться от испытания к испытанию на величины 0 и  $\pm \Delta U / U_B$ .

Введем вероятности перехода системы ЦАРУ из состояния в состояние в зависимости от величины входного сигнала в соседние моменты времени, которые будут:

•  $P_{ij} = P_{ii} = r_i$  – вероятность того, что  $i$ -е состояние системы ЦАРУ в момент времени  $t = mT$  останется без изменения в момент времени  $t = (m+1)T$ ;

•  $P_{ij} = P_{i(i+1)} = q_i$  – вероятность того, что  $i$ -е состояние системы ЦАРУ в момент времени  $t = mT$  перейдет в  $j = (i+1)$ -е состояние в момент времени  $t = (m+1)T$ ;

•  $P_{ij} = P_{i(i-1)} = s_i$  – вероятность того, что  $i$ -е состояние системы ЦАРУ в момент времени  $t = mT$  перейдет в  $j = (i-1)$ -е состояние в момент времени  $t = (m+1)T$ .

Полная вероятность событий определяется выражением

$$r_i + q_i + s_i = 1.$$

Матрица вероятностей перехода  $P_{ij}$  для этого случая имеет трехдиагональный вид, который характерен для матрицы Якоби, и записывается в форме

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1(N-1)} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{(N-1)1} & P_{(N-1)2} & P_{(N-1)3} & \dots & P_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 & q_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_1 & r_1 & q_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & r_2 & q_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & s_{N-2} & r_{N-2} & q_{N-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{N-1} & r_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (14.4)$$

Отметим, что по определению сумма элементов строк матрицы (14.4) всегда равна 1.





Подставляя в выражение (14.10) величины, полученные для вероятностей  $q_{i-1}$  и  $s_i$  из выражений (14.7) и (14.8), учитывая индексы при них и полагая, что величина  $\Delta U$  пренебрежимо мала, что соответствует случаю  $q_{i-1} \approx s_i$ , получим

$$P_{j+1} = P_j,$$

т.е. финальное распределение коэффициента передачи системы ЦАРУ является равновероятным.

Следовательно, в рассмотренной системе ЦАРУ процесс управления коэффициентом передачи линейного тракта описывается марковской последовательностью. Это позволяет поддерживать в заданных пределах выходные параметры, фиксировать величину коэффициента передачи с заранее заданной точностью в каждый дискретный момент времени и избежать возникновения паразитной амплитудной модуляции в стационарном режиме.

*Пример.* Определим матрицу-строку финального распределения при следующих значениях:

$$N = 8, s_i = q_{i-1} = 0,4.$$

Из задания следует, что

$$r_0 = r_7 = 0,6, s_1 = \dots = s_7 = q_0 = \dots = q_6 = 0,4.$$

Матрица-строка начального распределения вероятностей будет

$$P_0 = [p_0^{(0)} p_1^{(0)} \dots p_7^{(0)}].$$

Матрица-строка  $P = [p_0 p_1 \dots p_7]$  финальных вероятностей распределения записывается

$$P = P_0 P_{ij} = [p_0^{(0)} p_1^{(0)} \dots p_7^{(0)}] \begin{bmatrix} r_0 & q_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 & r_1 & q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & r_2 & q_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_6 & r_6 & q_6 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s_7 & r_7 \end{bmatrix} =$$

$$= [p_0^{(0)} p_1^{(0)} \dots p_7^{(0)}] \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,2 & 0,4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Из выражения (14.10) для элементов матрицы-строки финального распределения  $\sum_{i=0}^{N-1} p_i^{(0)} p_{ij} - p_j = 0$ , с учетом того факта, что при перемножении матрицы-строки на матрицу получается матрица-строка с теми индексами, которые не участвовали в суммировании, запишем систему уравнений в виде

$$\begin{aligned} 0,6 p_0 + 0,4 p_1 - p_0 &= 0; \\ 0,4 p_0 + 0,2 p_1 + 0,4 p_2 - p_1 &= 0; \\ 0,4 p_1 + 0,2 p_2 + 0,4 p_3 - p_2 &= 0; \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0,4 p_5 + 0,2 p_6 + 0,4 p_7 - p_6 &= 0; \\ p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_7 &= 1. \end{aligned}$$

Решая методом последовательного замещения неизвестных, получаем

$$\begin{aligned} -0,4 p_0 + 0,4 p_1 &= 0, p_0 = p_1; \\ 0,4 p_1 + 0,2 p_1 + 0,4 p_2 - p_1 &= 0, -0,4 p_1 + 0,4 p_2 = 0, p_1 = p_2; \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0,4 p_6 + 0,2 p_6 + 0,4 p_7 - p_6 &= 0, -0,4 p_6 + 0,4 p_7 = 0, p_6 = p_7. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = p.$$

Учитывая, что суммирование по индексу  $j$  дает выражение в виде

$$\sum_{j=0}^7 p_j = 8p = 1,$$

окончательно имеем

$$P = [0,125 \ 0,125 \ 0,125 \ 0,125 \ 0,125 \ 0,125 \ 0,125 \ 0,125],$$

что соответствует равномерному финальному распределению вероятностей.

Следовательно, система ЦАРУ с равной вероятностью обрабатывает любые амплитуды входного сигнала.

#### 14.5. Сравнительный анализ характеристик ЦАРУ и аналоговой АРУ

Известно, что широко используемые в настоящее время в РПРУ аналоговые АРУ обладают различными характеристиками в зависимости от их назначения. Очевидно, что сравнение характеристик аналоговых АРУ с цифровыми следует проводить при одинаковых условиях их работы [115].

Проведение сравнительного анализа эффективности регулировочных характеристик цифровых и аналоговых систем АРУ осуществлялось экспери-

ментально путем регулировки коэффициента усиления одних и тех же каскадов трехкаскадного УПЧ.

Анализируемый УПЧ обладал коэффициентом усиления  $k = 1000$  и полосой пропускания на уровне 0,707 на центральной частоте равной  $f = 465$  кГц.

В результате проведенного эксперимента установлено, что при использовании ЦАРУ обеспечивается нормальная работа УПЧ при входном диапазоне  $D_{ax} = 20 \lg \gamma = 54$  дБ, в отличие от аналоговой АРУ, где  $D_{ax} = 40$  дБ.

На рис. 14.6 представлены виды амплитудных характеристик УПЧ без АРУ, с аналоговой АРУ и ЦАРУ, полученные экспериментальным путем.

Видно, что изменения среднего уровня сигнала на выходе УПЧ при использовании ЦАРУ равно 0 дБ, в то время как при использовании аналоговой эта величина была равна 7,2 дБ.

Работоспособность ЦАРУ не изменялась при изменении ее постоянной времени. Изменение постоянной времени реализовывалось путем изменения частоты дискретизации в пределах от 0,7 мсек до 30 мсек. Постоянная времени аналоговой АРУ была примерно равна 35 мсек.

В системе ЦАРУ отсутствовало влияние на средний уровень выходного сигнала до частоты равной 18 Гц величины коэффициента амплитудной модуляции  $m$ , которое достигало значений  $m = 80\%$ . Отметим, что у АМ сигналов, поступающих с выхода УПЧ реальных РПрУ, величина  $m \leq 30\%$ . Следует сказать, что при использовании аналоговой АРУ наблюдалось некоторое снижение величины  $m$  на указанной частоте модуляции.

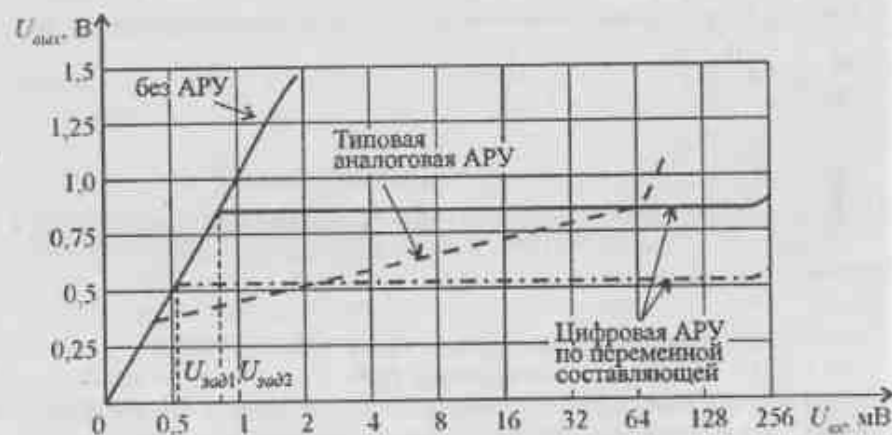


Рис. 14.6. Виды амплитудных характеристик УПЧ без АРУ, с аналоговой АРУ и ЦАРУ

Применение УПЧ с ЦАРУ позволяет в каждый дискретный момент времени иметь информацию о том или ином значении коэффициента усиления, в отличие от УПЧ, использующих аналоговые системы АРУ. Последнее свойство может оказаться полезным при решении тех радиотехнических задач, где требуется точное знание коэффициента усиления УПЧ или всего РПрУ через достаточно большие промежутки времени, кратные, как, например, в когерентно-импульсной радиолокации, нескольким периодам повторения зондирующих импульсов.

Указанная информация, может использоваться при дальнейшей цифровой обработке сигналов в задачах обнаружения движущихся целей.

#### 14.6. Выводы

Рассмотренные виды ЦАРУ и проведенный анализ их эффективности путем сравнения с аналоговыми АРУ показал, что они обладают более высокими характеристиками. Основным отличием ЦАРУ от аналоговых АРУ является то, что при их использовании устраняется непосредственная гальваническая связь выхода УПЧ со входными каскадами.

В свою очередь, использованием возможности регулировки усиления по переменной составляющей полезного сигнала позволяет избежать демодуляции его низкочастотных составляющих. Другим отличием указанного вида ЦАРУ от аналоговых АРУ является то, что, как и в других автоматических системах, здесь имеется АЦП, который рассматривается как элемент, в котором производится сравнение обрабатываемого сигнала с эталоном и который может рассматриваться как независимый элемент регулировки.

Все указанные отличия ЦАРУ от аналогового АРУ и позволяет получать высокие характеристики как УПЧ, так и всего РПрУ.

Отметим еще одно обстоятельство. В ЦАРУ нет необходимости ставить дополнительные усилительные каскады, поскольку требуемый диапазон изменения регулировочных напряжений достаточно просто обеспечивается выбором соответствующей длины разрядной сетки ЦАП, что связано с характеристиками всей цифровой части.

Следует также сказать, что использование ЦАРУ позволяет достаточно просто изменять величину  $U_{зод}$ , поскольку она задается в виде кода, а также постоянную времени цепей фильтрации путем изменения частоты дискретизации.

Рассмотренные свойства делают возможным построения адитивных ЦАРУ.

## 15. ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА ДВУМЕРНЫХ СИГНАЛОВ

### 15.1. Вводные замечания

Наряду с цифровой обработкой реализацией зависящих от одной переменной (например, времени) в настоящее время все большее внимание уделяется обработке сигналов зависящих от двух и более независимых переменных. На практике наибольшее внимание уделяется обработке полей, которые, как правило, описываются функцией, зависящей от двух независимых переменных. К таким задачам, в которых входной сигнал является функцией двух независимых переменных, относятся задачи обработки изображений, обработки сигналов антенных решеток в радио- и гидролокации, сейсмологии, радиоастрономии, медицине. Отметим, что в некоторых задачах входной сигнал зависит и от большего числа переменных, например в задачах обработки голографических сигналов. Однако эти трехмерные задачи также могут быть сведены к задачам риддельной обработки двумерных сигналов с последующим объединением полученных результатов [37, 45, 116–122].

По определению, цифровая обработка цифровых сигналов представляет собой обработку переменных в виде двумерных массивов чисел, получаемых, например, после дискретизации изображений или параллельной дискретизации непрерывных сигналов от нескольких датчиков.

К особенностям обработки двумерных массивов можно отнести [116]:

- значительно больший объем данных подлежащих обработке по сравнению с одномерным случаем;
- математические методы описания систем не обладают, в общем случае, той гибкостью и завершенностью как для одномерных сигналов;
- двумерные системы обладают значительно большим числом степеней свободы, в результате чего проектирование обладает значительной гибкостью, несвойственной одномерным системам обработки.

Так в одномерном случае ЦФ полностью реализуются на основе использования математического аппарата, использующего разностные уравнения,

а для двумерного – это может быть использовано лишь частично. Вычисление ДПФ можно реализовать либо прямым способом, либо одним из «быстрых» алгоритмов их вычисления, т.е. при помощи БПФ. В двумерном случае возможны комбинации по использованию указанных алгоритмов, не говоря уже о том, что могут быть использованы и комбинации различных БПФ. В одномерном случае частота отсчетов выбирается в соответствии с теоремой отсчетов, а в двумерном – выбирается не только частота отсчетов, но и форма раstra дискретизации. Другим отличием является то, что передаточные функции, описываемые отношением полиномов и зависящих от двух переменных, не всегда могут быть представлены в виде произведения одномерных по каждой из переменных. Это означает, что в общем случае двумерная обработка может существенно отличаться от одномерной.

Учитывая, что в дальнейшем рассматриваются вопросы двумерной обработки сигналов, являющихся двумерными массивами чисел, термин «двумерный» будет опускаться в тех случаях, когда нет особых отличий от обработки сигналов, зависящих только от одной независимой переменной.

### 15.2. Двумерная теорема дискретизации и основные определения

Получение двумерного поля чисел реализуется путем взятия выборок из непрерывного двумерного поля, каждая точка которого, как правило, представляется в декартовых координатах величиной с индексами, соответствующими значениям ее координат. Для двумерных комплексных последовательностей используется обозначение вида  $\hat{x}(n_1, n_2)$ ,  $M_1 \leq n_1 \leq N_1$ ,  $M_2 \leq n_2 \leq N_2$ , где  $M_1, M_2 = -\infty$  и  $N_1, N_2 = \infty$  для последовательностей бесконечных по обеим координатам, которые описывают двумерный массив чисел, т.е. это функция, определенная на совокупности упорядоченных пар целых чисел.

Для получения такого двумерного массива чисел из непрерывного двумерного поля используются условия, накладываемые теоремой отсчетов, которая формулируется следующим образом [116].

Комплексная функция двух переменных  $\hat{x}(n_1, n_2)$ , двумерное преобразование Фурье для которой равно нулю при  $\omega_1 \geq \omega_{1\max}$  и  $\omega_2 \geq \omega_{2\max}$ , однозначно определяется своими значениями в равномерно распределенных точках плоскости переменных  $(n_1, n_2)$ , если интервалы дискретизации  $T_1$  и  $T_2$  удовлетворяют условиям  $T_1 \leq \pi/\omega_{1\max}$  и  $T_2 \leq \pi/\omega_{2\max}$  в случае, если обработка двумерных сигналов осуществляется в двумерных комплексных частотно-избирательных системах и требуется удовлетворение условий  $T_1 \leq \pi/\omega_{1\max}$  и  $T_2 \leq \pi/\omega_{2\max}$  в случае, когда обработка осуществляется в двумерных действительных частотно-избирательных устройствах.

В дальнейшем будем полагать, что  $T_1 = T_2 = F_1^{-1} = F_2^{-1} = F_{\max}^{-1} = 1$ , если не оговорено особо.

Получаемые отсчеты двумерной последовательности в результате дискретизации могут быть или комплексными или вещественными. На рис. 15.1 изображено, в качестве примера, графическое представление действительной двумерной последовательности.

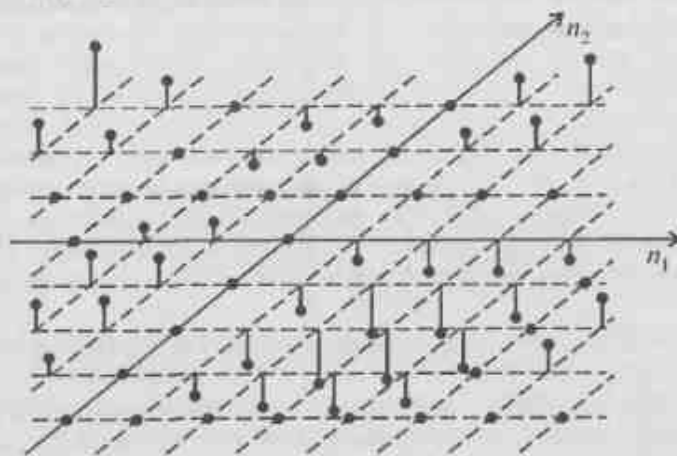


Рис. 15.1. Графическое представление действительной двумерной последовательности

В соответствии с приведенными выше определениями, двумерные последовательности имеют бесконечную протяженность. Однако на практике для большинства двумерных последовательностей значения отсчетов известны только в конечной области плоскости  $(n_1, n_2)$ . Например, при обработке фотографии, за ее краями отсчеты не берутся. Однако при анализе проще полагать, что значения отсчетов за пределами определенной области равны нулю.

### 15.3. Некоторые особые последовательности

К особым последовательностям относят следующие двумерные тестовые последовательности [45, 116].

15.3.1. Двумерный единичный импульс определяется следующим образом

$$\delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } n_1 = n_2 = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (15.1)$$

Двумерный единичный импульс можно записать через произведение одномерных единичных импульсов

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0, \end{cases}$$

в виде  $\delta(n_1, n_2) = \delta(n_1)\delta(n_2)$ .

На рис. 15.2. изображено стилизованное графическое представление двумерного единичного импульса, где жирной точкой обозначено его местонахождение на плоскости  $(n_1, n_2)$ , а маленькими точками обозначено местоположение нулей.

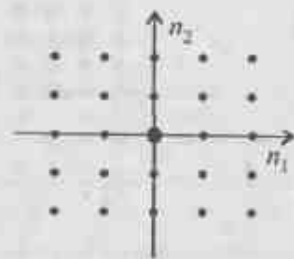


Рис. 15.2. Двумерный единичный импульс  $\delta(n_1, n_2)$

15.3.2. Двумерный линейный импульс – это последовательность, имеющая постоянное значение в одном направлении и импульсная – в другом.

Последовательности  $x(n_1, n_2) = \delta(n_1)$  и  $y(n_1, n_2) = \delta(n_2)$ , показанные на рис. 15.3,а и рис. 15.3,б соответственно, являются примерами линейных импульсов.

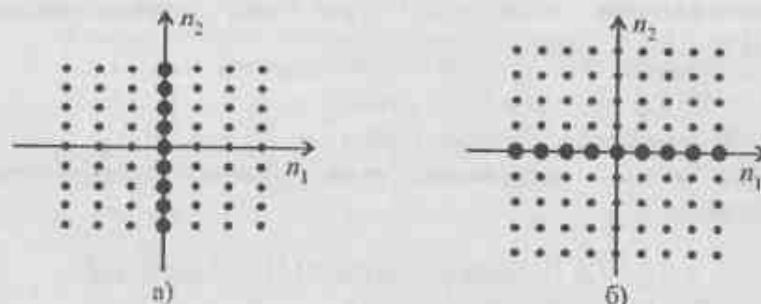


Рис. 15.3. Примеры двумерных линейных импульсов: а) вертикальные; б) горизонтальные

15.3.3. Двумерная единичная ступенька определяется в виде

$$U(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } n_1 \geq 0 \text{ и } n_2 \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (15.2)$$

Выражение (15.2) можно также записать в виде  $U(n_1, n_2) = U(n_1)U(n_2)$ ,

$$\text{где } U(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0, \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

На рис. 15.4 в стилизованном виде изображена двумерная единичная ступенька  $U(n_1, n_2)$ .

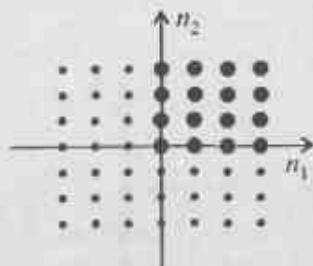


Рис. 15.4. Двумерная единичная ступенька  $U(n_1, n_2)$

15.3.4. Двумерная комплексная экспоненциальная последовательность определяется в виде

$$\hat{x}(n_1, n_2) = \hat{a}^{n_1} \hat{b}^{n_2},$$

где  $-\infty < n_1, n_2 < \infty$ ;  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  — комплексные числа.

Если абсолютные значения  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  равны единице, то их можно записать в виде  $\hat{a} = \exp(j\omega_1)$ ,  $\hat{b} = \exp(j\omega_2)$ . В этом случае двумерная экспоненциальная последовательность принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{x}(n_1, n_2) &= \hat{a}^{n_1} \hat{b}^{n_2} = \exp(j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2) = \\ &= \cos(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2) + j \sin(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2). \end{aligned} \quad (15.3)$$

Здесь  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — вещественные числа, называемые горизонтальными и вертикальными пространственными частотами соответственно. Двумерные экспоненциальные последовательности во многих случаях являются собственными функциями двумерных линейных систем инвариантных сдвику, которые будут рассматриваться далее.

#### 15.4. Основные виды двумерных последовательностей

15.4.1. По определению, любую двумерную последовательность  $\hat{x}(n_1, n_2)$ , которую можно представить в виде произведения одномерных  $\hat{x}_1(n_1)$  и  $\hat{x}_2(n_2)$ , называют *разделимой*, т.е. она имеет вид

$$\hat{x}(n_1, n_2) = \hat{x}_1(n_1)\hat{x}_2(n_2). \quad (15.4)$$

Несмотря на то, что на практике лишь немногие двумерные сигналы можно отнести к разделимым, принципиально возможно любое двумерное множество с конечным числом ненулевых отсчетов записать в виде суммы конечного числа разделимых последовательностей, т.е. представить в виде

$$\hat{x}(n_1, n_2) = \sum_{i=1}^N \hat{x}_{i1}(n_1)\hat{x}_{i2}(n_2),$$

где  $N$  — число ненулевых строк или столбцов.

Простейшее представление такого рода можно получить, если выразить  $\hat{x}(n_1, n_2)$  в виде суммы отдельных строк последовательности. Для этого нужно принять  $\hat{x}_{i1}(n_1) = \hat{x}(n_1, i)$  и  $\hat{x}_{i2}(n_2) = \delta(n_2 - i)$ . Иногда бывают другие разложения двумерных разделимых последовательностей.

15.4.2. Важным классом дискретных сигналов являются двумерные последовательности *конечной протяженности*. Эти сигналы равны нулю вне области конечной протяженности на плоскости  $(n_1, n_2)$ . Эта область называется *опорной областью* сигнала. Одна из типичных последовательностей конечной протяженности изображена в виде жирных точек на рис. 15.5.

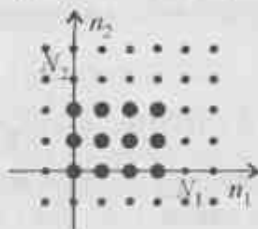


Рис. 15.5. Опорная область прямоугольной формы

Видно, что она отлична от нуля только внутри прямоугольника  $0 \leq n_1 < N_1$ ,  $0 \leq n_2 < N_2$ . Области прямоугольной и квадратной форм чаще других используются в качестве опорных областей последовательностей конечной протяженности. Но могут быть и другие формы этих областей.

15.4.3. Двумерная периодическая последовательность есть сигнал регулярно повторяющийся в пространстве. Двумерная периодическая последовательность  $\hat{x}(n_1, n_2)$  удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{aligned} \hat{x}(n_1, n_2 + N_2) &= \hat{x}(n_1, n_2), \\ \hat{x}(n_1 + N_1, n_2) &= \hat{x}(n_1, n_2). \end{aligned} \quad (15.5)$$

Величины  $N_1$  и  $N_2$  в этом случае представляют собой минимальные положительные целые числа для которых справедливо выражение (15.5), и

которые называются горизонтальными и вертикальными интервалами периодичности последовательности  $\tilde{x}(n_1, n_2)$ .

Общие условия периодичности имеют вид

$$\tilde{x}(n_1 + N_{11}, n_2 + N_{21}) = \tilde{x}(n_1, n_2),$$

$$\tilde{x}(n_1 + N_{12}, n_2 + N_{22}) = \tilde{x}(n_1, n_2).$$

На рис. 15.6,а и рис. 15.6,б изображены примеры двумерных периодических последовательностей.



Рис. 15.6. Примеры двумерных периодических последовательностей: а) в виде «уголка»; б) в виде «ракеты»

Периодом двумерной последовательности  $\tilde{x}(n_1, n_2)$  называют любую связную область плоскости  $(n_1, n_2)$  содержащую точно  $N_1 N_2$  отсчетов, если значения этих отсчетов независимы. Наиболее удобной формой полагают прямоугольную, однако, как показано на рис. 15.6,а и рис. 15.6,б, это не единственно возможная форма.

15.4.4. Основными операциями над двумерными сигналами являются [116]:

- сложение  $y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) + \tilde{x}(n_1, n_2)$ ;
- умножение на константу  $y(n_1, n_2) = Cx(n_1, n_2)$ ;
- сдвига  $y(n_1, n_2) = x(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$ , где  $m_1$  и  $m_2$  – величины сдвига.

На рис. 15.7,а и рис. 15.7,б приведен пример сдвига двумерной последовательности.



Рис. 15.7. Пример сдвига двумерной последовательности: а) без сдвига; б) со сдвигом

Используя эти операции можно любую двумерную последовательность разложить на сумму взвешенных и сдвинутых единичных импульсов (15.1)

$$\tilde{x}(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1, k_2) \delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2),$$

где  $\delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$  – единичный импульс сдвинутый так, что ненулевой отсчет находится в точке  $(k_1, k_2)$ .

15.4.5. В двумерной обработке существует специфическая операция называемая *пространственным масштабированием*, которую можно рассматривать как обобщение операции скалярного умножения. В этом случае значения каждого отсчета двумерной последовательности  $\tilde{x}(n_1, n_2)$  умножают на число  $C(n_1, n_2)$ , значение которого зависит от положения соответствующего отсчета, в результате чего имеем

$$y(n_1, n_2) = C(n_1, n_2) \tilde{x}(n_1, n_2).$$

Совокупность чисел  $C(n_1, n_2)$  можно также рассматривать как двумерную последовательность (комплексных или действительных) чисел. В этом случае правая часть последнего выражения может рассматриваться как поэлементное произведение двух двумерных последовательностей.

### 15.5. Двумерные линейные системы

15.5.1. По определению, если для всех входных сигналов  $\tilde{x}_1(n_1, n_2)$  и  $\tilde{x}_2(n_1, n_2)$  и любых комплексных константах  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$  выполняются операции

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(n_1, n_2) &= L[\tilde{x}_1(n_1, n_2)], \\ \tilde{y}_2(n_1, n_2) &= L[\tilde{x}_2(n_1, n_2)], \end{aligned} \quad (15.6)$$

$$\tilde{a}\tilde{y}_1(n_1, n_2) + \tilde{b}\tilde{y}_2(n_1, n_2) = L[\tilde{a}\tilde{x}_1(n_1, n_2) + \tilde{b}\tilde{x}_2(n_1, n_2)],$$

то такие двумерные системы называются *линейными*.

Если использовать свойства линейных систем (15.6), то можно записать

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(n_1, n_2) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1, k_2) L[\delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2)] = \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1, k_2) \tilde{h}_{k_1, k_2}(n_1, n_2), \end{aligned}$$

где  $\tilde{h}_{k_1, k_2}(n_1, n_2)$  – двумерный импульсный отклик системы (двумерная импульсная характеристика) на единичный импульс (15.1), расположенный на плоскости  $(n_1, n_2)$  в точке  $(k_1, k_2)$ .

Если для каждой точки  $(k_1, k_2)$ , расположенной на плоскости  $(n_1, n_2)$ , известен двумерный импульсный отклик  $h_{k_1, k_2}(n_1, n_2)$  на произвольно расположенный входной единичный импульс (15.1), то двумерный выходной отклик линейной двумерной системы на любой двумерный входной сигнал можно найти с помощью принципа суперпозиции.

15.5.2. Двумерными *линейными системами инвариантными к сдвигу* (ЛИС-системы) являются системы, у которых двумерный импульсный отклик на произвольно расположенный входной единичный импульс (15.1) описывается выражением

$$h_{k_1, k_2}(n_1, n_2) = L[\delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2)].$$

Двумерный выходной отклик ЛИС-системы на произвольный двумерный входной сигнал описывается выражением [45, 116]

$$y_1(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1, k_2) h(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \quad (15.7)$$

Выражение (15.7) носит название *двумерной дискретной свертки*. Другая запись выражения (15.7) имеет вид

$$y_1(n_1, n_2) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} h(l_1, l_2) x(n_1 - l_1, n_2 - l_2). \quad (15.8)$$

Выражения (15.7) и (15.8) могут быть записаны в формах

$$y_1(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) \quad \text{и} \quad y_2(n_1, n_2) = h(n_1, n_2) * x(n_1, n_2)$$

соответственно.

На рис. 15.8,а – рис. 15.8,д изображены примеры двумерных сверток квадратичного действительного двумерного импульса с двумерной ступенчатой последовательностью, описываемой выражением (15.4).

Здесь ненулевые области каждой двумерной последовательности заштрихованы одной чертой, а двумерные последовательности, представляющие собой двумерные свертки, двумя перекрестными чертами.

15.5.3. Двумерной *разделимой* ЛИС-системой называется такая ЛИС-система у которой двумерная импульсная характеристика является разделимой последовательностью [116]. При этом не обязательно обрабатываемый двумерный сигнал и получающийся в результате обработки двумерный выходной сигнал являются разделимыми.

В случае, если двумерная ЛИС-система является разделимой, то свертка факторизуется.

Пусть двумерная импульсная характеристика имеет вид  $h(n_1, n_2) = h_1(n_1)h_2(n_2)$ .

Выходной двумерный сигнал

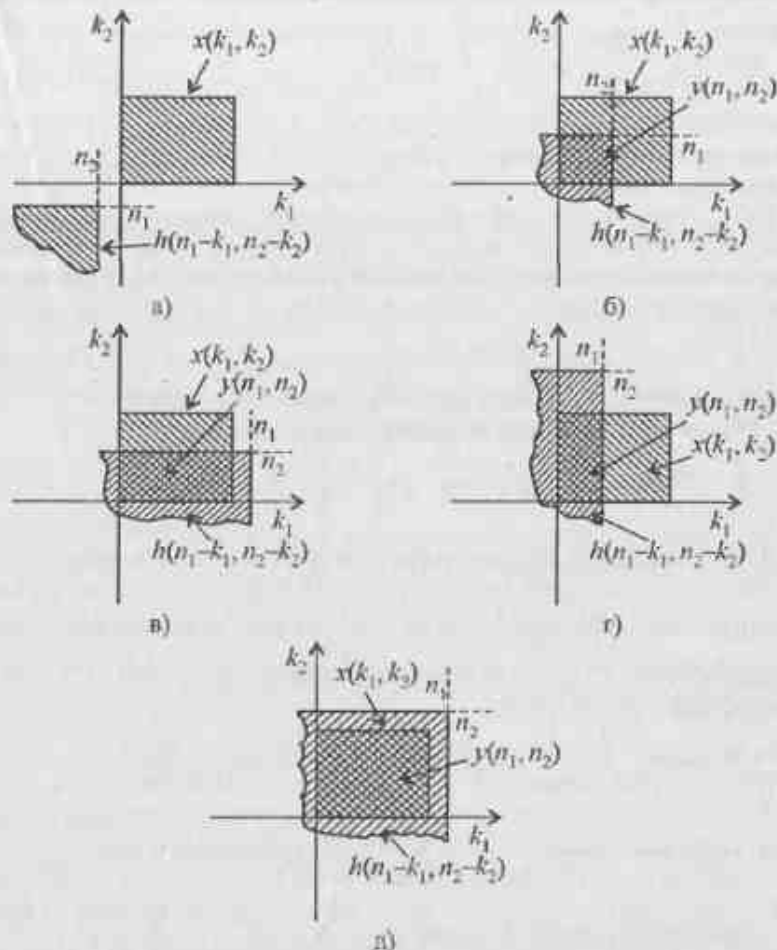


Рис. 15.8. Примеры двумерных сверток квадратичного действительного двумерного импульса с двумерной ступенчатой последовательностью

$$y_1(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) h_1(k_1) h_2(k_2) = \\ = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h_1(k_1) \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) h_2(k_2).$$

Внутренняя сумма представляет собой двумерный массив чисел. Если определить  $\hat{g}(n_1, n_2)$  в виде

$$\hat{g}(n_1, n_2) = \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n_1, n_2 - k_2) \hat{h}_2(k_2),$$

$$\text{то } y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \hat{h}_1(k_1) \hat{g}(n_1 - k_1, n_2).$$

Массив  $\hat{g}(n_1, n_2)$  можно вычислить выполняя свертку каждого столбца  $\hat{x}(n_1 = \text{const}, n_2)$  с одномерной последовательностью  $\hat{h}_2(k_2)$ . Тогда выходной массив  $y(n_1, n_2)$  вычисляется путем свертки каждой строки  $\hat{g}(n_1, n_2 = \text{const})$  с одномерной последовательностью  $\hat{h}_1(k_1)$ . Отметим, что можно указанные операции выполнять и в обратном порядке.

ЛИС-система устойчива, если выполняется условие [116, 117]

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |\hat{h}(n_1, n_2)| = S < \infty.$$

15.5.4 Частотный отклик двумерной ЛИС-системы определяется следующим образом. Пусть имеем двумерную ЛИС-систему с двумерной импульсной характеристикой  $h(n_1, n_2)$  на которую воздействует двумерный входной сигнал  $\hat{x}(n_1, n_2)$ , описываемый выражением (15.3). Тогда двумерный выходной отклик будет

$$\begin{aligned} \hat{y}(n_1, n_2) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \exp[j\omega_1(n_1 - k_1) + j\omega_2(n_2 - k_2)] \hat{h}(k_1, k_2) = \\ &= \exp(j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2) \left[ \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k_1, k_2) \exp(-j\omega_1 k_1 - j\omega_2 k_2) \right] = \\ &= \exp(j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2) \hat{H}(j\omega_1, j\omega_2). \end{aligned}$$

Множитель  $\hat{H}(j\omega_1, j\omega_2)$  носит название *двумерного частотного отклика* (двумерной амплитудно-фазочастотной характеристики) ЛИС-системы и описывается выражением

$$\hat{H}(j\omega_1, j\omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \hat{h}(n_1, n_2) \exp(-j\omega_1 n_1 - j\omega_2 n_2). \quad (15.9)$$

Величина  $\hat{H}(j\omega_1, j\omega_2)$  периодична с периодом  $2\pi$  по обоим пространственным частотам

$$\begin{aligned} \hat{H}[j(\omega_1 + 2\pi), j\omega_2] &= \hat{H}(j\omega_1, j\omega_2), \\ \hat{H}[j\omega_1, j(\omega_2 + 2\pi)] &= \hat{H}(j\omega_1, j\omega_2). \end{aligned}$$

Пример 1. Рассмотрим частотный отклик системы с импульсной характеристикой вида [116]

$$h(n_1, n_2) = \begin{cases} 0,125 & \text{при } n_1 = \pm 1, \quad n_2 = \pm 1; \\ 0,25 & \text{при } n_1 = \pm 1, \quad n_2 = 0; \\ 0,25 & \text{при } n_1 = 0, \quad n_2 = \pm 1; \\ 0,5 & \text{при } n_1 = n_2 = 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

На рис. 15.9 изображены в графическом виде отсчеты действительной двумерной импульсной характеристики, причем диаметр точек пропорционален (условно) их весу.

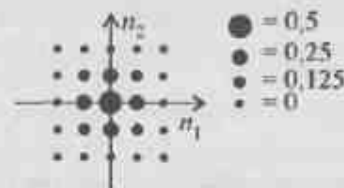


Рис. 15.9. Графическое изображение действительной двумерной импульсной характеристики

Используя определение двумерного частотного отклика (15.9), получаем

$$\begin{aligned} \hat{H}(j\omega_1, j\omega_2) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} h(n_1, n_2) \exp(-j\omega_1 n_1 - j\omega_2 n_2) = \\ &= 0,5 + 0,25(e^{-j\omega_1} + e^{j\omega_1} + e^{-j\omega_2} + e^{j\omega_2}) + \\ &+ 0,125(e^{-j\omega_1} e^{-j\omega_2} + e^{-j\omega_1} e^{j\omega_2} + e^{j\omega_1} e^{-j\omega_2} + e^{j\omega_1} e^{j\omega_2}) = \\ &= 0,5(1 + \cos \omega_1)(1 + \cos \omega_2). \end{aligned}$$

На рис. 15.10 изображен двумерный амплитудно-частотный отклик, описывающий простейший двумерный фильтр нижних пространственных частот.

Рассмотренная двумерная ЛИС-система имеет разделимую двумерную импульсную характеристику, а, следовательно, и двумерный амплитудно-частотный отклик является разделимой функцией, т.е. если  $\hat{h}(n_1, n_2) = \hat{h}(n_1) \hat{h}(n_2)$ , то  $\hat{H}(j\omega_1, j\omega_2) = \hat{H}(j\omega_1) \hat{H}(j\omega_2)$ .

Двумерная импульсная характеристика по двумерному частотному отклику определяется в виде

$$\hat{h}(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{H}(j\omega_1, j\omega_2) \exp(j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (15.10)$$



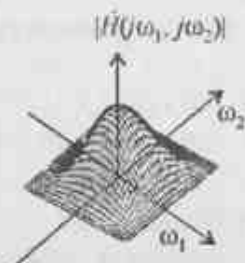


Рис. 15.10. Двумерный амплитудно-частотный отклик простейшего двумерного фильтра пространственных частот

Пример 2. Пусть имеем двумерный амплитудно-частотный отклик системы в виде [116]

$$H(j\omega_1, j\omega_2) = \begin{cases} 1 & \text{если } |\omega_1| \leq a < \pi, \quad |\omega_2| \leq b < \pi; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

На рис. 15.11 изображен двумерный амплитудно-частотный отклик идеального двумерного фильтра нижних пространственных частот.

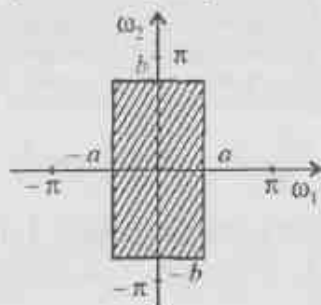


Рис. 15.11. Двумерный амплитудно-частотный отклик идеального двумерного фильтра нижних пространственных частот

Подставляя последнее выражение в (15.10) получим

$$\begin{aligned} h(n_1, n_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \exp(j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \exp(j\omega_1 n_1) d\omega_1 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \exp(j\omega_2 n_2) d\omega_2 = \frac{\sin an_1}{an_1} \frac{\sin bn_2}{bn_2}. \end{aligned}$$

Видно, что форма двумерной импульсной характеристики имеет вид функции  $\sin x/x$  по обеим координатам.

Пример 3. Пусть имеем двумерный амплитудно-частотный отклик системы в виде [116]

$$H(j\omega_1, j\omega_2) = \begin{cases} 1 & \text{если } \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq R^2 < \pi^2; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

На рис. 15.12 изображен двумерный амплитудно-частотный отклик двумерного фильтра нижних пространственных частот с круговой симметрией.

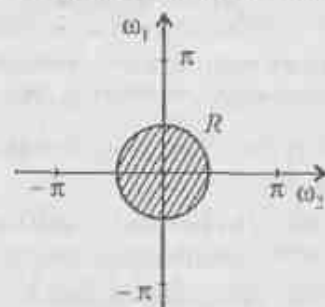


Рис. 15.12. Двумерный амплитудно-частотный отклик двумерного фильтра нижних пространственных частот с круговой симметрией

Этот двумерный амплитудно-частотный отклик не является разделимым. В этом случае будем иметь

$$h(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_A \exp(j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2.$$

Переходя к полярным координатам и после ряда преобразований, окончательно получаем [116]

$$h(n_1, n_2) = \frac{R}{2\pi} \frac{J_1(R\sqrt{n_1^2 + n_2^2})}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}},$$

где  $J(x)$  – функция Бесселя первого рода первого порядка. Этот импульсный отклик является дискретной функцией с круговой симметрией.

### 15.6. Особенности синтеза разделимых двумерных многопроцессорных полосовых и режекторных фильтров

Полосовыми и режекторными разделимыми многопроцессорными двумерными фильтрами пространственных частот будем называть такие цифровые двумерные фильтры, у которых имеется локализованная в окрестности некоторой ненулевой точки  $(\Omega_1, \Omega_2)$  на двумерной плоскости пространственных частот  $(\omega_1, \omega_2)$  область прозрачности или режекции, кото-

рую окружает переходная область. Остальная часть двумерной плоскости пространственных частот  $(\omega_1, \omega_2)$  является соответственно областью режекции или прозрачности [123]. Отметим, что цифровые двумерные разделимые фильтры нижних и верхних пространственных частот являются частными случаями полосовых и режекторных двумерных фильтров, когда  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$  на двумерной плоскости пространственных частот  $(\omega_1, \omega_2)$ .

По определению, реализация многопроцессорного двумерного разделимого фильтра может рассматриваться в виде соответствующего соединения многопроцессорных одномерных, которые были рассмотрены в предыдущих главах. В случае реализации двумерного разделимого фильтра в виде последовательного соединения одномерных ячеек, результирующая АЧХ будет

$$H(\omega_1, \omega_2)_{\text{посл}} = H_1(\omega_1)H_2(\omega_2).$$

В этом случае целесообразно называть полученный двумерный разделимый фильтр фильтром *последовательного* типа.

При параллельном соединении одномерных ячеек результирующая двумерная АЧХ примет вид

$$H(\omega_1, \omega_2)_{\text{пар}} = \sqrt{H_1^2(\omega_1) + H_2^2(\omega_2)}.$$

В последнем случае полученный двумерный разделимый фильтр целесообразно называть двумерным фильтром *параллельного* типа.

Различие между этими двумя видами фильтров заключается в форме результирующей АЧХ. Для полосового двумерного фильтра последовательного типа получаемые результирующие АЧХ имеют вид «холма», а для полосового двумерного фильтра параллельного типа имеют вид пересекающихся «хребтов» на двумерной плоскости пространственных частот  $(\omega_1, \omega_2)$ . Для режекторного двумерного фильтра последовательного типа получающаяся двумерная АЧХ будет иметь вид пересекающихся «оврагов», а для режекторного двумерного фильтра параллельного типа будет иметь вид «ямы» на двумерной плоскости пространственных частот  $(\omega_1, \omega_2)$ .

Для синтеза двумерных разделимых цифровых фильтров можно использовать методику синтеза цифровых одномерных многопроцессорных фильтров, которая подробно изложена в главе 6 и основана на использовании элементарных цифровых ячеек с БИХ. Отличительной особенностью рассматриваемых процедур является необходимость учета двумерного характера полученного результата, которую следует учесть на этапе задания нормированных параметров.

С учетом вышеизложенного, как показано в [123], нормированные параметры для одномерных многопроцессорных фильтров определяются в соответствии с выражениями, приводимыми в табл. 15.1.

Таблица 15.1

Формулы перехода к нормированным параметрам двумерных фильтров

Типы двумерных фильтров	Нормированный параметр			
	$f_c$	$f_r$	$A$	$(1 + \varepsilon^2)$
Полосовой последовательного типа	$\frac{f_{cp}}{2}$	$\frac{f_{rp}}{2}$	$A_n$	$\sqrt{1 + \varepsilon_n^2}$
Полосовой параллельного типа	$\frac{f_{cp}}{2}$	$\frac{f_{rp}}{2}$	$A_n$	$\frac{1 + \varepsilon_n^2}{2}$
Режекторный последовательного типа	$\frac{F_{\max} - f_{rp}}{2}$	$\frac{F_{\max} - f_{cp}}{2}$	$A_n$	$\sqrt{1 + \varepsilon_p^2}$
Режекторный параллельного типа	$\frac{F_{\max} - f_{rp}}{2}$	$\frac{F_{\max} - f_{cp}}{2}$	$A_n$	$\frac{1 + \varepsilon_p^2}{2}$

После нахождения нормированных параметров расчет далее осуществляется в соответствии с методиками, описанными для случаев использования тангенсных ячеек (для полосовых и режекторных двумерных фильтров), синусных или квазитангенсных (для расчета полосовых двумерных фильтров), как изложено в главе 6.

В том случае, когда в силу тех или иных причин нецелесообразно использовать элементарные ячейки с БИХ, находят применение двумерные разделимые фильтры с КИХ. При этом также могут находить применение методики расчетов, используемые для соответствующих одномерных фильтров, как показано в [37, 60].

Простейший двумерный неркурсивный КИХ фильтр нижних частот, предназначенный для обработки действительных отсчетов и находящий применение в некоторых специализированных телевизионных призмных устройствах, изображен на рис. 15.13,а, а на рис. 15.13,б изображены обрабатываемые отсчеты.

Данное устройство предназначено для повышения отношения сигнал/шум на выходе за счет использования полезной информации с соседних элементов плоскости  $(n_1, n_2)$ . Передаточная функция этого двумерного КИХ-фильтра на двумерной Z-плоскости имеет вид

$$H(z_1, z_2) = 1 + \alpha z_1^{-1} + \beta z_2^{-1} + \gamma z_1^{-1} z_2^{-1},$$

где  $z_1^{-1} = \exp(-j\omega_1 T_1)$ ;  $z_2^{-1} = \exp(-j\omega_2 T_2)$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  – весовые коэффициенты;  $T_1$  и  $T_2$  – интервалы дискретизации вдоль строк и столбцов соответственно.

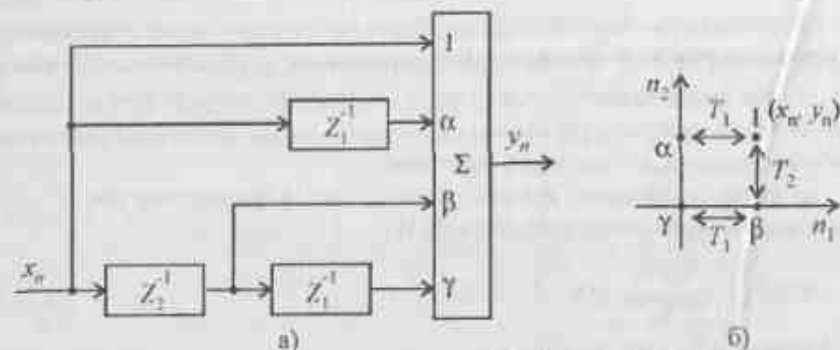


Рис. 15.13. Простейший двумерный цифровой КИХ фильтр:  
 а) структурная схема;  
 б) пространственное расположение обрабатываемых отсчетов

Работает устройство следующим образом. Отсчеты входного сигнала  $x(nT)$  в момент времени  $n = 0$  поступают на вход сумматора  $\Sigma$ . В этот же момент времени на другие его входы поступают, умножаясь на заданные весовые коэффициенты, отсчеты  $\alpha x(nT - T_1)$ ,  $\beta x(nT - T_2)$  и  $\gamma x(nT - T_1 - T_2)$ , которые были на входе устройства в соответствующие моменты времени. Видно, что интервал времени  $T_1$  соответствует времени прохождения луча в электронно-лучевой трубке между соседними элементами, расстояние между которыми определяется ее разрешающей способностью, а интервал времени  $T_2$  соответствует периоду повторения строк развертки.

### 15.7. Двумерное дискретное преобразование Фурье

Если посмотреть на оператор обратного преобразования частотного отклика (15.10), то видно, что последовательность  $\hat{x}(n_1, n_2)$  представляет собой суперпозицию комплексных синусоид [116].

Можно использовать аналогичное представление для двумерной входной последовательности  $\hat{x}(n_1, n_2)$ , которое будет

$$\hat{x}(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(j\omega_1, j\omega_2) \exp(j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (15.11)$$

Комплексная функция  $\hat{X}(j\omega_1, j\omega_2)$ , известная как двумерное преобразование Фурье функции  $\hat{x}(n_1, n_2)$ , определяется в виде

$$\hat{X}(j\omega_1, j\omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n_1, n_2) \exp(-j\omega_1 n_1 - j\omega_2 n_2). \quad (15.12)$$

Если положить, что входная двумерная последовательность периодична с горизонтальными и вертикальными периодами, определяемыми числами  $N_1$  и  $N_2$  соответственно, т.е.  $\hat{x}(n_1, n_2) = \hat{x}(n_1 + N_1, n_2) = \hat{x}(n_1, n_2 + N_2)$ , то такую последовательность можно представить в виде конечной суммы комплексных синусоид с кратными частотами.

Тогда двумерную последовательность (15.11) можно записать в виде двумерного дискретного ряда Фурье [116]

$$\hat{x}(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \hat{X}(k_1, k_2) \exp(j \frac{2\pi}{N_1} n_1 k_1 + j \frac{2\pi}{N_2} n_2 k_2). \quad (15.13)$$

Комплексная синусоида

$$\exp(j \frac{2\pi}{N_1} n_1 k_1 + j \frac{2\pi}{N_2} n_2 k_2)$$

прямоугольно-периодична с горизонтальным периодом  $N_1$  и вертикальным периодом  $N_2$  для всех значений параметров  $k_1$  и  $k_2$ . Числа  $\hat{X}(k_1, k_2)$  называются коэффициентами двумерного ряда Фурье и находятся, с учетом (15.12), с помощью равенства

$$\hat{X}(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \hat{x}(n_1, n_2) \exp(-j \frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1 - j \frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2). \quad (15.14)$$

Видно, что функция  $\hat{X}(k_1, k_2)$  может также рассматриваться как периодическая функция с горизонтальным периодом  $N_1$  и вертикальным периодом  $N_2$ .

Периодическую последовательность  $\hat{x}(n_1, n_2)$  можно легко построить из двумерной последовательности конечной протяженности  $\hat{x}(n_1, n_2)$  если ее повторять по вертикали и горизонтали.

Тогда можно записать

$$\hat{x}(n_1, n_2) = \begin{cases} \hat{x}(n_1, n_2) & \text{при } (n_1, n_2) \in R_{N_1, N_2}; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (15.15)$$

при условии, что в опорной области  $R_{N_1, N_2}$  последовательности  $\hat{x}(n_1, n_2)$  и  $\hat{x}(n_1, n_2)$  равны. Иногда последовательность  $\hat{x}(n_1, n_2)$  называют периодическим продолжением последовательности  $\hat{x}(n_1, n_2)$ .

Аналогично, можно рассматривать двумерную периодическую последовательность  $\hat{X}(k_1, k_2)$  как периодическое продолжение двумерной последо-

вательности конечной протяженности, состоящей из коэффициентов ряда Фурье  $\hat{X}(k_1, k_2)$ .

Следовательно можно записать

$$\hat{X}(k_1, k_2) = \begin{cases} \hat{x}(k_1, k_2) & \text{при } 0 \leq k_1 \leq N_1 - 1; 0 \leq k_2 \leq N_2 - 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (15.16)$$

Поскольку  $\hat{x}(n_1, n_2)$  и  $\hat{X}(k_1, k_2)$  связаны между собой равенствами (15.13) и (15.14), то, используя равенства (15.15) и (15.16), можно записать прямое и обратное двумерное преобразование Фурье в виде

$$\hat{X}(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \hat{x}(n_1, n_2) \exp(-j \frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1 - j \frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2) \quad (15.17)$$

для  $0 \leq k_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq k_2 \leq N_2 - 1$ ;

$$\hat{x}(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \hat{X}(k_1, k_2) \exp(j \frac{2\pi}{N_1} n_1 k_1 + j \frac{2\pi}{N_2} n_2 k_2) \quad (15.18)$$

для  $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ .

Отметим, что преобразование Фурье двумерной последовательности конечной протяженности  $\hat{x}(n_1, n_2)$  с опорной областью  $R_{N_1, N_2}$  описывается выражением (15.12). Если в выражении (15.17) подставить вместо последовательности конечной протяженности  $\hat{x}(n_1, n_2)$  выражение для двумерной импульсной характеристики  $\hat{h}(n_1, n_2)$ , то в результате получится выражение, описывающее двумерный дискретный частотный отклик  $\hat{H}(k_1, k_2)$ , который примет вид

$$\hat{H}(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \hat{h}(n_1, n_2) \exp(-j \frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1 - j \frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2) \quad (15.19)$$

для  $0 \leq k_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq k_2 \leq N_2 - 1$ .

Соответственно, по двумерному частотному отклику  $\hat{H}(k_1, k_2)$  можно определить двумерную дискретную импульсную характеристику  $\hat{h}(n_1, n_2)$  в виде

$$\hat{h}(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \hat{H}(k_1, k_2) \exp(j \frac{2\pi}{N_1} n_1 k_1 + j \frac{2\pi}{N_2} n_2 k_2) \quad (15.20)$$

для  $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ .

Очевидно, что выражения (15.19) и (15.20) удовлетворяют тем же условиям, что и выражения (15.17) и (15.18) соответственно.

### 15.8. Цифровая обработка изображений в режиме работы «скользящее» окно

15.8.1. Постоянный рост передаваемой информации при ограниченном числе каналов связи и их конечной пропускной способности с одновременным увеличением уровня помех, связанных с ростом числа передающих средств, потребовали разработки и применения различного рода алгоритмов, позволяющих обеспечить сжатие информации. К таким алгоритмам относятся широко известные алгоритмы ортогональных преобразований, к которым, в частности, относится дискретное преобразование Фурье (ДПФ), дискретное косинусное преобразование (ДКП), преобразование Уолша, Хаара, Адамара [14].

Наиболее информативными, с точки зрения объема заключенной в них информации, являются изображения, которые требуют для своей передачи и кодирования количества операций, достигающих величины  $10^6$ , что приводит к необходимости применения высокопроизводительных процессоров.

Одним из путей снижения числа операций при обработке изображений является использование режима «скользящее» окно. Этот режим позволяет достигать существенного сокращения числа операций за счет использования «быстрых» алгоритмов расчета, как по «строкам», так и по «столбцам» обрабатываемого кадра изображения.

Достаточно часто, по тем или иным причинам, покadroвая обработка изображений либо невозможна, либо не удовлетворяет потребителя информации.

Примером таких задач является задача получения радиолокационных карт местности, которые формируются на борту летательного аппарата, кодируются и передаются на приемный пункт. Ограничения, связанные с техническими возможностями формирования и обработки таких изображений, приводят к необходимости первоначального формирования кадров, а затем их кодирования путем ортогонального преобразования с последующей передачей информации по каналам связи.

Как показано в [12], двумерные линейные преобразования можно определить в виде результирующего двумерного отклика  $\hat{y}(n_1, n_2)$ , который описывается выражениями (15.7) или (15.8)

Более эффективная обработка отсчетов двумерного массива может быть достигнута, если предварительно подвергнуть двумерный массив  $\hat{x}(n_1, n_2)$  такому преобразованию, чтобы получился массив коэффициентов  $\hat{X}(k_1, k_2)$ . Затем составляется линейная комбинация этих коэффициентов, описываемая, в общем случае, формулой

$$\hat{Y}(k_1, k_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} H(k_1, k_2) X(k_1, k_2),$$

где  $H(k_1, k_2)$  определяется из (15.19).

На последнем этапе производится обратное двумерное преобразование массива  $\hat{Y}(k_1, k_2)$  в соответствии с выражением (15.18) чтобы получить обработанное изображение  $\hat{y}(n_1, n_2)$ .

Более высокая эффективность достигается за счет того, что в массиве  $\hat{X}(k_1, k_2)$  имеется достаточно большое количество отсчетов равных нулю, а, следовательно, не требуется производить операции умножения на нули.

15.8.2. В том случае, когда входной двумерный массив чисел  $\hat{x}(n_1, n_2)$  имеет ограничения по одной координате и нет ограничений размера по другой координате (т.е. изображение представляется в виде «ленты» бесконечной длины), то представляют входные данные в виде набора изображений, один из краев которых являются краями «ленты», а другие края соприкасаются соответственно с краями предыдущего и последующего «кадров». При этом размеры «кадров», как правило, выбираются по двум координатам одинаковыми и равными ширине «ленты». В этом случае, переход от массивов  $\hat{x}(n_1, n_2)$  к массиву  $\hat{Y}(k_1, k_2)$ , осуществляется как и для режима работы «скачущее» окно, т.е. производится вычисление двумерного БПФ, являющегося, очевидно, вычислением одномерных БПФ по «строкам» и «столбцам» каждого «кадра».

В том случае, когда требуется только передавать коэффициенты Фурье изображения, для сокращения избыточности полагается, что  $H(k_1, k_2) = 1$  для тех значений коэффициентов  $\hat{X}(k_1, k_2)$ , дисперсия которых больше заранее определенной величины  $C$  и  $H(k_1, k_2) = 0$  для тех значений коэффициентов  $\hat{X}(k_1, k_2)$ , дисперсия которых меньше уровня порога  $C$ .

Величина порога  $C$  определяется из тех или иных критериев и должна удовлетворять с одной стороны хорошему качеству восстанавливаемого изображения, а с другой стороны минимизировать количество передаваемой информации.

Следовательно, каждый сформированный указанным образом «кадр» изображения подвергается «быстрым» ортогональным преобразованиям по «строкам» и «столбцам», полученный двумерный массив коэффициентов  $\hat{Y}(k_1, k_2) = X^*(k_1, k_2)$ , пройдя указанную процедуру, подвергается обратному «быстрому» преобразованию по «столбцам» и «строкам» соответственно, причем в требуемых местах этого массива находятся коэффициенты, равные нулю и которые могут не передаваться от источника к получателю.

Иногда необходимо передавать информацию об изображении, получаемую последовательно во времени «строка» за «строкой», как, например, при полосном картографировании с борта летательного аппарата, либо при использовании телевизионных датчиков, обладающих разверткой только вдоль строки, а изображение формируется путем движения объекта мимо фокуса приемного устройства.

В этом случае формирование «кадра» для его передачи занимает много времени и смена информации происходит скачком, что не всегда удобно пользователю и может приводить к потере информации.

Тогда целесообразно использовать процедуру, в которой совмещаются «быстрые» алгоритмы ортогональных преобразований, ориентированные на обработку информации в режиме работы «скачущее» окно, и итеративные алгоритмы вычисления ортогональных преобразований, которые ориентированы на обработку в режиме работы «скользящее» окно.

При использовании указанной процедуры обеспечивается кодирование изображения в режиме работы «скользящее» окно, когда каждая вновь поступившая на обработку «строка» приводит к удалению из процесса обработки  $N+1$ -й «строки», записанной ранее, где  $N$  – число «строк» и «столбцов» в «кадре», «скользящем» вдоль «ленты» изображения.

Определим количество операций, которые требуются для выполнения подобной процедуры [124].

При выполнении двумерных ортогональных преобразований над неподвижными изображениями размерами  $N \times N$ , представленными в виде многомерных комплексных или действительных отсчетов при помощи «быстрых» алгоритмов, требуется  $2N^2 \log_2 N$  операций [121].

При обработке движущихся изображений формируемых «строка» за «строкой» при использовании обработки в режиме работы «скользящее» окно потребуется выполнение  $2N^3 \log_2 N$  операций при помощи «быстрых» алгоритмов ортогональных преобразований. Это связано с необходимостью последовательного выполнения двух одномерных «быстрых» преобразований при появлении каждой новой «строки», число которых на каждом «кадре» равно  $N$ .

Сокращения числа операций в режиме работы «скользящее» окно можно добиться используя следующую процедуру. При поступлении каждой новой «строки», состоящей из  $N$  комплексных или действительных отсчетов, производится одномерное вычисление ее коэффициентов по «быстрому» алгоритму расчета, что требует  $N \log_2 N$  операций.

Полученные коэффициенты располагаются на соответствующих местах «строки» (поперек «ленты» изображения) и являются входными данными для ортогонального преобразования по «столбцам» (вдоль «ленты» изображения).

Далее производится вычисление двумерных коэффициентов по рекуррентным алгоритмам, что обеспечивает режим «скользящее» окно, вдоль «столбцов», число которых равно  $N$  и количество данных в каждом из которых также равно  $N$ . Количество операций, выполняемых по рекуррентным алгоритмам, будет равно  $N^3$  операций.

Тогда, общее количество операций, необходимых для вычисления коэффициентов Фурье двумерных ортогональных преобразований при режиме работы «скользящее» окно на одном «кадре», будет равно

$$N^2(N + \log_2 N) = N^2 \log_2 2^N N.$$

Сравнение количества операций, производящихся над двумерным массивом чисел при режиме работы «скользящее» окно при использовании «быстрых» алгоритмов расчета с алгоритмами по предлагаемой процедуре дает экономию вычислений  $S$  определяемую выражением

$$S = 2N \log_2 N / (N + \log_2 N).$$

В том случае, когда на рекуррентный алгоритм подаются только те нормированные коэффициенты, полученные после «быстрых» алгоритмов расчета, которые превысили пороговый уровень  $C$  и количество которых  $q \leq N$ , то тогда количество операций при рекуррентном вычислении будет равно  $N^2 q$ , а величина их сокращения для двумерного массива будет

$$S_m = 2N \log_2 N / (q + \log_2 N).$$

Если представить  $N = Rq$ , где  $R \gg 1$ ,  $q \gg 1$ , выражение, показывающее сокращение количества операций, запишется в виде

$$\hat{S}_m \approx 2R \log_2 N.$$

Очевидно, что после рекуррентного вычисления часть полученных коэффициентов двумерного массива после нормировки также окажется ниже уровня  $C$ , что позволит еще больше сократить количество передаваемой информации.

15.8.3. Рассмотрим обработку двумерных массивов действительных сигналов с использованием «быстрых» и рекуррентных процедур расчета коэффициентов Фурье.

Как показано в 15.8.2, такая процедура позволяет сократить количество передаваемых двумерных коэффициентов после ортогонального преобразования двумерных массивов комплексных или действительных чисел, соответствующих «кадрам» изображений в режиме работы «скользящее» окно.

В работах [12, 37, 121] подробно рассмотрены алгоритмы и структуры, их реализующие, которые позволяют осуществлять обработку одномерных комплексных данных как в режиме обработки «скачущее» окно, так и «скользящее» окно. Эти алгоритмы легко могут быть использованы для об-

работки двумерных массивов комплексных чисел в силу рассмотренных выше свойств их разделимости.

Более сложная проблема возникает при обработке двумерных массивов действительных чисел с использованием процедуры, рассмотренной в 15.8.2.

Как показано в [120, 121], разложение изображения, представленного в виде двумерного массива действительных чисел, целесообразно производить по базису дискретного косинусного преобразования (ДКП). Этот базис, как показано в работах [14, 120] наиболее близок к базису, получаемому на основе разложения Карунена-Лоева по критерию минимума среднеквадратической ошибки.

По определению, двумерное ДКП имеет вид [121]

$$X(k_1, k_2) = (2/\sqrt{N_1 N_2}) P(k_1) P(k_2) \times \\ \times \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \cos[\pi k_1 (2n_1 + 1)/2N_1] \cos[\pi k_2 (2n_2 + 1)/2N_2],$$

где

$$P(k_1) = P(k_2) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{при } k_1 = k_2 = 1; \quad k_1 = -N_1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N_1 - 1; \\ 1 & \text{при } k_1 \neq 0; k_2 \neq 0; \quad k_2 = -N_2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N_2 - 1; \end{cases}$$

$X(k_1, k_2)$  — коэффициент двумерного ДКП;  $x(n_1, n_2)$  — двумерный массив действительных чисел.

В работах [120, 121] рассмотрены «быстрые» алгоритмы вычисления ДКП для режима работы «скачущее» окно. Однако не рассмотрены алгоритмы рекуррентного вычисления ДКП, что позволяет организовать получение коэффициентов Фурье в режиме работы «скользящее» окно.

Одномерный алгоритм вычисления ДКП данных вдоль «столбцов» в режиме работы «скользящее» окно, которые получены из двумерного массива, обработанного по «строкам» при помощи «быстрого» алгоритма расчета, описывается выражением

$$X(k_1, k_2)_L = P(k_2) \sqrt{2/N_2} \sum_{n_2=L}^{L+N_2-1} G(k_1, n_2) \cos[\pi k_2 (2n_2 + 1)/2N_2],$$

где  $G(k_1, n_2)$  — отсчеты «столбцов», представляющие собой коэффициенты ДКП «строк»;  $X(k_1, k_2)_L$  — искомые двумерные коэффициенты ДКП;  $L$  — номер «строки», с которого начинается обработка  $N$  отсчетов каждого «столбца».

Перепишем алгоритм ДКП в виде [125]

$$X(k_1, k_2)_L = P(k_2) \sqrt{2/N_2} \sum_{n_2=L}^{L+N_2-1} G(k_1, n_2) \cos[\pi k_2 (2n_2 + 1)/2N_2] =$$

$$= P(k_2) \sqrt{2/N_2} \cos(\pi k_2 / 2N_2) \sum_{n_2=L}^{L+N_2-1} G(k_1, n_2) \cos[\pi k_2 n_2 / N_2] -$$

$$- P(k_2) \sqrt{2/N_2} \sin(\pi k_2 / 2N_2) \sum_{n_2=L}^{L+N_2-1} G(k_1, n_2) \sin[\pi k_2 n_2 / N_2].$$

Запишем множители  $\cos(\pi kn/N)$  и  $\sin(\pi kn/N)$  в форме  $\cos(\pi kn/N) = \cos\{\pi k[(n-1)+1]/N\} =$

$$= \cos[\pi k(n-1)/N] \cos(\pi k/N) - \sin[\pi k(n-1)/N] \sin(\pi k/N);$$

$$\sin(\pi kn/N) = \sin\{\pi k[(n-1)+1]/N\} =$$

$$= \sin[\pi k(n-1)/N] \cos(\pi k/N) + \cos[\pi k(n-1)/N] \sin(\pi k/N). \quad (15.21)$$

С учетом (15.21) выражение для вычисления коэффициентов ДКП будет  $X(k_1, k_2)_L = P(k_2) \sqrt{2/N_2} \cos(\pi k_2 / 2N_2) \times$

$$\times \sum_{n_2=L}^{L+N_2-1} G(k_1, n_2) \{ \cos[\pi k_2(n_2-1)/N_2] \cos(\pi k_2 / N_2) -$$

$$- \sin[\pi k_2(n_2-1)/N_2] \sin(\pi k_2 / N_2) \} -$$

$$- P(k_2) \sqrt{2/N_2} \sin(\pi k_2 / 2N_2) \times$$

$$\times \sum_{n_2=L}^{L+N_2-1} G(k_1, n_2) \{ \sin[\pi k_2(n_2-1)/N_2] \cos(\pi k_2 / N_2) -$$

$$- \cos[\pi k_2(n_2-1)/N_2] \sin(\pi k_2 / N_2) \}.$$

Структурная схема устройства, реализующего полученный алгоритм рекуррентного вычисления коэффициентов ДКП в режиме работы «скользящее» окно, представлена на рис. 15.14.

Здесь обозначено: блок  $Z^{-N}$  — задержка отсчетов на  $N$  тактов; блок  $Z^{-1}$  — задержка отсчетов на один такт; блок  $\times$  — перемножитель; блок  $\Sigma$  — сумматор с весовыми коэффициентами, указанными на его входах; блок  $\Sigma_e$  — вычитатель.

Видно, что полученная структурная схема без учета блоков перемножения на нормирующие множители по входу и блоков формирования режима работы «скользящее» окно, является известной структурой, которая подробно рассмотрена в главе 4 и в работе [125]. Отметим, что блок  $Z^{-N}$  вместе с вычитателем может быть устранен, если в цепи обратной связи коэффициенты  $\sin(\pi k_2 / N_2)$  и  $\cos(\pi k_2 / N_2)$  дополнительно будут умножены на величину  $r_p = (N-2,3)/N$ .

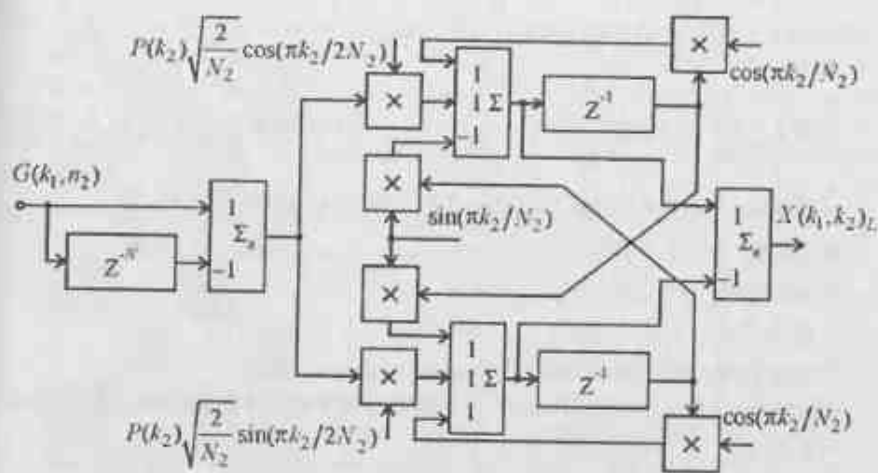


Рис. 15.14. Структурная схема устройства рекуррентного вычисления коэффициентов двумерного ДКП  $X(k_1, k_2)_L$

15.8.5. Рассмотрим некоторые особенности восстановления изображений по переданным коэффициентам  $X^*(k_1, k_2)$ , сформированных на основе рассмотренных алгоритмов.

Положим, что переданные коэффициенты  $X^*(k_1, k_2)$  ортогональных преобразований на каждом «кадре» «ленты» изображений, которые превысили порог  $C$ , соответствующим образом записываются в память приемного устройства. Расположение этих коэффициентов в двумерном массиве должно быть аналогично переданным. При этом возможно использование процедуры как на основе «быстрых» алгоритмов расчета по «столбцам» и «строкам», так и прямых или рекуррентных. Последние могут оказаться предпочтительными, поскольку значительное число коэффициентов  $X^*(k_1, k_2)$  равны нулю, а, следовательно, не требуется выполнять весь объем вычислений, предписываемых алгоритмом обратного ДКП (ОДКП). Отметим, что для одномерного случая алгоритм ОДКП имеет вид [120]

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} X(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} X(k) \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N}.$$

Аналогично рассмотренному ранее нетрудно получить рекуррентный алгоритм вычисления исходного двумерного массива чисел по полученным величинам  $X^*(k_1, k_2)$ .

Дополнительной экономии полосы занимаемых частот при передаче информации по каналу радиосвязи или сокращения количества передаваемой информации при фиксированной полосе занимаемых частот в режиме работы «скользящее» окно, получаемой с «ленты» изображений, можно добиться, если использовать предположение, что коэффициент корреляции между двумя «кадрами» изображений, отличающихся друг от друга на строку, близок к единице.

В этом случае, получаемые в двух соседних «кадрах» коэффициенты  $X^+(k_1, k_2)_L$  и  $X^+(k_1, k_2)_{L+1}$  отличаются незначительно, а, следовательно, если передавать только приращения

$$\Delta X^+(k_1, k_2)_L = X^+(k_1, k_2)_{L+1} - X^+(k_1, k_2)_L,$$

то можно сократить объем передаваемой информации.

Очевидно, что перед началом использования подобного подхода требуется первый «кадр» передать в полном объеме.

В отличие от используемой в настоящее время в системах связи дельта-модуляции, где передаются приращения сигнала во временной области, в данном варианте передаются приращения ортогональных преобразований двух коррелированных двумерных массивов. Следовательно, на приемном конце перед тем, как вычислять двумерное ОДКП необходимо восстановить исходные значения переданных коэффициентов согласно алгоритма

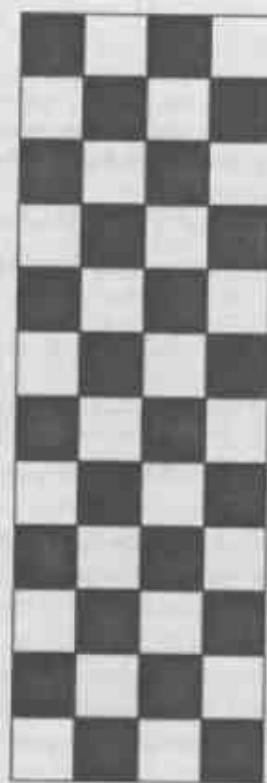
$$X^+(k_1, k_2)_{L+1} = X^+(k_1, k_2)_L + \Delta X^+(k_1, k_2)_L.$$

Рассмотренная процедура может быть расширена путем использования разностей более высокого порядка, если в этом есть необходимость, и может найти применение в задачах, где требуется обнаруживать существенное изменение изображений в двух соседних «кадрах».

Для проверки правильности рассмотренных положений по ортогональному преобразованию «кадров» изображений в режиме работы «скользящее» окно было проведено машинное моделирование. В качестве тестового сигнала было выбрано шахматное поле, образец изображения которого показан на рис. 15.15,а.

Выбор подобного изображения обусловлен тем, что бинарное поле широко применяется в качестве тестового сигнала при проверке тех или иных алгоритмов обработки изображений.

Двумерный тестовый массив чисел  $x(n_1, n_2)$  формировался способом считывания произвольного графического образа, представленного в растровом формате, из области видеопамати персональной ЦВМ с помощью вызова системного прерывания INT 10H управления графическим режимом SVGA – видеоадаптера CL-5428GL, встроенных системных функций и операторов языка QBASIC 4.5.



а)

62	63	61	62	00	01	00	00	65	62	63	63	00	02	00	01
63	63	62	63	00	00	02	00	62	63	63	63	00	00	00	01
63	63	63	63	00	00	00	00	62	63	63	62	00	00	01	00
63	63	63	61	01	00	00	00	60	63	63	63	00	00	00	00
00	01	00	00	63	62	63	63	00	07	00	01	62	63	63	63
00	00	02	00	62	63	62	00	00	00	01	63	63	62	63	63
00	00	00	00	60	63	63	62	00	00	00	00	63	63	62	62
01	00	00	00	63	61	63	63	01	00	00	00	07	63	63	62
62	63	63	62	00	01	00	00	63	62	63	63	00	02	00	01
63	63	62	63	00	00	00	00	62	63	63	63	00	00	00	01
63	63	63	63	00	00	00	00	62	63	63	62	00	00	01	00
63	63	63	61	01	00	00	00	60	63	63	63	00	00	00	00
00	01	00	00	63	62	63	63	00	02	00	01	62	63	63	63
00	00	02	00	62	63	61	63	00	00	00	01	63	63	62	63
00	00	00	00	63	63	63	63	00	00	00	00	62	63	62	62
01	00	00	00	63	63	63	63	01	00	00	00	62	63	63	63
00	01	00	00	63	62	63	63	00	02	00	01	62	63	63	63
62	63	63	63	00	01	00	00	63	62	63	63	00	02	00	01
63	63	62	63	00	00	02	00	62	63	63	63	00	00	01	00
63	63	63	63	00	00	00	00	62	63	63	62	00	00	01	00
00	01	00	00	63	62	63	63	00	02	00	01	62	63	63	63
00	00	02	00	62	63	63	63	00	00	00	01	62	63	63	63
00	00	00	00	63	63	63	63	00	00	00	01	63	63	62	63
01	00	00	00	63	61	63	63	01	00	00	00	62	63	63	63
00	01	00	00	63	62	63	63	00	02	00	01	62	63	63	63
00	00	02	00	62	63	63	63	00	00	00	01	62	63	63	63
00	00	00	00	63	63	63	63	00	00	00	01	63	63	62	63
01	00	00	00	63	61	63	63	01	00	00	00	62	63	63	63
00	01	00	00	63	62	63	63	00	02	00	01	62	63	63	63
00	00	02	00	62	63	63	63	00	00	00	01	63	63	62	63
00	00	00	00	63	63	63	63	00	00	00	00	62	63	62	62
01	00	00	00	63	61	63	63	01	00	00	00	62	63	63	63

б)

Рис. 15.15. Шахматное поле: а) бинарная форма; б) шифрованное представление

Размер бинарного шахматного поля выбирался равными  $N_1 = 16$ ,  $N_2 = 3N_1 = 48$ . Каждый элемент массива представлялся шестизрядным двоичным словом, что эквивалентно десятичному представлению чисел в пределах значений от 0 до 63. На рис. 15.15,б изображен массив чисел, соответствующий бинарному шахматному полю.

Полученный двумерный массив чисел подвергался обработке «быстрыми» алгоритмами вдоль «строк» и рекуррентными алгоритмами вдоль «столбцов».

На рис. 15.16 в качестве примера приведен массив чисел  $X(k_1, k_2)$  рекуррентно вычисленных коэффициентов ДКП при обработке  $(N+2)$ -й «строки» изображения при движении вдоль бинарного шахматного поля при обработке «кадра» размера  $16 \times 16$ .





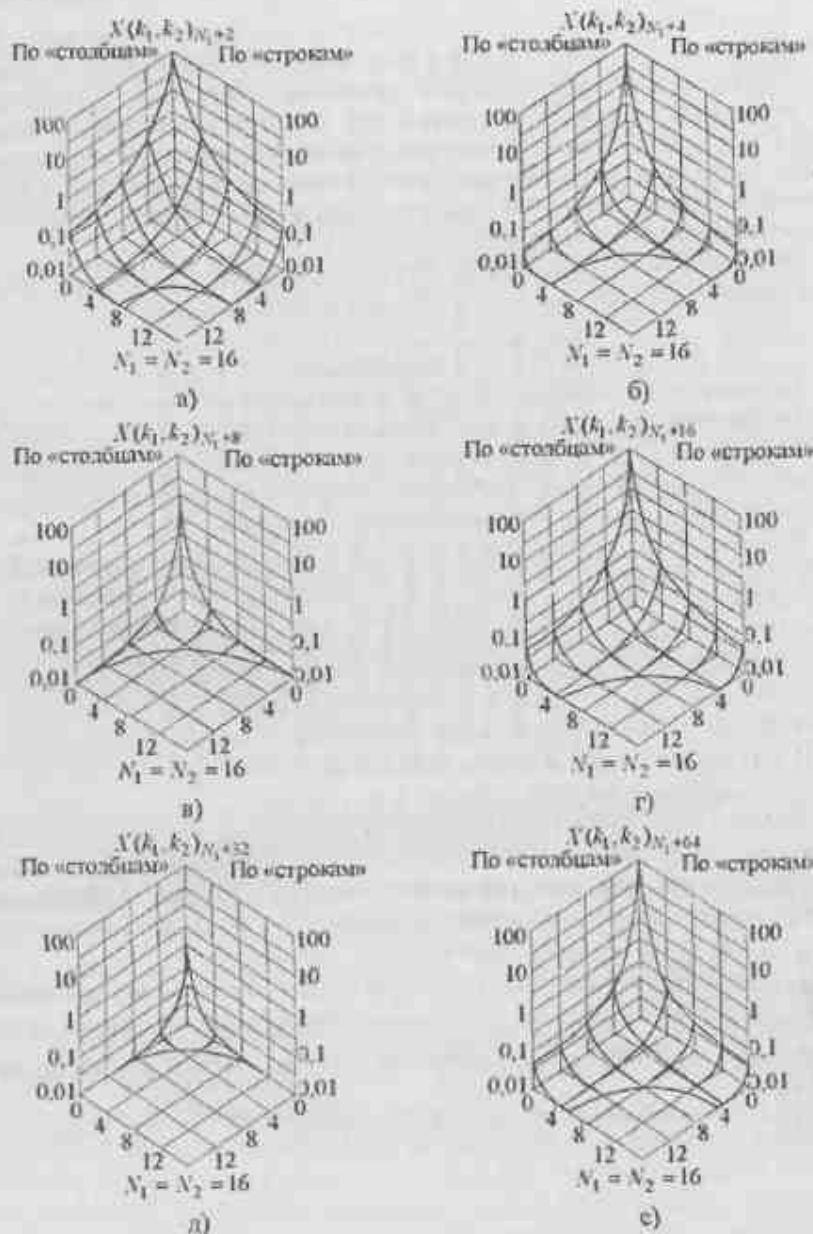


Рис. 15.18. Распределение двумерных массивов коэффициентов ДКП  $X(k_1, k_2)_L$  при движении «кадра» вдоль бинарного шахматного поля

При «наполнении» алгоритма обработки на «ленту» изображения наблюдается рост величины коэффициентов ДКП, который стабилизируется после того, как начинает обрабатываться массив чисел в общем случае размером  $N_1 \times N_2$ .

Таким образом, проведенный машинный эксперимент подтвердил правильность и эффективность алгоритма обработки изображений в режиме работы «скользящих» «кадров».

### 15.9. Выводы

Рассмотренные в данной главе вопросы обработки двумерных сигналов показывают, что их обработка существенно отличается от обработки одномерных. Это связано с тем, что обычно требуется значительно больший объем данных, математическое описание не столь полное, как у одномерных, а сами системы обладают значительно большим числом степеней свободы. В частности, в одномерном случае разностные уравнения, описывающие рекурсивные фильтры, упорядочены полностью, а в двумерном случае лишь частично.

Тем не менее, использование подхода основанного на разделимости, позволяет с успехом использовать во многих случаях математический аппарат, предназначенный для описания одномерных сигналов и систем для получения результатов, связанных с обработкой двумерных массивов.

Отметим еще одно обстоятельство. Поскольку двумерные массивы данных имеют, как правило, ограничения по размерам, то наиболее часто используется подход, основанный на последовательном использовании одномерных «быстрых» алгоритмов расчета. В то же время, существует ряд задач, когда имеются только ограничения по одному из размеров массива, а другой его размер, с достаточной степенью точности, может полагаться равным бесконечности. В этом случае обработка может быть комбинированной, состоящей из «быстрых» и прямых алгоритмов вычислений ортогональных преобразований. Это иногда позволяет получать выигрыши в количестве необходимых операций по сравнению со случаем отказа от комбинированной обработки.

Следует в некоторых случаях учитывать то обстоятельство, что при обработке «кадров» двумерных массивов чисел в режиме работы «скользящее» окно в случае высокого уровня корреляции получаемых данных после проведения ортогональных преобразований, можно добиться сокращения необходимого количества двумерной информации, которая потребуется при дальнейших операциях в соответствии с тем или иным алгоритмом, без ухудшения качества получаемых окончательных результатов.

Очевидно, что как и для одномерного случая, более высокая производительность вычислительного устройства, предназначенного для обработки двумерных массивов данных, достигается при использовании многопроцессорного подхода. При этом следует учесть то обстоятельство, что могут

быть одновременно использованы как одномерные алгоритмы БПФ, реализованные на многопроцессорных вычислителях, так и те или иные алгоритмы фильтрации, выполненные на основе многопроцессорной реализации элементарных ячеек. Кроме того, возможно, как указывалось, использование на многопроцессорном вычислителе и комбинированного подхода, что потребует использования устройства с перестраиваемой архитектурой.

## 16. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И ОБРАБОТКА АНСАМБЛЕЙ СИГНАЛОВ

### 16.1. Вводные замечания

Рассмотренные в первой главе микропроцессоры, предназначенные для ЦОС, обладают такими огромными возможностями, что у разработчиков радиотехнической аппаратуры в настоящее время практически отсутствуют ограничения на сложность используемых алгоритмов обработки. В то же время известные преимущества сложных сигналов в течение длительного времени не могли быть реализованы вследствие ограничений, накладываемых аналоговой элементной базой, высокой стоимостью устройств обработки таких сигналов, доходивших до 50% стоимости радиотехнической аппаратуры системы, использующей такие сигналы, трудностями высокоточного формирования законов внутримпульсной модуляции аналоговыми методами.

С другой стороны, математический анализ показал, что оптимальные методы обработки сложных сигналов в общем случае не распадается на внутри- и межпериодную обработки [1, 72, 126, 127].

Получающиеся же для обеспечения радиотехнических задач оптимальные схемы зачастую не могли быть реализованы из-за их чрезмерной сложности. Поэтому, в течение длительного времени основные усилия исследователей были направлены на получение оптимальных способов обработки сложных сигналов в предположении, что раздельный характер внутри- и межпериодной обработки заданы [72, 126, 127]. При такой раздельной обработке принятый сигнал разбивается на отрезки с длительностью, равной периоду повторения, и каждый из этих отрезков обрабатывается так, как если бы он был единственным. Последнее обстоятельство привело к тому, что проблема свелась к синтезу одиночных сигналов. При этом оценка эффективности по тому или иному параметру полученного сигнала осуществляется по форме двумерной функции распределения амплитуд сигналов в

зависимости от временной задержки  $\tau$  и частотного сдвига  $F$ , которая носит, как известно, название функции неопределенности  $\chi(\tau, F)$ .

Как показано в [75], функция  $\chi(\tau, F)$  может быть записана в виде

$$\chi(\tau, F) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) \dot{x}^*(t + \tau) \exp(-j2\pi Ft) dt,$$

либо выражена через функции  $\dot{X}(f)$ , являющиеся преобразованием Фурье функций  $\dot{x}(t)$ , в виде

$$\chi(\tau, F) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}^*(f) \dot{X}(f + F) \exp(2\pi f \tau) df.$$

Помимо указанной двумерной характеристики  $\chi(\tau, F)$  также используется понятие в виде ее модуля, которое носит название тела неопределенности и которое представляет собой геометрическое тело ограниченное плоскостью снизу и поверхностью неопределенности функции  $|\chi(\tau, F)|$  сверху. Сечения плоскостями тела неопределенности параллельно осям  $\tau$  и  $F$  описываются одномерными автокорреляционными функциями при фиксированных параметрах  $\tau$  и  $F$  соответственно.

Тела неопределенности одиночных сложных сигналов с любыми законами внутримпульсной модуляции характеризуются наличием главного пика, расположенного в точке  $\tau = 0$ ,  $F = 0$ , и боковых лепестков, расположенных в остальной части плоскости  $(\tau, F)$ .

При этом к основным свойствам тел неопределенности (функций неопределенности) относятся [75]:

- симметрия относительно начала координат в точке  $\tau = 0$ ,  $F = 0$ ;
- наибольшее значение в этой точке;
- инвариантность объема;
- инвариантность по отношению к повороту осей.

а также ряд других свойств, вытекающих из указанных.

### 16.2. Понятие об обобщенной функции неопределенности

Появление цифровых устройств формирования и обработки (сжатия) сложных сигналов позволяет отказаться от постулата раздельности внутри- и межпериодной обработки и рассматривать методы, которые основаны на применении ансамблей сложных сигналов.

Теоретической основой такого подхода является теорема, которая обобщает понятие функции неопределенности и которая записывается следующим образом [75].

Пусть имеется последовательность функций

$$\dot{f}_0(t), \dot{f}_1(t), \dot{f}_2(t), \dots, \dot{f}_n(t).$$

Если члены этой последовательности интегрируемы в квадрате в пределах  $-\infty < t < \infty$  и если они ортогональны согласно определению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}_n(t) \dot{f}_m(t) dt = \delta_{nm},$$

где  $\delta_{nm}$  — дельта-символ Кронекера, то отсюда следует, что при полноте последовательностей  $\dot{f}_n(t)$ , функция  $\dot{B}_{nm}(\tau, F)$ , которая определяется как

$$\dot{B}_{nm}(\tau, F) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}_n(t - \tau/2) \dot{f}_m^*(t + \tau/2) \exp(-j2\pi Ft) dt,$$

также является членом полной ортогональной последовательности, где

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{B}_{nm}(\tau, F) \dot{B}_{pq}^*(\tau, F) d\tau dF = \delta_{np} \delta_{mq}.$$

Если  $\dot{x}(t)$  интегрируема в квадрате, то

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dot{f}_n(t),$$

$$\text{где } a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) \dot{f}_n^*(t) dt \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}(t)|^2 dt.$$

Функция неопределенности для  $\dot{x}(t)$  задается соотношением [75]

$$\dot{\theta}(\tau, F) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n a_m \dot{B}_{nm}(\tau, F),$$

$$\text{где } c_{nm} = a_n a_m = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\theta}(\tau, F) \dot{B}_{nm}^*(\tau, F) d\tau dF \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |c_{nm}|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2.$$

Следовательно, принципиально возможно получить такой ансамбль сигналов, у которого отклик на плоскости  $(\tau, F)$  имеет «игольчатый» характер.

### 16.3. Математическое описание ансамблей дискретных сигналов

В дальнейшем попытаем, что функция неопределенности или тело неопределенности, описывающее характеристики ансамбля сложных сигналов, будет называться суммарной функцией неопределенности или суммарным телом неопределенности.

Задача создания ансамбля сигналов, имеющих суммарную функцию неопределенности или суммарное тело неопределенности кнопочной формы, может быть решена путем отыскания такого ансамбля сигналов, функции неопределенности или тела неопределенности каждого из которых являются взаимодополняющими для других сигналов из этого ансамбля при любых доплеровских сдвигах, что приводит к полной компенсации боковых лепестков на плоскости  $(\tau, F)$  (т.е. на плоскости время-частота).

Наиболее просто в цифровой форме формируются и обрабатываются фазоманипулированные сигналы (ФМи), среди которых и будет рассматриваться решение задачи получения тела неопределенности кнопочной формы.

Отметим, что в свою очередь каждый дискрет ФМи сигнала может быть либо отрезком синусоиды с известной фазой относительно других отрезков, либо иметь свой закон внутридискретной модуляции. Соответственно будем различать ФМи сигналы без внутридискретной модуляции и с внутридискретной модуляцией [12].

Задача компенсации боковых лепестков расположенных вдоль оси времени  $\tau$  систем ФМи сигналов с учетом того, что каждый ФМи сигнал из этого ансамбля удовлетворяет критерию минимума боковых лепестков, решается путем отыскания соответствующих кодовых последовательностей.

Как показано в [128–131], многие системы ФМи сигналов образованы на использовании свойств матриц Адамара. По определению, матрицей Адамара порядка  $N$  называется  $(N \times N)$  матрица  $H$ , элементами которой являются  $+1$  и  $-1$ , и такая, что

$$HH^T = NI, \quad (16.1)$$

где  $I$  – единичная диагональная матрица размера  $N \times N$ .

Равенство (16.1) эквивалентно утверждению, что любые две строки матрицы  $H$  ортогональны. Перестановка строк или столбцов матрицы  $H$ , равно как и умножение строк или столбцов матрицы  $H$  на  $-1$ , сохраняет это равенство. В дальнейшем будем считать, что матрицы  $H_1$  и  $H_2$  эквивалентны, если

$$H_2 = PH_1Q, \quad (16.2)$$

где  $P$  и  $Q$  – мономатричные матрицы перестановок с элементами  $+1$  и  $-1$ , т.е. матрицы  $P$  и  $Q$  имеют точно по одному ненулевому элементу в каждой строке и в каждом столбце и этот ненулевой элемент равен  $+1$  или  $-1$ .

Матрица  $P$  в (16.2) осуществляет перестановку и меняет знаки у строк, а матрица  $Q$  – у столбцов.

Матрица Адамара у которой первая строка и первый столбец целиком состоят из  $+1$  называется нормализованной и является симметрической. Следуя [131], в дальнейшем будем называть матрицу Адамара сокращенно  $H$ -матрицей.

Существуют  $H$ -матрицы порядков 1 и 2 которые в символической форме записи имеют вид

$$H_1 = [1], \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (16.3)$$

Кроме того, если  $H$ -матрица имеет порядок  $N > 2$ , то  $N$  кратно 4.

Известно, что одна из форм записи системы функций Уолша определяется через матрицу Адамара в следующей форме:

$$H_{2N} = \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & H_N \end{bmatrix}, \quad (16.4)$$

где черта сверху означает инверсию всех элементов матрицы  $H_N$ , являющейся четвертой частью матрицы  $H_{2N}$  по количеству заключенных в ней элементов.

В работе [132] предложена новая форма записи символических равенств, которая позволила достаточно просто переходить от описания при помощи матрицы Адамара «четных» кодовых последовательностей, к которым относятся функции Уолша и которые в [129] еще называются линейными кодовыми последовательностями, к описанию при помощи модифицированной матрицы Адамара «нечетных» кодовых последовательностей, которые в [129] еще также называются нелинейными. Термины «четные» и «нечетные» применимы потому, что в каждой строке (или столбце) матрицы Адамара содержится либо четное и равное количество  $+1$  и  $-1$ , либо нечетное и неравное количество  $+1$  и  $-1$ .

Следует учесть то обстоятельство, что помимо элементов  $+1$  и  $-1$  могут быть и другие их виды, которые будут рассмотрены далее.

На основании изложенного выше введем  $M$ -матрицу порядка  $2N$ , элементы которой обозначим в виде [132]

$$M_{2N} = \begin{bmatrix} M_N & M_N \\ M_N & M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a & 1b & 2a & 2b \\ 1c & 1d & 2c & 2d \\ 3a & 3b & \overline{4a} & \overline{4b} \\ 3c & 3d & \overline{4c} & \overline{4d} \end{bmatrix}, \quad (16.5)$$

где  $M_N = \begin{bmatrix} 1a & 1b \\ 1c & 1d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a & 4b \\ 4c & 4d \end{bmatrix}$ , т.е. каждая группа элементов  $M$ -матрицы  $2N$ -мерного порядка обозначена двойной (цифробуквенной) нумерацией.

Очевидно, что матрица 4-го порядка будет состоять из  $M_2$ -матриц, которые представляются в виде

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1a & 1b \\ 1c & 1d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a & 4b \\ 4c & 4d \end{bmatrix}$$

Отметим, что символические равенства (16.4) и (16.5) являются нормализованной формой записи.

Очевидно, что приводимый в (16.5) вариант инверсии в  $M$ -матрице нельзя считать единственно возможным. В случае, если инверсии подвергаются все элементы либо 2-го, либо 3-го квадрантов, также образуются системы функций Уолша, однако они располагаются не в нормализованном виде.

Помимо указанного способа записи символических равенств в работе [132] был предложен новый способ записи. Он заключается в следующем.

Производится инвертирование четвертой части элементов  $M$ -матрицы, принадлежащих различным квадрантам одновременно.

При этом, на расположение инвертированных частей матрицы  $M_N$  в различных частях матрицы  $M_{2N}$  наложены следующие ограничения [132]:

- инверсии не подвергаются элементы, расположенные в первом квадранте;
- части матрицы  $M_N$ , подвергающиеся инвертированию, не могут быть расположены на одноименных строках матрицы  $M_{2N}$ ;
- части матрицы  $M_N$ , подвергающиеся инвертированию, могут быть расположены на одноименных столбцах матрицы  $M_{2N}$  не более двух раз, но при этом не должны иметь одинаковые буквенные обозначения;
- части матрицы  $M_N$ , подвергающиеся инвертированию, должны быть расположены на каждой из строк матрицы  $M_{2N}$ .

Очевидно, что минимальной матрицей, обладающей указанными свойствами, является матрица  $M_4$ .

Тогда можно записать следующие формы символических равенств.

$$M_{2N}^{2bd4ac} = \begin{bmatrix} M_N & \bar{M}_N \\ M_N & \bar{M}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a & 1b & 2a & \bar{2b} \\ 1c & 1d & 2c & \bar{2d} \\ 3a & 3b & \bar{4a} & 4b \\ 3c & 3d & \bar{4c} & 4d \end{bmatrix}; \quad (16.6)$$

$$M_{2N}^{2ac4bd} = \begin{bmatrix} M_N & \bar{M}_N \\ M_N & \bar{M}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a & 1b & \bar{2a} & 2b \\ 1c & 1d & \bar{2c} & 2d \\ 3a & 3b & 4a & \bar{4b} \\ 3c & 3d & 4c & \bar{4d} \end{bmatrix}; \quad (16.7)$$

$$M_{2N}^{2bd3ac} = \begin{bmatrix} M_N & \bar{M}_N \\ \bar{M}_N & M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a & 1b & 2a & \bar{2b} \\ 1c & 1d & 2c & \bar{2d} \\ \bar{3a} & 3b & 4a & 4b \\ \bar{3c} & 3d & 4c & 4d \end{bmatrix}; \quad (16.8)$$

$$M_{2N}^{2ac3bd} = \begin{bmatrix} M_N & \bar{M}_N \\ \bar{M}_N & M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a & 1b & \bar{2a} & 2b \\ 1c & 1d & \bar{2c} & 2d \\ 3a & \bar{3b} & 4a & 4b \\ 3c & \bar{3d} & 4c & 4d \end{bmatrix}; \quad (16.9)$$

$$M_{2N}^{2bc4ad} = \begin{bmatrix} M_N & \bar{M}_N \\ M_N & \bar{M}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a & 1b & 2a & \bar{2b} \\ 1c & 1d & \bar{2c} & 2d \\ 3a & 3b & \bar{4a} & 4b \\ 3c & 3d & 4c & \bar{4d} \end{bmatrix}; \quad (16.10)$$

$$M_{2N}^{2ad4bc} = \begin{bmatrix} M_N & \bar{M}_N \\ M_N & \bar{M}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a & 1b & \bar{2a} & 2b \\ 1c & 1d & 2c & \bar{2d} \\ 3a & 3b & 4a & \bar{4b} \\ 3c & 3d & \bar{4c} & 4d \end{bmatrix}; \quad (16.11)$$

$$M_{2N}^{2ad3bd} = \begin{bmatrix} M_N & \bar{M}_N \\ \bar{M}_N & M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a & 1b & \bar{2a} & 2b \\ 1c & 1d & 2c & \bar{2d} \\ \bar{3a} & 3b & 4a & 4b \\ 3c & \bar{3d} & 4c & 4d \end{bmatrix}; \quad (16.12)$$

$$M_{2N}^{2bc3bd} = \begin{bmatrix} M_N & \bar{M}_N \\ \bar{M}_N & M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a & 1b & 2a & \bar{2b} \\ 1c & 1d & \bar{2c} & 2d \\ 3a & \bar{3b} & 4a & 4b \\ \bar{3c} & 3d & 4c & \bar{4d} \end{bmatrix}; \quad (16.13)$$

где знаки  $\leftarrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  обозначают инверсию в матрице  $M_N$  элементов, расположенных в левой ее половине, правой ее половине, по диагонали слева направо и сверху вниз и по диагонали справа налево и сверху вниз соответственно.

На основании рассмотренных символических равенств (16.6)–(16.13) и если положить

$$M_2 = D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a & 1b \\ 1c & 1d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a & 4b \\ 4c & 4d \end{bmatrix}, \quad (16.14)$$

то  $D_4$ -матрицы порядка  $4 \times 4$  принимают следующие виды:

$$D_4^{2bd4ac} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad (16.15) \quad D_4^{2ac4bd} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (16.16)$$

$$D_4^{2bd3ac} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad (16.17) \quad D_4^{2ac3bd} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad (16.18)$$

$$D_4^{2bc4ad} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (16.19) \quad D_4^{2ad4bc} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad (16.20)$$

$$D_4^{2ad3ac} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad (16.21) \quad D_4^{2bc3bd} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad (16.22)$$

Анализ  $D_4$ -матриц (16.15)-(16.21) показывает, что строки каждой из них соответствуют  $D$ -кодам (называемые иначе кодами Велти, четверичными кодами, нечетными или нелинейными) и которые для (16.15) совпадают с приведенными в [133] результатами. При этом в указанных матрицах столбцы представляют собой функции Уолша.

Анализ структур  $D_4$ -матриц (16.21) и (16.22) показывает, что эти два вида матриц могут быть названы, по аналогии с  $H$ -матрицами Адамара, нормализованными по Велти, так как имеют одинаковые значения кодов в строках и столбцах отсчитываемых сверху вниз и слева направо соответственно. Матрицы  $N$ -го порядка, построенные по правилам (16.21) и (16.22), будем обозначать  $D_{NW}$ -матрицами.

Наиболее интересными свойствами обладают  $H_{NW}$ -матрицы, образованные на основе правил (16.12) и (16.13) и использующие в качестве первоначальных  $D_N$ -матриц матрицы (16.14) и матрицы  $D_{4W}$  (16.21) и (16.22).

Основные свойства  $D_N$  и  $D_{NW}$ -матриц следующие:

- последовательности, образующие строки  $D_N$  и  $D_{NW}$ -матриц являются ортогональными друг другу [129];

- умножение любой кодовой последовательности  $D_N$  и  $D_{NW}$ -матриц на полную систему функций Уолша позволяет получить остальные кодовые последовательности этих  $D_N$  и  $D_{NW}$ -матриц (без учета знаков кодовых последовательностей, получаемых в этой матрице);

- в каждой  $D_N$  и  $D_{NW}$ -матрицах всегда имеется  $0,5N$  пар, состоящих из основных и дополнительных кодовых последовательностей;

- имеется в  $D_N$  и  $D_{NW}$ -матрицах одинаковое число кодов, равное  $0,5N$ , которые обладают числом блоков  $\mu_0 = 0,5N$  и  $\mu_0 = 0,5N + 1$  (под блоками понимается последовательность элементов с одинаковыми значениями параметров модуляции);

- в соответствии с гипотезой об оптимальном числе блоков [129],  $D_N$  и  $D_{NW}$ -матрицы содержат кодовые последовательности, которые являются оптимальными по критерию

$$\mu_0 = \mu_0, \text{ где } \mu_0 = 0,5N + 0,5;$$

- в каждой  $D_N$  и  $D_{NW}$ -матрицах количество следующих подряд элементов с одинаковыми значениями параметров модуляции в блоке не превышает четырех, а минимальное их число равно единице, за исключением  $D_4$  и  $D_{4W}$ -матриц, где значения этих параметров равны соответственно трем и единице;

- умножение кодовых последовательностей, расположенных на строках  $D_N$  и  $D_{NW}$ -матриц, на любую кодовую последовательность какой-либо строки этих матриц приводит к образованию кодовых последовательностей системы Уолша;

- кодовые последовательности  $D_N$  и  $D_{NW}$ -матриц удовлетворяют критерию максимальной мощности кода  $\bar{M}(N, d)$ , где  $N$  - число наборов кодов при которых выполняется условие  $\bar{M}(N, d) = 2$ , при  $d = 0,5N$ , где  $d$  - число разрядов в которых любые две кодовые последовательности отличаются друг от друга [134];

- веса кодовых последовательностей, определяемых как разность количества символов  $+1$  и  $-1$ , изменяются с шагом, равным четырем, для матриц  $D_N$  и  $D_{NW}$  ( $N \geq 8$ ) и равным двум для матриц  $D_4$  и  $D_{4W}$ ;

- для последовательности, начинающейся с  $+1$ , число положительных блоков  $\mu_0^+$  (т.е. содержащих только  $+1$ ) в случае, если число блоков  $\mu_0$  - четное, равно

$$\mu_G^+ = \mu_G^- = 0,5\mu_G,$$

где  $\mu_G^-$  – число отрицательных блоков (т.е. блоков, содержащих  $-1$ ), а если число блоков  $\mu_G$  является нечетным, равно

$$\mu_G^+ = 0,5\mu_G + 0,5; \mu_G^- = 0,5\mu_G - 0,5;$$

• для последовательностей, начинающихся с  $-1$ , в случае четного числа блоков  $\mu_G$

$$\mu_G^+ = \mu_G^- = 0,5\mu_G,$$

а в случае нечетного их числа

$$\mu_G^+ = 0,5\mu_G - 0,5; \mu_G^- = 0,5\mu_G + 0,5;$$

• автокорреляционная функция любой последовательности, полученная из матриц  $D_N$  и  $D_{N^*}$  равна нулю, т.е.  $K(m) = 0$ ,  $m = 2, 4, \dots$ , а при нечетных сдвигах  $K(m) \leq 0,5$  [130];

• среднеквадратическое значение взаимокорреляционной функции дополнительных последовательностей равно

$$\sigma_{KKD} = 1/2\sqrt{N},$$

т.е. в  $\sqrt{2}$  раз меньше, чем у случайных последовательностей.

Очевидно, что с учетом выражений (16.1) и (16.2) указанным свойствам удовлетворяют и кодовые последовательности описываемые матрицами (16.15) – (16.20), которые получены соответственно из матриц (16.6) – (16.11) с учетом (16.14).

Аналогично тому, как были рассмотрены символические равенства для D-кодов, полученные из различных видов  $D_N$  и  $D_{N^*}$ -матриц, рассмотрим построение многофазных матриц на основе которых образуются E-коды и которым дадим обозначение E-матриц.

Предположим, что существуют первообразные E-матрицы 1, 2 и 4 порядков, и которые запишем в виде, аналогично существованию  $M_{2N}$ -матрицам соответствующих порядков.

$$M_1 = E_1 = [1]; M_2 = E_2 = \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & -1 \end{bmatrix};$$

$$M_4 = E_4 = \begin{bmatrix} E_2 & E_2 \\ E_2 & E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -j & 1 & -j \\ j & -1 & j & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ j & -1 & -j & 1 \end{bmatrix} \quad (16.23)$$

Здесь полагают, что  $1 = -\bar{1}$ ,  $j = -\bar{j}$ , где « $\bar{\cdot}$ » – знак инверсии.

Аналогично тому, как были рассмотрены символические равенства для построения  $M_{2N}$ -матриц, и используя при обозначении групп элементов матрицы в виде (16.6) – (16.13) можно представить следующие символические равенства:

$$E_{2N}^{2bd4ac} = \begin{bmatrix} E_N & \bar{E}_N \\ E_N & \bar{E}_N \end{bmatrix}; \quad E_{2N}^{2ac4bd} = \begin{bmatrix} E_N & \bar{E}_N \\ E_N & \bar{E}_N \end{bmatrix};$$

$$E_{2N}^{2bd3ac} = \begin{bmatrix} E_N & \bar{E}_N \\ \bar{E}_N & E_N \end{bmatrix}; \quad E_{2N}^{2ac3bd} = \begin{bmatrix} E_N & \bar{E}_N \\ \bar{E}_N & E_N \end{bmatrix};$$

$$E_{2N}^{2bc4ad} = \begin{bmatrix} E_N & \bar{E}_N \\ E_N & \bar{E}_N \end{bmatrix}; \quad E_{2N}^{2ad4bc} = \begin{bmatrix} E_N & \bar{E}_N \\ E_N & \bar{E}_N \end{bmatrix};$$

$$E_{2N}^{2ad3ad} = \begin{bmatrix} E_N & \bar{E}_N \\ \bar{E}_N & E_N \end{bmatrix}; \quad E_{2N}^{2bc3bc} = \begin{bmatrix} E_N & \bar{E}_N \\ \bar{E}_N & E_N \end{bmatrix};$$

где знаки  $\leftarrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  обозначают инверсию в матрице  $E_N$  элементов, расположенных соответственно в левой ее половине, правой ее половине, по диагонали слева направо и сверху вниз и по диагонали справа налево и сверху вниз.

Запишем символические равенства для  $E_4$ -матриц размера  $4 \times 4$  аналогично тому, как были записаны символические равенства (16.15) – (16.22):

$$E_4^{2bd4ac} = \begin{bmatrix} 1 & -j & 1 & j \\ j & -1 & j & 1 \\ 1 & -j & -1 & -j \\ j & -1 & -j & -1 \end{bmatrix}; \quad (16.24) \quad E_4^{2ac4bd} = \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & -j \\ j & -1 & -j & -1 \\ 1 & -j & 1 & j \\ j & -1 & j & 1 \end{bmatrix}; \quad (16.25)$$

$$E_4^{2bd3ac} = \begin{bmatrix} 1 & -j & 1 & j \\ j & -1 & j & 1 \\ -1 & -j & 1 & -j \\ -j & -1 & j & -1 \end{bmatrix}; \quad (16.26) \quad E_4^{2ac3bd} = \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & -j \\ j & -1 & -j & -1 \\ 1 & j & 1 & -j \\ j & 1 & j & -1 \end{bmatrix}; \quad (16.27)$$

$$E_4^{2bc4ad} = \begin{bmatrix} 1 & -j & 1 & j \\ j & -1 & -j & -1 \\ 1 & -j & -1 & -j \\ j & -1 & j & 1 \end{bmatrix}; \quad (16.28) \quad E_4^{2ad4bc} = \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & -j \\ j & -1 & j & 1 \\ 1 & -j & 1 & j \\ j & -1 & -j & -1 \end{bmatrix}; \quad (16.29)$$

$$E_4^{2ad3ad} = \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & -j \\ j & -1 & j & 1 \\ -1 & -j & 1 & -j \\ j & 1 & j & -1 \end{bmatrix}; \quad (16.30) \quad E_4^{2bc3bc} = \begin{bmatrix} 1 & -j & 1 & j \\ j & -1 & -j & -1 \\ 1 & j & 1 & -j \\ -j & -1 & j & -1 \end{bmatrix}; \quad (16.31)$$



$E_N$ -матрицы описывают последовательности ФМ-сигналов с четырьмя состояниями фазы:  $0, \pi/2, \pi$  и  $3\pi/2$ . При этом можно поставить в соответствие  $e^{j0} = 1, e^{j\pi/2} = j, e^{j\pi} = -1, e^{j3\pi/2} = -j$ . Правила умножения сигналов  $1, j, -1, -j$  приведены в табл. 16.1 [133].

Таблица 16.1

Правило умножения элементов D- и E-кодов.

$\times$	1	-1	$j$	$-j$
1	1	-1	0	0
-1	-1	1	0	0
$j$	0	0	1	-1
$-j$	0	0	-1	1

Основной особенностью кодовых последовательностей, образованных на основе  $E_N$ -матриц, является следующее свойство автокорреляционной функции каждой из них:

$$K(m) = \begin{cases} N & \text{при } m = 0; \\ 0 & \text{при } m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), \end{cases} \quad (16.32)$$

где  $N$  — длина кодовой последовательности.

При четном числе  $m$  эти свойства обусловлены свойствами автокорреляционной функции синтезированных последовательностей, получаемых из  $D_N$ -матриц, имеющих элементы  $\pm 1$ , а при нечетных  $m$  — свойствами, определяемыми табл. 16.1.

Следует [130], отметить, что взаимокорреляционные функции пары дополнительных последовательностей  $E_N$ -матрицы равны нулю при всех значениях  $m$ , удовлетворяющих условию  $-(N-1) \leq m \leq (N-1)$ .

Отметим, что предложенный метод формирования последовательностей на основе  $E_N$ -матриц показывает совпадение полученных результатов с результатами, изложенными в [133] в случае использования матрицы  $E_N^{2hd4oc}$ , если обозначить  $\alpha = 1, \beta = -1, \delta = j, \gamma = -j$ . Предложенный метод синтеза имеет более общий характер и более прост, чем описанный в работах [129, 133].

#### 16.4. Обработка ансамбля сложных фазоманипулированных сигналов без внутридискретной модуляции

16.4.1. Как известно, для обеспечения оптимальной обработки любого сложного сигнала по критерию максимума отношения сигнал/шум отыскивается такой фильтр, называемый оптимальным, импульсная характеристика которого является инверсной во времени по отношению к принимаемому сложному сигналу.

В частности, обработка ансамблей ФМ-сигналов требует набора фильтров согласованных с каждым из них.

Рассмотрим свойства суммы откликов на выходах фильтров, согласованных с сигналами, каждый из которых модулируется по фазе той или иной кодовой последовательностью из ансамблей, рассмотренных в 16.3.

Следует [135], рассмотрим временные кодовые последовательности, полученные при помощи символических равенств в 16.3, которые представляют собой ортогональную матрицу вида

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(1) & \dot{x}_1(2) & \dots & \dot{x}_1(N) \\ \dot{x}_2(1) & \dot{x}_2(2) & \dots & \dot{x}_2(N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_n(1) & \dot{x}_n(2) & \dots & \dot{x}_n(N) \end{bmatrix}, \quad (16.33)$$

где  $\dot{x}_n(k)$  —  $k$ -й дискрет  $n$ -й последовательности,  $1 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq N$ .

Для существующего набора согласованных фильтров, каждый из которых имеет импульсную характеристику согласованную с соответствующей последовательностью  $\dot{x}_n(k)$ , запишем матрицу, в которой элементы, расположенные в столбцах, соответствуют отсчетам импульсных характеристик, причем столбцы и строки ортогональны друг другу.

$$\dot{H} = \begin{bmatrix} \dot{h}_1(1) & \dot{h}_2(1) & \dots & \dot{h}_N(1) \\ \dot{h}_1(2) & \dot{h}_2(2) & \dots & \dot{h}_N(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{h}_1(N) & \dot{h}_2(N) & \dots & \dot{h}_N(N) \end{bmatrix}. \quad (16.34)$$

Результат прохождения ансамбля сигналов, описываемых (16.33), через набор согласованных фильтров (СФ), описываемых (16.34), в момент окончания временного интервала равного временному интервалу ортогональности, можно записать в виде

$$Y = \dot{H} \cdot X, \quad (16.35)$$

где  $Y$  — диагональная матрица.

Эта матрица может быть записана в виде

$$Y = N \cdot I.$$

Функция неопределенности каждого сигнала может быть представлена в форме

$$\dot{\chi}_i(\tau, F) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_i(t) \dot{x}_i^*(t-\tau) e^{-j2\pi F\tau} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_i(t) \dot{h}_i^*(t-\tau) e^{-j2\pi F\tau} dt, \quad (16.36)$$

где  $\dot{h}_i(t)$  — импульсная характеристика СФ для сигнала  $\dot{x}_i(t)$ .

В свою очередь функция неопределенности суммы функций неопределенности всех сигналов системы, которую в дальнейшем будем называть суммарной функцией неопределенности, может быть представлена в виде

$$\hat{\chi}_i(\tau, F) = \sum_{i=1}^N \hat{\chi}_i(\tau, F). \quad (16.37)$$

Основным свойством суммарной функции неопределенности, описываемой выражением (16.37), является то, что тело этой функции неопределенности, расположенное на плоскости  $(\tau, F)$ , сосредоточено в области  $\tau = 0$  и имеет протяженность по оси  $\tau$  равную  $2\tau_\delta$ , где  $\tau_\delta$  — длительность дискрета, т.е. выполняется следующее неравенство

$$\hat{\chi}(\tau, F) \begin{cases} \neq 0 & \text{при } |\tau| \leq \tau_\delta; \\ = 0 & \text{при } |\tau| > \tau_\delta. \end{cases} \quad (16.38)$$

Исследуем условия, при которых выполняется соотношение (16.38). При этом ограничимся рассмотрением кодирующих последовательностей, рассмотренных в 16.3, и соответствующих им СФ.

Рассматривая (16.35) видим, что сумма элементов главной диагонали (т.е. след матрицы  $Y$ ) будет равна величине, пропорциональной  $N^2$ .

В свою очередь, в результате прохождения системы сигналов через систему СФ образуется  $0,5N$  пар результатов обработок согласно (16.36). Свойствами этих откликов является то, что их боковые лепестки имеют разнополярные знаки при одинаковых амплитудах, а главные пики имеют одинаковые амплитуды и знаки.

Следовательно, суммирование результатов обработки этих последовательностей приводит к компенсации боковых лепестков и позволяет получить увеличение главного пика.

Подобная обработка соответствует случаю, когда нет доплеровского сдвига и принимаемые сигналы во всей системе имеют одинаковые начальные фазы.

*Пример 1.* Рассмотрим обработку системы ФМн сигналов в наборе СФ. Пусть имеем матрицу, описывающую кодовые последовательности сигналов

$$X_8^{2 \times 3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Соответствующие этой сигнальной матрице матрица импульсных характеристик СФ имеет вид

$$H_8^{2 \times 3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Результатом прохождения ФМн сигналов через соответствующие СФ будут отклики  $y_i$ , совпадающие по форме с соответствующими корреляционными функциями, которые могут быть записаны в виде

$$Y_8^{2 \times 3 \times 3} = K_8^{2 \times 3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Суммируя столбцы в матрице  $Y_8^{2 \times 3 \times 3} = K_8^{2 \times 3 \times 3}$  получаем

$$\sum_{i=1}^8 y_i = \sum_{i=1}^8 K_i = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 64, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}.$$

Приведенный пример показывает, что использование компенсационного метода обработки позволяет получать нулевой уровень боковых лепестков у суммарного тела неопределенности  $\chi(\tau, F)$  при  $F = 0$  вдоль оси  $\tau$ , кроме области, занимаемой главным пиком.

16.4.2. Достаточно часто по тем или иным причинам принимаемый сигнал имеет несущую частоту, отличную от той, на которую настроен СФ. Эта ситуация, как правило, связана с эффектом Доплера.

Пусть имеется доплеровский сдвиг частоты  $F_\delta \neq 0$ . Полагая, что сигналы излучаются и принимаются последовательно во времени друг за другом,

фазовые соотношения в ансамбле ФМи сигналов можно записать следующим образом

$$\Delta\varphi_T = 2\pi F_0 T = 2\pi n + \Delta\Phi, \quad \Delta\varphi_\tau = 2\pi F_0 \tau_0, \quad (16.39)$$

где  $\Delta\varphi_T$  и  $\Delta\varphi_\tau$  – межпериодный и междискретный набег фазы за счет эффекта Доплера соответственно;  $T$  – период повторения ФМи сигналов в ансамбле;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $0 \leq \Delta\varphi \leq 2\pi$  – разность начальных фаз  $i$ -го и  $(i-1)$ -го ФМи импульсов в пачке из  $N$  импульсов.

Тогда процесс обработки, описываемый (16.35), с учетом (16.39) может быть представлен в виде

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{X}\mathbf{\Phi}, \quad (16.40)$$

где  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{\Phi}$  – диагональные комплексные квадратные матрицы размерности  $N$  межпериодного и междискретного набег фазы соответственно.

В случае, когда на временном интервале приема доплеровский сдвиг по фазе постоянен, матрицы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{\Phi}$  могут быть записаны в виде

$$\mathbf{H} = \text{diag} \left[ e^{j\phi_N}, e^{j(\phi_N + \Delta\phi)}, e^{j(\phi_N + 2\Delta\phi)}, \dots, e^{j(\phi_N + (N-1)\Delta\phi)} \right];$$

$$\mathbf{\Phi} = \text{diag} \left[ 1, e^{j2\pi F_0 \tau_0}, e^{j2\pi F_0 2\tau_0}, \dots, e^{j2\pi F_0 (N-1)\tau_0} \right],$$

где  $\phi_N$  – начальная фаза первого сигнала ансамбля ФМи сигналов, поступающих на обработку через период повторения  $T$ .

Очевидно, что разность начальных фаз ФМи  $i$ -го и  $(i-1)$ -го сигналов будет

$$\Delta\phi_B = \phi_{iN} - \phi_{N(i-1)},$$

где  $0 \leq \phi_N, \phi_N, \phi_{N(i-1)} < 2\pi$ .

Положим, что начальные фазы  $\phi_{iN}$  каждого сигнала в принимаемой последовательности компенсируются таким образом, что они все равны друг другу, т.е.  $\Delta\phi_B = 0$ .

Тогда, с учетом вышеизложенного, выражение (16.40) можно записать в виде

$$\mathbf{Y}_{DK} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{\Phi} = \mathbf{H}\mathbf{X}\mathbf{\Phi} = \mathbf{Y}\mathbf{\Phi}. \quad (16.41)$$

Очевидно, что для выполнения условия (16.41) матрица  $\mathbf{Y}_{DK}$  должна, также как и матрица  $\mathbf{Y}$ , быть диагональной, что соответствует равенству нулю боковых лепестков суммарной функции неопределенности при любом доплеровском сдвиге частоты в принимаемой системе ФМи сигналов.

Вследствие того, что матрица  $\mathbf{\Phi}$  диагональная, то матрица  $\mathbf{Y}_{DK}$  также будет диагональной вследствие одновременного выполнения условия диагональности матрицы  $\mathbf{Y}$ .

16.4.3. Поскольку не накладывались условия на вид сигнальной матрицы (16.33), кроме условия ее ортогональности, то очевидно, что условие (16.37) будет выполняться как для систем сигналов с бинарной фазовой манипуляцией, так и многофазной.

Следовательно, боковые лепестки суммарной функции неопределенности будут компенсироваться на всей плоскости  $(\tau, F)$  за исключением области  $(0, F)$ , где сосредотачивается вся некомпенсированная часть тела неопределенности независимо от величины фазового сдвига. В дальнейшем будем называть суммарное тело неопределенности, являющееся модулем суммарной функции неопределенности, «квазиидеальным», а системы ФМи сигналов, образующих его, следуя [137], назовем суперкомплементарными последовательностями по аналогии с комплементарными последовательностями, рассмотренными в [138].

Некоторые свойства суммарного тела неопределенности, описываемого (16.38), имеют вид:

- суммарное тело неопределенности имеет нулевой уровень боковых лепестков на плоскости  $(\tau, F)$ , за исключением области  $\tau = 0$ , при условии, что все начальные фазы системы ФМи сигналов равны;
- свойства суммарного тела неопределенности не изменяются если вычеркивать в матрице (16.33) любое количество столбцов, вплоть до оставления одного, что говорит о том, что каждая позиция обладает свойством комплементарности, а следовательно нет суперкомплементарных последовательностей для ансамбля из  $N$  ФМи сигналов длительностью большей, чем  $N$ ;
- применение жесткого ограничения в случае суммы двух последовательностей с различными амплитудами приводит к появлению боковых лепестков на плоскости  $(\tau, F)$  [137].

16.4.4. Рассмотрим форму суммарного тела неопределенности на плоскости  $(\tau, F)$  вблизи точки  $\tau = 0$ . Положим, что используется только один столбец в матрице (16.33). В этом случае имеем когерентную последовательность из прямоугольных импульсов, имеющих одинаковую начальную фазу [127]. В таком случае нормированное тело неопределенности для каждого импульса по оси  $\tau$  будет иметь вид

$$\frac{|\dot{\chi}(0, F)_i|}{|\dot{\chi}(0, 0)_i|} = 1 - \frac{|\tau|}{\tau_0},$$

а по оси  $F$  соответственно

$$\frac{|\chi(0, F)|}{|\chi(0, 0)|} = \left| \frac{\sin \pi F \tau_0}{\pi F \tau_0} \right|$$

Для последовательности из  $N$  импульсов нормированное суммарное тело неопределенности по оси  $\tau$  в районе  $\tau \leq |\tau_0|$  относительно точки  $\tau = 0$  имеет вид, как и для отдельного импульса, а по оси  $F$  — вид

$$\frac{|\chi(0, F)_N|}{|\chi(0, 0)_N|} = \left| \frac{\sin N\pi F \tau_0}{N\pi F \tau_0} \right| \left| \frac{\sin N\pi F \tau}{N\pi F \tau} \right|$$

На рис. 16.1 изображен пример нормированного суммарного тела неопределенности ансамбля ФМи сигналов у которого удалена четвертая часть для лучшей демонстрации его свойств.

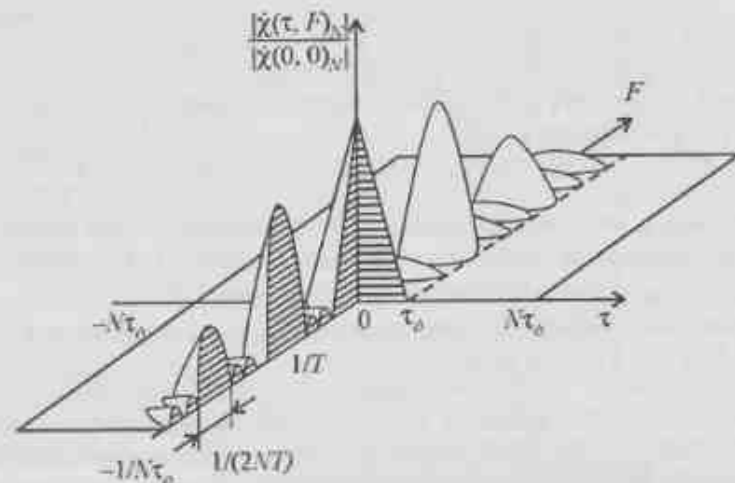


Рис. 16.1. Пример нормированного суммарного тела неопределенности

**Пример 2.** Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим обработку сигнала с использованием (16.21).

Рассмотрим матрицу  $4 \times 4$ , описывающую ансамбль ФМи сигналов, которая представлена выражением (16.21) и имеет вид

$$D_4^{2nd\ 3rd} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Весовые коэффициенты системы СФ могут быть представлены в виде

$$D_4^{2nd\ 3rd} = \hat{H}_4 = \begin{bmatrix} e^{j0} & e^{j0} & e^{j\pi} & e^{j0} \\ e^{j0} & e^{j\pi} & e^{j0} & e^{j0} \\ e^{j\pi} & e^{j0} & e^{j0} & e^{j0} \\ e^{j0} & e^{j0} & e^{j0} & e^{j\pi} \end{bmatrix}$$

Пусть входные сигналы имеют междискретный фазовый сдвиг  $0 \leq \Delta\varphi_\tau < 2\pi$  и могут быть представлены с учетом того, что начальные фазы этих сигналов равны между собой (положим, равны 0) в виде

$$\hat{X}_\Delta = \begin{bmatrix} e^{j0} & e^{j\varphi} & e^{j(\pi+2\varphi)} & e^{j3\varphi} \\ e^{j0} & e^{j(\pi+\varphi)} & e^{j2\varphi} & e^{j3\varphi} \\ e^{j\pi} & e^{j\varphi} & e^{j2\varphi} & e^{j3\varphi} \\ e^{j0} & e^{j\varphi} & e^{j2\varphi} & e^{j3\varphi} \end{bmatrix}$$

Здесь для сокращения записи положено, что  $\Delta\varphi_\tau = \varphi$ . Учитывая, что каждый столбец матрицы  $\hat{H}_4$  является импульсным откликом согласованного фильтра для случая, когда фазовый сдвиг равен нулю, получим на выходе каждого из них результат прохождения через него сигнала, описываемого матрицей  $\hat{X}_\Delta$ , у которого междискретный фазовый сдвиг  $\Delta\varphi_\tau$ .

Результаты прохождения сигналов, описываемых матрицей  $\hat{X}_\Delta$ , через набор СФ, описываемых матрицей  $\hat{H}_4$ , в дискретные моменты времени, соотношенные относительно центра отклика, представлены в табл. 16.2.

Очевидно, что вычисления производились согласно выражения, описывающего дискретный аналог интеграла свертки

$$\hat{y}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{h}(m-n)\hat{x}(n)$$

Осуществляя когерентное суммирование в соответствующие моменты времени результатов свертки всего ансамбля сигналов с доплеровскими сдвигами, прошедшими соответствующие СФ и которые приведены в табл. 16.2, будем иметь результаты, приведенные в табл. 16.3.

Видно, что использование подобного ансамбля сигналов требует только компенсации начальной фазы, а доплеровский сдвиг можно не компенсировать. Компенсацию начальной фазы можно осуществлять радиотехническими методами, что требует дополнительных затрат высокоточного оборудования, а это не всегда удобно. Также видно, что амплитуда суммы сигналов зависит от доплеровского сдвига.

Таблица 16.2

Прохождение ансамбля фазоманипулированных сигналов  $\tilde{x}_i(n)$  через набор согласованных фильтров с импульсными характеристиками  $h_i(n)$

Но- мер СФ	Вид функ- ции	Время						
		-3	-2	-1	0	1	2	3
1	$h_1(n)$	$e^{j0}$	$e^{j0}, e^{j\pi}$	$e^{j0}, e^{j\pi}, e^{j0}$	$e^{j0}, e^{j\pi}, e^{j0}, e^{j0}$	$e^{j\pi}, e^{j0}, e^{j0}$	$e^{j0}, e^{j0}$	$e^{j0}$
	$\tilde{x}_1(n)$	$e^{j0}$	$e^{j0}, e^{j0}$	$e^{j(n+2\varphi)}, e^{j\varphi}, e^{j0}$	$e^{j2\varphi}, e^{j(n+2\varphi)}, e^{j\varphi}, e^{j0}$	$e^{j\varphi}, e^{j(n+2\varphi)}, e^{j0}$	$e^{j\varphi}, e^{j(n+2\varphi)}$	$e^{j2\varphi}$
	$y_1(n)$	1	$-1 + e^{j\varphi}$	$1 - e^{j\varphi} - e^{j2\varphi}$	$1 + e^{j\varphi} + e^{j2\varphi} + e^{j3\varphi}$	$e^{j\varphi} - e^{j2\varphi} - e^{j3\varphi}$	$-e^{j2\varphi} + e^{j3\varphi}$	$e^{j2\varphi}$
2	$h_2(n)$	$e^{j0}$	$e^{j0}, e^{j0}$	$e^{j0}, e^{j\pi}, e^{j0}$	$e^{j0}, e^{j0}, e^{j\pi}, e^{j0}$	$e^{j0}, e^{j\pi}, e^{j0}$	$e^{j\pi}, e^{j0}$	$e^{j0}$
	$\tilde{x}_2(n)$	$e^{j0}$	$e^{j(n+\varphi)}, e^{j0}$	$e^{j2\varphi}, e^{j(n+\varphi)}, e^{j0}$	$e^{j3\varphi}, e^{j2\varphi}, e^{j(n+\varphi)}, e^{j0}$	$e^{j2\varphi}, e^{j2\varphi}, e^{j(n+\varphi)}$	$e^{j3\varphi}, e^{j2\varphi}$	$e^{j3\varphi}$
	$y_2(n)$	1	$1 - e^{j\varphi}$	$-1 - e^{j\varphi} + e^{j2\varphi}$	$1 + e^{j\varphi} + e^{j2\varphi} + e^{j3\varphi}$	$-e^{j\varphi} - e^{j2\varphi} + e^{j3\varphi}$	$e^{j2\varphi} - e^{j3\varphi}$	$e^{j3\varphi}$
3	$h_3(n)$	$e^{j0}$	$e^{j0}, e^{j0}$	$e^{j0}, e^{j0}, e^{j\pi}$	$e^{j0}, e^{j0}, e^{j0}, e^{j\pi}$	$e^{j0}, e^{j0}, e^{j\pi}$	$e^{j0}, e^{j\pi}$	$e^{j\pi}$
	$\tilde{x}_3(n)$	$e^{j\pi}$	$e^{j\varphi}, e^{j\pi}$	$e^{j2\varphi}, e^{j\varphi}, e^{j\pi}$	$e^{j3\varphi}, e^{j2\varphi}, e^{j\varphi}, e^{j\pi}$	$e^{j2\varphi}, e^{j\varphi}, e^{j\pi}$	$e^{j3\varphi}, e^{j2\varphi}$	$e^{j3\varphi}$
	$y_3(n)$	-1	$-1 + e^{j\varphi}$	$-1 + e^{j\varphi} + e^{j2\varphi}$	$1 + e^{j\varphi} + e^{j2\varphi} + e^{j3\varphi}$	$-e^{j\varphi} + e^{j2\varphi} + e^{j3\varphi}$	$-e^{j2\varphi} + e^{j3\varphi}$	$-e^{j3\varphi}$
4	$h_4(n)$	$e^{j\pi}$	$e^{j\pi}, e^{j0}$	$e^{j\pi}, e^{j0}, e^{j0}$	$e^{j\pi}, e^{j0}, e^{j0}, e^{j0}$	$e^{j\pi}, e^{j0}, e^{j0}$	$e^{j0}, e^{j0}$	$e^{j0}$
	$\tilde{x}_4(n)$	$e^{j0}$	$e^{j\varphi}, e^{j0}$	$e^{j2\varphi}, e^{j\varphi}, e^{j0}$	$e^{j3\varphi}, e^{j2\varphi}, e^{j\varphi}, e^{j0}$	$e^{j2\varphi}, e^{j\varphi}, e^{j0}$	$e^{j3\varphi}, e^{j2\varphi}$	$e^{j3\varphi}$
	$y_4(n)$	-1	$1 - e^{j\varphi}$	$1 + e^{j\varphi} - e^{j2\varphi}$	$1 + e^{j\varphi} + e^{j2\varphi} + e^{j3\varphi}$	$e^{j\varphi} + e^{j2\varphi} - e^{j3\varphi}$	$-e^{j2\varphi} + e^{j3\varphi}$	$-e^{j3\varphi}$

Таблица 16.3.

Результаты суммирования откликов  $y_i(n)$ , получаемые на выходах согласованных фильтров

Время	-3	-2	-1	0	1	2	3
Отклики							
$y_{\Sigma} = \sum_{i=1}^4 y_i$	0	0	0	$4(1 + e^{j0} + e^{j2\varphi} + e^{j3\varphi})$	0	0	0

В тех случаях, когда используется какая-либо пара последовательностей, называемых комплементарными, то необходима полная компенсация (или выравнивание) не только начальных фаз, но и доплеровского сдвига. Это объясняется тем, что компенсация боковых лепестков происходит только при условии, что междискретный фазовый сдвиг равен нулю [37, 129, 130]. Последнее требует, в случае применения подобных ансамблей сложных сигналов на подвижных объектах, привлечения информации от инерциальных систем.

В силу указанных причин в приложении будет рассмотрено построение систем, которые не требуют знания начальных фаз сигналов за счет использования режима внутрдискретной модуляции.

Рассмотрим обработку ансамбля сложных сигналов, излучаемых и принимаемых последовательно во времени когерентно-импульсной РЛС. Структурная схема устройства, осуществляющего обработку рассмотренной системы сигналов, изображена на рис. 16.2.

Работает схема следующим образом. Последовательно во времени через период повторения  $T$  излучаются ФМи сигнала, каждый из которых имеет свой закон внутримпульсной модуляции. Блок оптимальной фильтрации одиночного импульса имеет полосу пропускания обратно пропорциональную минимальной длительности дискрета фазовой манипуляции сигнала, осуществляет предварительную частотную селекцию и производит оптимальную обработку одного дискрета ФМи сигнала по критерию максимума отношения сигнал/шум.

Перед приемом очередного  $i$ -го ФМи сигнала фильтр сжатия, путем перестройки импульсной характеристики, настраивается таким образом, чтобы обеспечить согласованную фильтрацию этого сигнала. Результирующий отклик сигнала поступает на измеритель разности начальных фаз  $i$ -го и  $(i-1)$ -го сигналов и одновременно запоминается для дальнейшей организации разности фаз между  $i+1$ -м и  $i$ -м сигналами. Полученный результат поступает на блок выравнивания начальных фаз сжатых ФМи сигналов, в котором обрабатываемый сигнал получает ту же начальную фазу, что и предыдущий сигнал. Далее сигнал поступает на накопитель с временем накопления равным  $NT$ , где происходит суммирование  $N$  сжатых ФМи сигналов. В суммарном сжатом сигнале компенсируются боковые лепестки, а главные пики когерентно суммируются.



Рис. 16.2. Структурная схема устройства, реализующего обработку ансамбля фазоманипулированных сигналов

16.4.5. В системах радиосвязи наиболее помехоустойчивыми являются сигналы, которые содержат информацию, закодированную в изменении их фазы.

Поэтому целесообразно использование фазовой манипуляции для модуляции отдельного дискрета сообщения. При этом технически реализуемыми являются системы связи с фазоразностной модуляцией (ФРМ) [139].

Известно, что сокращение длительности символа позволяет повысить пропускную способность системы радиосвязи. В свою очередь, многие системы радиосвязи работают в условиях многолучевого распространения радиоволн, причем эти лучи могут приходиться в точку приема с большим запаздыванием друг относительно друга. Последнее приводит к ограничениям, накладываемым на минимальную длительность простых сигналов, которые связаны с тем, что длительность выходного напряжения на выходе СФ может оказаться сравнимой с временем запаздывания одного луча относительно другого. Это может привести к значительным искажениям при приеме различных символов, что понижает помехоустойчивость системы радиосвязи.

На рис. 16.3 в качестве примера показаны огибающие напряжения сообщения вида 1 0 1 1 на выходе СФ когда каждый элемент сообщения является узкополосным сигналом и образован тремя лучами. Сплошными линиями

показаны отклики соответствующие первому принимаемому лучу, пунктирными линиями – второму лучу, штрих пунктирные – третьему лучу.

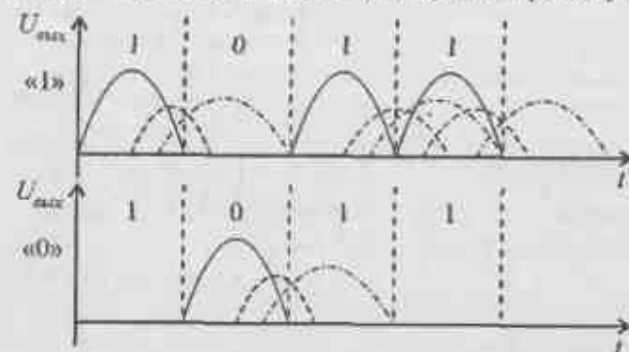


Рис. 16.3. Отклики на выходах согласованных фильтров при многолучевом приеме узкополосного сигнала

Видно, что происходит перекрытие напряжения, вызываемого первым лучом, напряжением, вызываемыми третьим, что может приводить к сбойным ситуациям в решающем устройстве [140, 141].

Одним из путей устранения этого недостатка является либо увеличение длительности символа, что снижает скорость передачи информации, либо введение внутримпульсной модуляции. Применение сложных сигналов (широкополосных) позволяет избежать перекрытия во времени выходных эффектов, связанных с многолучевостью, на решающем устройстве. Это связано с тем, что выходные отклики широкополосных сигналов являются более узкими, чем отклики узкополосных сигналов (рис. 16.4).

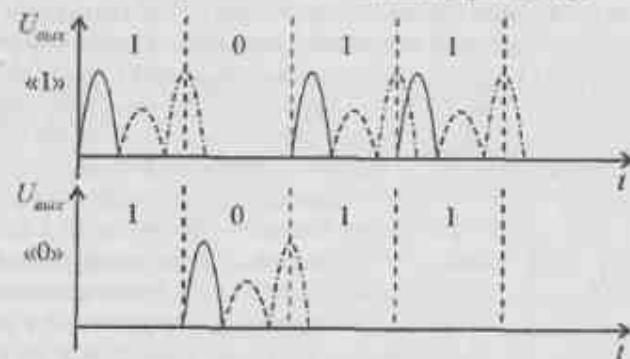


Рис. 16.4. Отклики на выходах согласованных фильтров при многолучевом приеме широкополосного сигнала

Тем не менее, применение широкополосных сигналов сопряжено с необходимостью учета влияния на решающее устройство боковых лепестков, появляющихся вследствие применения внутримпульсной модуляции сигнала, которые, при определенных условиях, могут понизить помехоустойчивость системы связи.

Среди применяемых ФМн сигналов наименьший уровень боковых лепестков имеют сжатые сигналы, модулированные кодами Баркера.

Положим, что имеется система радиосвязи с ФРМ, которая на двух соседних частотах излучает ФМн сигналы в виде кодов Баркера, модулирующих дискреты, полученные из матрицы  $D_3^{2nd3rd}$ , вида  $\{1, 1, 1, -1\}$  и  $\{1, -1, 1, 1\}$ . Автокорреляционные функции этих кодов имеют вид  $\{-1, 0, 1, 4, 1, 0, -1\}$  и  $\{1, 0, -1, 4, -1, 0, 1\}$ . Очевидно, что суммарная автокорреляционная функция будет  $\{0, 0, 0, 8, 0, 0, 0\}$ . Также положим, что «единица» передается в двух частотных каналах одновременно при помощи двух указанных кодов, а «ноль» — также в двух частотных каналах одновременно при помощи инверсных версий этих кодов, т.е. при помощи  $\{-1, -1, -1, 1\}$  и  $\{-1, 1, -1, -1\}$ , и, соответственно, автокорреляционные функции будут  $\{1, 0, -1, -4, -1, 0, 1\}$  и  $\{-1, 0, 1, -4, 1, 0, -1\}$ . Суммарная автокорреляционная функция будет соответственно  $\{0, 0, 0, -8, 0, 0, 0\}$ .

Если использовать рассмотренный компенсационный метод с учетом особенностей ФМн сигнала, то двухканальная однократная фазоразностная система радиосвязи примет вид, изображенный на рис. 16.5 [12].

Работает система радиосвязи с ФРМ следующим образом. В каждый момент времени по двум каналам одновременно информационные символы (посылки) «1» или «0» модулируются соответствующим кодом Баркера и одновременно излучаются в эфир в виде группового сигнала.

На приемном конце групповой сигнал с выхода линейной части приемника (выхода усилителя промежуточной частоты) поступает на два канальных фильтра. Эти фильтры по полосе равны  $\Delta F = 1,4/\tau$ , где  $\tau$  — длительность элемента модулирующего кода Баркера, а их центральные частоты расположены на расстоянии  $1,4\tau$  друг относительно друга. Общая полоса частот, занимаемая групповым сигналом, равна  $2,8/\tau$ .

Появляющийся ФМн сигнал на выходе каждого полосового фильтра поступает на вход соответствующего фазового детектора (ФД1 и ФД2). Одновременно эти ФМн сигналы поступают на устройство умножения частоты в два раза (блок  $\times 2$ ). С выхода этих устройств сигналы поступают на входы фазовых детекторов систем фазовой автоподстройки частоты (ФДЗ и ФД4 соответственно). На вторые входы ФДЗ и ФД4 также поступают сигналы удвоенной частоты управляемых генераторов УГ1 и УГ2 соответственно, которые управляются с выходов ФДЗ и ФД4. Эта схема позволяет сформировать из принимаемого колебания опорный сигнал, у которого отсутствует скачки фазы.

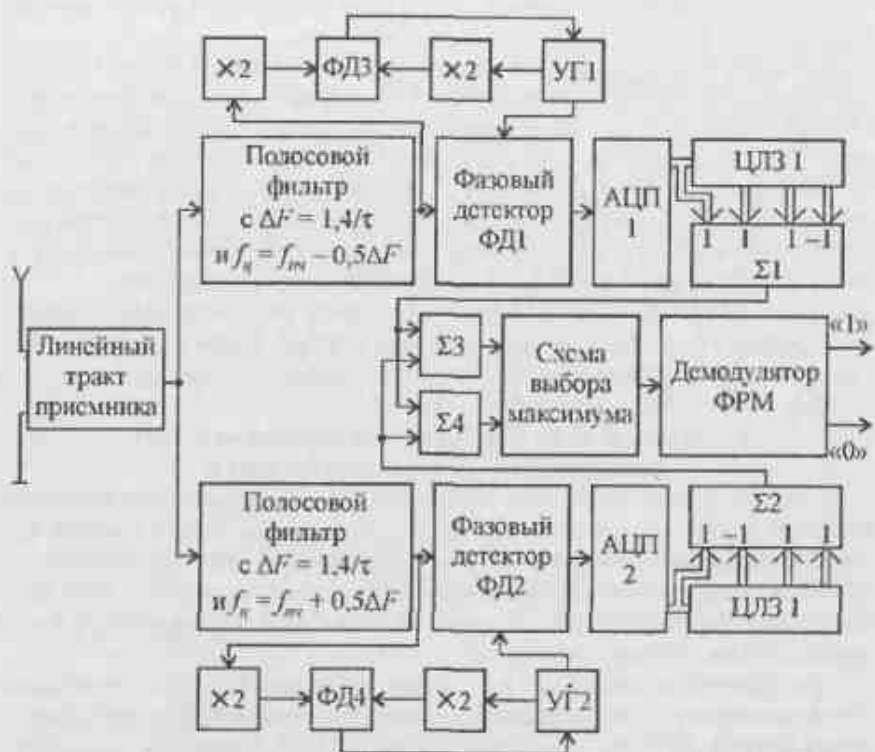


Рис. 16.5. Структурная схема приемной части фазоразностной системы радиосвязи

Продетектированные в ФД1 и ФД2 сигналы поступают на АЦП своих каналов, где преобразуются в цифровую форму. Далее сигналы поступают на СФ, выполненные в виде цифровых линий задержки (ЦЛЗ1 и ЦЛЗ2) с отводами и сумматоров  $\Sigma 1$  и  $\Sigma 2$ . На выходах этих сумматоров появляются сигналы, описываемые автокорреляционными функциями кодов Баркера вида  $\{-1, 0, 1, 4, 1, 0, -1\}$  и  $\{1, 0, -1, 4, -1, 0, 1\}$ .

Далее эти сжатые сигналы поступают на сумматор  $\Sigma 3$  и вычитатель  $\Sigma 4$ , выходы которых соединены со схемой выбора максимума. Это необходимо для исключения случая, когда может возникнуть режим «обратной» работы в одном из каналов и вместо кода  $\{0, 0, 0, 8, 0, 0, 0\}$  появится код  $\{-2, 0, 2, 0, 2, 0, -2\}$ . Эта схема непрерывно контролирует эти два уровня сигнала и подает на выход сигнал того канала, амплитуда которого больше.

Полученный сигнал с выхода схемы выбора максимума в виде  $\pm \{0, 0, 0, 8, 0, 0, 0\}$  поступает на дешифратор системы фазоразностной мо-

дurations (выполненной, например, по автокорреляционной схеме), с выхода которой выделяется сообщение в виде «0» или «1».

Нетрудно видеть, что данная система за счет проигрыша по полосе занимаемых частот в два раза (по сравнению с системой использующей только один частотный канал) позволяет увеличить амплитуду сжатого сигнала в два раза. Также видно, что для получения максимального значения автокорреляционной функции, равного 8, потребуется использовать в одночастотной системе восьмиземельный D-код для обеспечения аналогичной величины сигнал/шум, однако при этом не происходит компенсации боковых лепестков, и, кроме того, пропускная способность системы уменьшится в два раза.

На рис. 16.6 изображены временные диаграммы информационного сигнала типа «меандр» и его виды при фазовой манипуляции, сжатии и на входе демодулятора системы однократной ФРМ (выходе схемы выбора максимума).

### 16.5. Синтез и обработка ансамбля простых некогерентных импульсных сигналов

Наиболее просто технически реализуемыми и имеющими низкую стоимость являются локационные системы, использующие пачки простых периодических некогерентных импульсных сигналов, требуемое разрешение по дальности у которых определяется длительностью отдельного импульса. При обработке пачек таких сигналов используется внутримпульсная и межпериодная процедуры [126, 142].

При наличии ограничений на амплитуду и длительность обрабатываемой реализации при одновременном сохранении требований к однозначности измерения дальности и высокой разрешающей способности переходят к использованию сложных сигналов (СС).

Это усложняет и удорожает системы, поскольку обработка СС сопровождается появлением нежелательных эффектов в виде БЛ, которые устраняются либо при помощи весовой обработки, либо компенсационным путем [12, 143].

Поэтому представляет интерес рассмотреть синтез ансамбля простых некогерентных импульсных сигналов, который состоит из пачек импульсов следующих через период повторения  $T_n$ , причем количество импульсов внутри каждой из пачек одинаково, а период их повторения кратен величине  $T \ll T_n$ , с длительностью каждого импульса  $\tau < T \ll T_n$ , а также синтез алгоритма обработки полученного ансамбля, позволяющего получить выходной отклик в виде «б-функции» [144].

Известно свойство дискретных ортогональных функций Уолша состоящее в том, что синхронная сумма  $N$  выходных откликов СФ  $y_j$ , являющихся результатами прохождения через них  $N$  сигналов с законами фазовой модуляции в виде соответствующих функций Уолша  $x_j$ , описываемых матрицей Адамара  $H_N$  порядка  $N$ , будет [20, 143, 145]

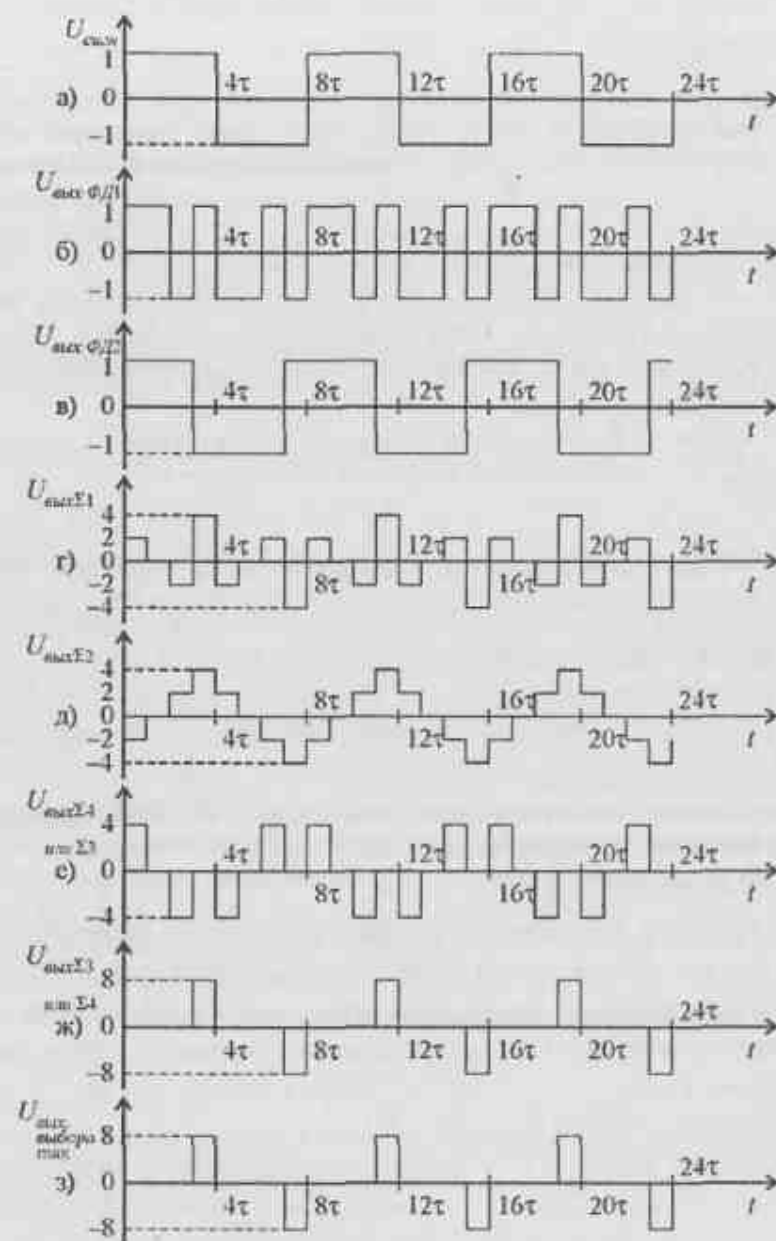


Рис. 16.6. Временные диаграммы в различных точках системы связи для сигнала в виде меандра



$$y_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N y_i = \delta(t - NT_N). \quad (16.42)$$

Для получения результата (16.42) рассмотрим ряд свойств функций Уолша, упорядоченных по Адамару. По определению, квадратные матрицы Адамара  $\mathbf{H}_N$ , где  $N = 1, 2, 4, 8, \dots$  — порядки, определяющие в них количество строк и столбцов, состоят из нечетных функций Радемахера и четных и нечетных функций Уолша, образующих полную ортогональную систему, и описываются символическими равенствами (16.3) и (16.4).

**Свойство 1.** При итеративном формировании матрицы Адамара  $\mathbf{H}_N$  при использовании равенства (16.3) и (16.4) вновь образуется только одна функция Радемахера  $\text{Rad}(l)$ , которая имеет только один период и расположена она на строке под номером  $l = 0,5N + 1$ , где  $N = 2, 4, 8, \dots$ .

**Свойство 2.** Количество функций Радемахера в матрице Адамара  $\mathbf{H}_N$  равно

$$m = \log_2 N. \quad (16.43)$$

**Свойство 3.** Номер функции Радемахера  $\text{Rad}(k)$  в матрице Адамара  $\mathbf{H}_N$  определяется количеством периодов  $p = 2^{k-1}$  на интервале ортогональности и связан с номером строки  $l$ , где она расположена, выражением

$$l = (N/2^k) + 1. \quad (16.44)$$

**Свойство 4.** Каждая функция Радемахера  $\text{Rad}(k)$  в матрице Адамара  $\mathbf{H}_N$  имеет по  $Q = 0,5N$  положительных (или отрицательных) отсчетов, определяющих число импульсов в пачке, причем их общее количество во всех функциях Радемахера  $\text{Rad}(k)$  (как и импульсов в пачке) равно

$$Q_A = Qm = 0,5N \log_2 N.$$

**Свойство 5.** Нормированный по размеру матрицы Адамара  $\mathbf{H}_N$  интервал времени  $\vartheta/N$ , в течение которого на интервале ортогональности находятся положительные значения функций Радемахера  $\text{Rad}(k)$  от их начала до момента окончания в последнем периоде, определяется соотношением

$$\vartheta/N = 1 - 1/2^k. \quad (16.45)$$

**Свойство 6.** При поразрядном сложении одноименных строк матрицы Адамара  $\mathbf{H}_N$  со сдвинутой на один разряд вправо строкой матрицы Адамара  $-\mathbf{H}_N$ , которые находятся в нижней половине матрицы Адамара  $\mathbf{H}_{2N}$  и описываются (16.3) и (16.4), результаты суммирования содержат  $N+1$  разрядов и имеют значения 0,  $\pm 1$  и  $\pm 2$ .

**Свойство 7.** Получение сигналов, описываемых матрицей Адамара  $\mathbf{H}_2$ , осуществляется путем вычисления дискретной свертки единственного импульса, формируемого из функции Радемахера  $\text{Rad}(1)$  расположенной на ее второй строке (и совпадающей с единственным отсчетом матрицы Адамара  $\mathbf{H}_1$ ), с импульсными характеристиками формирующих фильтров (ФФ), описываемыми функциями Уолша матрицы Адамара  $\mathbf{H}_2$ .

Процедура синтеза ансамбля простых некогерентных импульсов, состоящего из периодической последовательности пачек, и четырехэтапного алгоритма его обработки имеет следующий вид.

**Шаг 1.** Исходя из заданного отношения сигнал/шум, определяется или задается энергия полезного сигнала  $\mathcal{E}$  всего ансамбля. Количество импульсов, определяющих размер матрицы Адамара  $\mathbf{H}_N$  и обладающих заданной энергией  $\mathcal{E}_i$  каждый, находится по выражению  $N = \lceil \mathcal{E}/\mathcal{E}_i \rceil$ , где знак  $\lceil \bullet \rceil$  означает, что число импульсов увеличивается до ближайшего большего целого числа  $N = 2^m$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$ .

Записывается матрица Адамара  $\mathbf{H}_N$  и определяется, в соответствии со свойствами 1–5 и выражениями (16.43)–(16.45), количество и виды функций Радемахера  $\text{Rad}(k)$ . Расположение передних фронтов положительных отсчетов этих функций на оси времени определяет местоположение простых некогерентных импульсов в каждой пачке, количество которых равно  $m$  в ансамбле. Количество передних фронтов равно  $0,5N$  с временными интервалами между ними равными или кратными  $T$ , определяемыми периодом отсчетов функции Радемахера  $\text{Rad}(1)$ .

Синтезированный ансамбль сигналов на основе использования матрицы Адамара  $\mathbf{H}_N$  имеет, численно равную величине  $Q_A$ , базу  $B_A$ , определяемую в виде

$$B_A = 0,5N \log_2 N. \quad (16.46)$$

**Шаг 2.** На первом этапе, как и в двухэтапной процедуре, производится внутримпульсная обработка каждого некогерентного импульса ансамбля.

Затем осуществляется детектирование и преобразование сигналов в цифровую форму в аналого-цифровом преобразователе путем дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов и их квантования, причем количество уровней квантования выбрано настолько большим, что шумами преобразования можно пренебречь.

**Шаг 3.** На втором этапе производится линейная внутривычислительная обработка импульсов в каждом периоде их повторения  $T_n$  в ФФ. В результате получается набор СС с законами фазовой модуляции в виде функций Уолша.

На основе свойства 6 определяются импульсные характеристики ФФ с использованием матриц Адамара  $\mathbf{H}_{0,5N}$  и  $-\mathbf{H}_{0,5N}$ , формирующих нижнюю половину матрицы Адамара  $\mathbf{H}_N$ . В результате получается  $0,5N$  импульсных характеристик ФФ, имеющих длительность  $0,5N+1$  отсчетов каждая. Затем, используя матрицу Адамара  $\mathbf{H}_{0,5N}$ , находят формирующие ее матрицы Адамара  $\mathbf{H}_{0,25N}$  и  $-\mathbf{H}_{0,25N}$ , и далее, аналогично, определяются импульсные характеристики соответствующих ФФ до тех пор, пока не получается матрица Адамара  $\mathbf{H}_2$ , нижняя часть которой состоит из матриц Адамара  $\mathbf{H}_1 = [1]$  и  $-\mathbf{H}_1 = [-1]$ .

На основании свойства 7 определяются импульсные характеристики ФФ с использованием матрицы Адамара  $\mathbf{H}_2$  для получения функций Уолша, расположенных на ее первой и второй строках. При этом количество отсчетов в получаемых импульсных характеристиках ФФ всегда равно двум.

Осуществляется внутрипачечная обработка в ФФ путем выполнения операций дискретной свертки полученных импульсных характеристик с соответствующими сигналами пачек ансамбля. Сигналы, получаемые на выходах ФФ, списываются функциями Уолша с числом разрядов, равным  $N$ .

**Шаг 4.** На третьем этапе обработки осуществляется вычисление в соответствующих СФ дискретных сверток сигналов, сформированных на втором этапе и описываемых функциями Уолша, с соответствующими импульсными характеристиками, в результате чего получается набор из  $N$  сигналов, имеющих длительность  $2N-1$  отсчетов. Основным свойством полученных выходных откликов является то, что главные пики сжатых сигналов являются однополярными, а их БЛ – разнополярные, причем сумма всех БЛ, расположенных на одноименных позициях, равна нулю, а сумма главных пиков пропорциональна величине  $N^2$  [12, 143].

**Шаг 5.** На четвертом этапе – этапе межпериодной обработки – результаты, полученные после третьего этапа обработки, синхронно суммируются в соответствии с выражением (16.42). В результате получаемый на выходе отклик имеет вид « $\delta$ -функции» с амплитудой пропорциональной величине  $N^2$ .

На этом процедура формирования и обработки ансамбля простых некогерентных импульсов заканчивается.

Режим обработки «скользящее» окно реализуется следующим образом. После накопления результатов обработки всех сформированных пачек ансамбля, излучается следующая пачка импульсов через период повторения  $T_n$ , закон модуляции которой совпадает с законом модуляции той, которая излучалась и обрабатывалась первой. После ее обработки, полученные результаты добавляются к накопленным ранее с одновременным удалением

результатов, полученным после обработки первой пачки. Далее процесс повторяется аналогично со следующими пачками, чем и обеспечивается режим работы «скользящее» окно.

**Пример.** Пусть в результате вычислений, выполненных на шаге 1, получена величина  $N=8$ , что соответствует ансамблю сигналов имеющему базу, согласно (16.46), равную  $B_A = 4 \log_2 8 = 12$ , а следовательно, и количество некогерентных импульсов в ансамбле  $Q_A = 12$ . Матрица Адамара  $\mathbf{H}_8$  с учетом (16.4) будет иметь вид

$$\mathbf{H}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Используя свойства 2, 3 и 4, определим число  $Q$ , и  $m$ , а также местонахождение строк, где расположены функции Радемахера  $\text{Rad}(k)$ . Тогда, согласно выражения (16.43), будем иметь  $Q=4$ ,  $m = \log_2 8 = 3$ , а номера строк, как следует из (16.44), будут равны  $I = \{2, 3, 5\}$ .

Функция Радемахера  $\text{Rad}(1)$ , расположенная на пятой строке матрицы Адамара  $\mathbf{H}_8$ , определяет закон внутрипачечной модуляции первой пачки импульсов, имеющий вид  $S_1 = \{1, 1, 1, 1\}$ . Импульсы отстоят друг от друга на внутрипачечный период повторения  $T$ , а длительность первой пачки в силу свойства 5 и согласно выражению (16.45) равна  $4T + \tau$ .

Функция Радемахера  $\text{Rad}(2)$ , расположенная на третьей строке матрицы Адамара  $\mathbf{H}_8$ , определяет закон внутрипачечной модуляции второй пачки, имеющий вид  $S_2 = \{1, 1, 0, 0, 1, 1\}$ . Интервалы времени между импульсами и нулями внутри второй пачки одинаковы и равны внутрипачечному периоду повторения  $T$ , интервалы между группами импульсов составляют  $3T$ , а длительность второй пачки в силу свойства 5 и согласно выражению (16.45) равна  $6T + \tau$ .

Функция Радемахера  $\text{Rad}(3)$ , расположенная на второй строке матрицы Адамара  $\mathbf{H}_8$ , определяет закон внутрипачечной модуляции третьей пачки

импульсов, имеющий вид  $S_3 = [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]$ . Интервалы времени между импульсами и нулями внутри третьей пачки одинаковы и равны внутриапачечному периоду повторения  $T$ , интервалы между импульсами составляют  $2T$ , а длительность третьей пачки в силу свойства 5 и из согласно выражению (16.46), равна  $7T + \tau$ .

На этом этапе синтеза ансамбля сигналов заканчивается.

На шаге 2 осуществляется первый этап, заключающийся во внутриапачечной обработке сигналов, их детектирования и аналого-цифровом преобразовании.

На шаге 3 осуществляется второй этап обработки. Для этого определяются импульсные характеристики ФФ в соответствии со свойством 6. Поскольку нижняя половина матрицы Адамара  $H_8$  состоит из матриц Адамара

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } -H_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

то суммируя одноименные строки матрицы Адамара  $H_4$  со сдвинутыми на один разряд вправо строками матрицы Адамара  $-H_4$ , получим четыре импульсные характеристики ФФ, обрабатывающие первую пачку  $S_1$  в виде

$$h_1 = [1, 0, 0, 0, -1]; h_2 = [1, -2, 2, -2, 1]; \\ h_3 = [1, 0, -2, 0, 1]; h_4 = [1, -2, 0, 2, -1].$$

Аналогичным образом получим следующую группу импульсных характеристик для соответствующих ФФ. Поскольку нижняя половина матрицы Адамара  $H_4$  состоит из

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } -H_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

то суммируя одноименные строки матрицы Адамара  $H_2$  со сдвинутыми на один разряд вправо строками матрицы Адамара  $-H_2$ , получим две импульсные характеристики ФФ, обрабатывающие вторую пачку  $S_2$  в виде  $h_5 = [1, 0, -1]; h_6 = [1, -2, 1]$ .

В соответствии со свойством 7, определяется набор импульсных характеристик двух ФФ, которые имеют вид  $h_7 = [1, 1]$  и  $h_8 = [1, -1]$ , и формируют после воздействия на них импульсов из третьей пачки импульсов  $S_3$  функции Уолша, расположенные на первой и второй строках матрицы Адамара  $H_8$ .

С учетом свойств 6 и 7 осуществляется вычисление дискретных сверток полученных импульсных характеристик  $\{h_1, \dots, h_8\}$  с соответствующими сигналами  $S_1, S_2$ , и  $S_3$ , в результате чего должны появиться отклики  $\{x_1, \dots, x_8\}$ , описываемые матрицей Адамара  $H_8$  и имеющие вид

$$x_1 = h_7 * S_3 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]; \\ x_2 = h_8 * S_3 = [1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1]; \\ x_3 = h_5 * S_2 = [1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1]; \\ x_4 = h_6 * S_2 = [1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1]; \\ x_5 = h_1 * S_1 = [1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1]; \\ x_6 = h_2 * S_1 = [1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1]; \\ x_7 = h_3 * S_1 = [1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1]; \\ x_8 = h_4 * S_1 = [1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1],$$

где знак \* означает операцию дискретной свертки.

На шаге 4 реализуется третий этап обработки. Для этого вычисляются отклики  $\{y_1, \dots, y_8\}$  на сигналы  $\{x_1, \dots, x_8\}$  в соответствующих СФ с импульсными характеристиками  $\{x_1^*, \dots, x_8^*\}$ , в результате чего будем иметь

$$y_1 = x_1 * x_1^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}; \\ y_2 = x_2 * x_2^* = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, -7, 6, -5, 4, -3, 2, -1\}; \\ y_3 = x_3 * x_3^* = \{-1, -2, 1, 4, -1, -6, 1, 8, 1, -6, -1, 4, 1, -2, -1\}; \\ y_4 = x_4 * x_4^* = \{1, -2, -1, 4, 1, -6, -1, 8, -1, -6, 1, 4, -1, -2, 1\}; \\ y_5 = x_5 * x_5^* = \{-1, -2, -3, -4, -1, 2, 5, 8, 5, 2, -1, -4, -3, -2, -1\}; \\ y_6 = x_6 * x_6^* = \{1, 2, -1, -4, -3, -2, 3, 8, 3, -2, -3, -4, -1, 2, 1\}; \\ y_7 = x_7 * x_7^* = \{-1, 2, 1, -4, 3, -2, -3, 8, -3, -2, 3, -4, 1, 2, -1\}; \\ y_8 = x_8 * x_8^* = \{1, -2, 3, -4, 1, 2, -5, 8, -5, 2, 1, -4, 3, -2, 1\},$$

где знак (\*) обозначает комплексное сопряжение.

На шаге 5 реализуется четвертый этап межпериодной обработки ансамблей сигналов путем суммирования полученных на предыдущем шаге результатов в соответствии с выражением (16.42), в результате чего получаем  $y_8 = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 64, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$ .

Видно, что полученный отклик представляет собой цифровую ненормированную « $\delta$ -функцию», описываемую выражением (16.42).

## 16.6. Выводы

Рассмотренные в данной главе методы построения ансамблей сложных сигналов в той или иной степени основаны на изложенной теореме об обобщенной функции неопределенности. Использование подобного подхода требует отказа от постулата раздельности внутри- и межпериодной обработки, на котором основана обработка последовательности одинаковых радиосигналов.

В зависимости от того или иного класса задач могут быть использованы соответствующие первообразные матрицы, которые являются первоосновой для построения различных видов кодовых последовательностей.

Рассмотренный математический аппарат может быть использован для описания ансамблей различных видов сигналов, как простых, так и сложных. Из всех видов сложных сигналов в данной главе рассмотрены ФМи сигналы, которые были исследованы наиболее подробно.

Проведенный анализ методов синтеза ансамблей ФМи сигналов, и формируемых на их основе ансамблей D-кодов показал, что получающиеся в результате кодирующие последовательности отвечают требованиям оптимальности по всем известным критериям.

Показано, что совместная обработка таких ансамблей сигналов позволяет получать заданные отклики на выходах устройств обработки и виды которых наиболее полно характеризуются введенными понятиями в виде суммарной функции неопределенности и суммарного тела неопределенности.

Рассмотрены различные виды информационных радиосистем, которые позволяют обеспечить высокие технические характеристики за счет применения ансамблей сложных сигналов, и которые невозможно получить при использовании любых других известных сложных сигналов и методов их обработки.

Рассмотренная четырехэтапная процедура обработки позволяет осуществлять сжатие синтезированного ансамбля простых некогерентных сигналов, состоящего из пачек, имеющих свои законы внутрипачечной импульсной модуляции, что позволяет получить выходной отклик в виде ненормированной « $\delta$ -функции», т.е. отсутствуют БЛ в сжатом ансамбле, причем обработка может быть реализована в режиме работы «скользящее» окно.

## 17. ОБРАБОТКА ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ E-КОДОВ

## 17.1. Вводные замечания

Использование D-кодов в двух частотных каналах, как было указано в предыдущей главе, позволяет повысить пропускную способность системы радиосвязи, а также подавить БЛ в сжатом сигнале. Эффект подавления БЛ также имеет место в радиолокации в случае применения ансамблей сигналов на основе D-кодов.

Поскольку D-коды являются бинарными кодами, то они широко используются для модуляции по фазе на  $0$  и  $\pi$  каждого сигнала из ансамбля. К настоящему времени такие виды сигналов достаточно полно исследованы. В то же время, ансамбли сигналов, каждый из которых имеет большее количество состояний фаз к настоящему времени не получили должного рассмотрения.

К таким наиболее интересным сигналам можно отнести сигналы, имеющие состояние фаз  $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ . В качестве кодирующих последовательностей для получения таких сигналов могут быть использованы E-коды, синтез которых описан в работах [128, 133].

В настоящее время отсутствуют технические предложения по применению E-кодов. Это и будет рассмотрено на примере их использования в системах фазоразностной модуляции (ФРМ) второго порядка, называемых также четырехпозиционными или системами с двукратной ФРМ.

Эти системы, которые относятся к синхронным системам связи, обладают рядом преимуществ по сравнению с двухпозиционными. К этим преимуществам относится возможность более высокой скорости передачи информации по одному частотному каналу при относительно незначительном ухудшении помехоустойчивости по сравнению с двухпозиционными системами, а также нечувствительность к доплеровскому сдвигу [130, 139].

17.2. Формирование и модуляция сигналов Е-кодами

Кратко рассмотрим формирование Е-кодов. В качестве примера возьмем модуляцию Е-кодом сигнала системы радиосвязи с двукратной ФРМ. Положим, что Е-код имеет вид, полученный из первой строки матрицы  $E_4^{2bc3bc}$ , описываемой выражением (16.31), т.е.  $1, -j, 1, j$ . Здесь  $1 = e^{j0}$ ,  $j = e^{j\pi/2}$ ,  $-1 = e^{j\pi}$ ,  $-j = e^{j3\pi/2}$ .

Положим, что значение входных данных, длительность которых равна длительности информационных символов источников сообщений, будет соответствовать значениям начальных фаз радиосигнала согласно табл. 17.1, в которой приведены также значения Е-кода, определяемые состояниями источников сообщений.

Таблица 17.1

Соответствия состояний двух источников сообщений значениям начальных фаз и Е-коду

Состояние 1-го источника информации	Состояние 2-го источника информации	Состояние начальной фазы	Значение Е-кода
1	1	0	1, -j, 1, j
1	-1	$\pi/2$	j, 1, j, -1
-1	-1	$\pi$	-1, j, 1, -j
-1	1	$3\pi/2$	-j, -1, -j, 1

Очевидно, что длительность информационных символов  $\tau_c$  должна быть в 4 раза большей, чем длительность дискрета  $\tau_d$  Е-кода.

На рис. 17.1 приведены временные диаграммы, которым должна соответствовать работа кодера, переводящего состояния источников сообщений в сигналы, соответствующие значениям Е-кода.

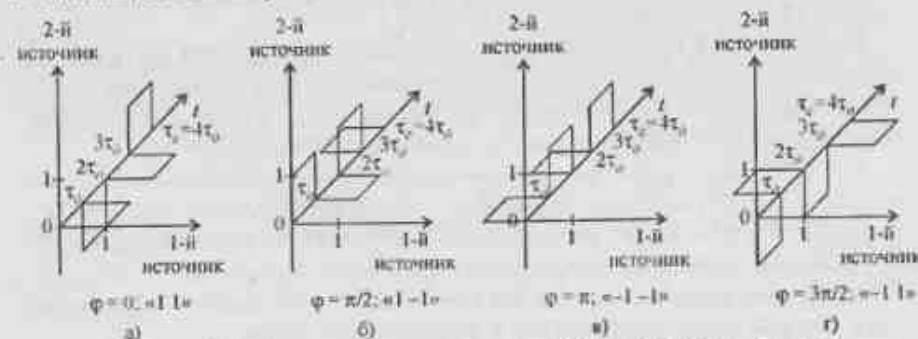


Рис. 17.1. Аксонометрические временные диаграммы Е-кода в зависимости от состояния источников информации

Анализ временных диаграммы показывает, что при таком представлении Е-кода соблюдается принцип построения оптимальных кодов, заключающийся в том, что «наиболее удаленные векторы должны соответствовать наиболее различающимся комбинациям» [132].

Очевидно, что в данном случае на приемном конце линии радиосвязи требуется комплексный СФ, настроенный на обработку соответствующего Е-кода.

С другой стороны, как показано в [140], максимальная помехоустойчивость при приеме будет в том случае, когда выполняется условие ортогональности

$$\rho_{kl} = \frac{1}{E} \int_0^T \psi_k(t) \psi_l(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } k=l; \\ 0 & \text{при } k \neq l, \end{cases}$$

где  $\rho_{kl}$  – коэффициент взаимной корреляции сигналов;  $\psi_k(t)$  и  $\psi_l(t)$  – ортогональные функции, описывающие сигналы;  $E = E_k = E_l$  – энергия сигналов;  $T = \tau_c = 4\tau_d$  – длительность Е-кода.

Положим, что  $E_{\tau_d} = 1$  и  $E_{\tau_c} = 4$ . Тогда последнее выражение в дискретной форме, с учетом сделанных замечаний, может быть представлено в виде

$$\tilde{\rho}_{kl} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 \psi_k(n\tau_d) \psi_l(n\tau_d),$$

где  $n\tau_d = t$ ;  $n = 0, 1, 2, 3$ ;  $\tau_d = \tau_c/4$ . Можно полагать, что  $\psi_k(n\tau_d)$  – значения отсчетов импульсной характеристики СФ,  $\psi_l(n\tau_d)$  – значение отсчетов сигнала, модулированного Е-кодом.

Результаты вычислений  $\tilde{\rho}_{kl}$  с учетом правил умножения кодов, согласно табл. 16.1, приведены в табл. 17.2.

Из анализа приведенных результатов видно, что степень различия между сигналами, характеризуемая величиной  $\tilde{\rho}_{kl}$ , будет максимальной для тех случаев, когда фазы сигналов отличаются на  $\pi$ , а для случая межквантового их различия – совпадает с результатами, приводимыми в [139] для систем радиосвязи с ФРМ второго порядка, в которых используются простые сигналы.

Положим, что алгоритм формирования Е-кодов описывается выражением [141]

$$U(t) = \cos[0,5\pi(1 - c_1(t))] + j \sin[0,5\pi c_2(t)],$$

где  $c_1(t) = c_2(t) = \{1 \text{ или } -1\}$  – модуляционные функции двух независимых источников сигнала.

Нетрудно видеть, что в этом случае суммарный вектор сдвигается на  $\pi/4$  относительно синфазной и квадратурной составляющих, а, следовательно, на приемном конце необходимо предусмотреть квадратурную обработку.

Таблица 17.2

Значения коэффициента взаимной корреляции  $\bar{r}_{kj}$

Состояния источников сообщений		Значения, принимаемые Е-кодом	Отсчеты импульсной характеристики СФ для 1-го канала	Отсчеты импульсной характеристики СФ для 2-го канала	Значения коэффициента взаимной корреляции
1-й канал	2-й канал				
1	1	$1, -j, 1, j$	$1, -j, 1, j$		1
1	-1	$j, 1, j, -1$	$1, -j, 1, j$		0
-1	-1	$-1, j, -1, -j$	$1, -j, 1, j$		-1
-1	1	$-j, -1, -j, 1$	$1, -j, 1, j$		0
1	1	$1, -j, 1, j$		$j, 1, j, -1$	0
1	-1	$j, 1, j, -1$		$j, 1, j, -1$	1
-1	-1	$-1, j, -1, -j$		$j, 1, j, -1$	0
-1	1	$-j, -1, -j, 1$		$j, 1, j, -1$	-1

На передающем конце линии радиосвязи необходимо наличие кодера, переводящего четыре возможных состояния источников информации в четыре различных состояния Е-кода и фазового модулятора.

Сигнал на выходе кодера должен представлять собой последовательность импульсов, разнесенных во времени и передающихся в последовательности, определяемой чередованием элементов Е-кода. В этом случае целесообразно импульсы выходного напряжения передавать по четырем различным каналам, которые условно можно обозначить как «1», «j», «-1», «-j».

Функцией фазового модулятора является модуляция излучаемого колебания по фазе в соответствии с сигналами кодера.

Рассмотрим работу кодирующего устройства. Так как сигналы, поступающие с источников сообщений, являются цифровыми, у которых информационная «1» соответствует логической «1», а информационная «-1» соответствует логическому «0», то целесообразно применять цифровые схемы.

Функционально кодирующее устройство состоит из трех основных узлов.

Первый функциональный узел представляет собой регистр сдвига (RG), который формирует последовательность импульсов, длительность каждого из которых равна  $\tau_b$ , и определяет период повторения импульсов, поступающих на вход регистра.

Второй узел является дешифратором (DC), который имеет два входа, на которые поступают сигналы источников сообщений, а на одном из его четырех выходов появляется потенциал, соответствующий входному состоянию.

Третий узел, который производит соответствующую кодировку, может быть выполнен как на основе мультиплексора (MX), так и набора цифровых схем.

Структурная схема кодирующего устройства имеет вид, представленный на рис. 17.2.

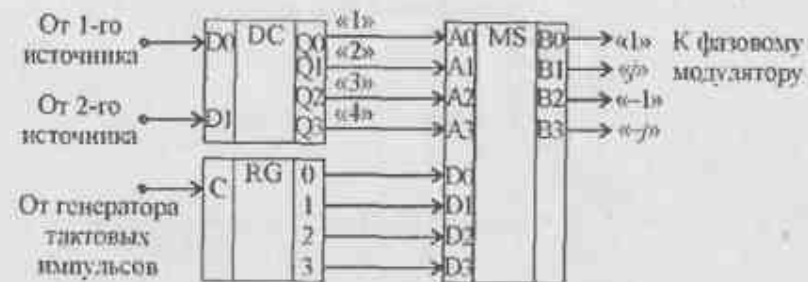


Рис. 17.2. Структурная схема кодирующего устройства

Поступающие последовательно во времени импульсы с выходов кодирующего устройства подаются на входы фазового модулятора в соответствии со структурной схемой, изображенной на рис. 17.3.



Рис. 17.3. Структурная схема модулятора

На рис. 17.4 изображены временные диаграммы, соответствующие реальной и мнимой частям Е-кода вида  $1, -j, 1, j$ , появляющиеся на выходах «1», «j», «-1», «-j» кодирующего устройства.

Полученные на выходах фазовых модуляторов радиосигналы, начальные фазы которых соответствуют Е-коду, через суммирующее устройство поступают на усилитель мощности, усиливаются и излучаются в эфир.

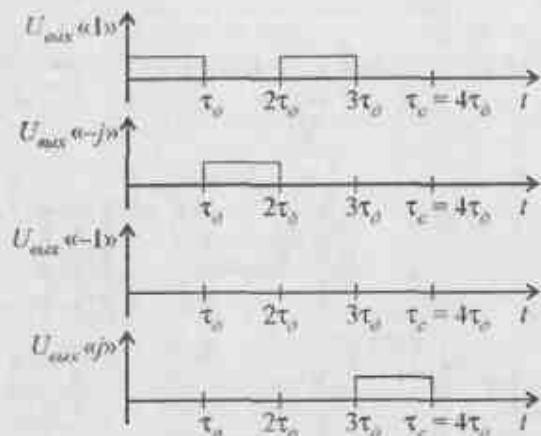


Рис. 17.4. Временные диаграммы, соответствующие реальной и мнимой частям Е-кода на выходах кодирующего устройства

### 17.3. Обработка сигналов модулированных Е-кодами

17.3.1. На приемном конце сигнал, модулированный по фазе Е-кодом, поступает через антенный тракт на линейную часть радиоприемного тракта, где производится его усиление и частотная селекция в тракте усилителя промежуточной частоты.

Для обеспечения условий обработки ФМн сигналов на основе Е-кодов с учетом правил, приведенных в табл. 16.1, необходимо осуществить когерентную обработку принимаемого сигнала. В результате этой обработки необходимо обеспечить такой режим, чтобы демодуляция входного сигнала, составляющие которого соответствуют 1-му источнику информации, выделялись на одном из каналов демодулятора, а составляющие, соответствующие 2-му источнику информации, — на другом канале. При использовании Е-кода необходимо, чтобы векторы, описывающие код и соответственно состояния источников информации, были расположены вдоль выбранных ортогональных координатных осей. Поскольку векторы, описывающие получаемый Е-код, повернуты на  $\pi/4$  относительно модулирующих колебаний, и их целесообразно принять в качестве ортогональных координатных осей, то на приемном конце также следует обеспечить дополнительный сдвиг фаз опорного колебания на угол  $\pi/4$  [141].

Структурная схема, предназначенная для формирования опорного колебания, имеет вид, представленный на рис. 17.5. Структурная схема цифровой части устройства обработки четырехпозиционного сигнала, фазовая структура которого описывается Е-кодом и соответствует системе радиосвязи в которой используется ФРМ второго порядка, изображена на рис. 17.6.

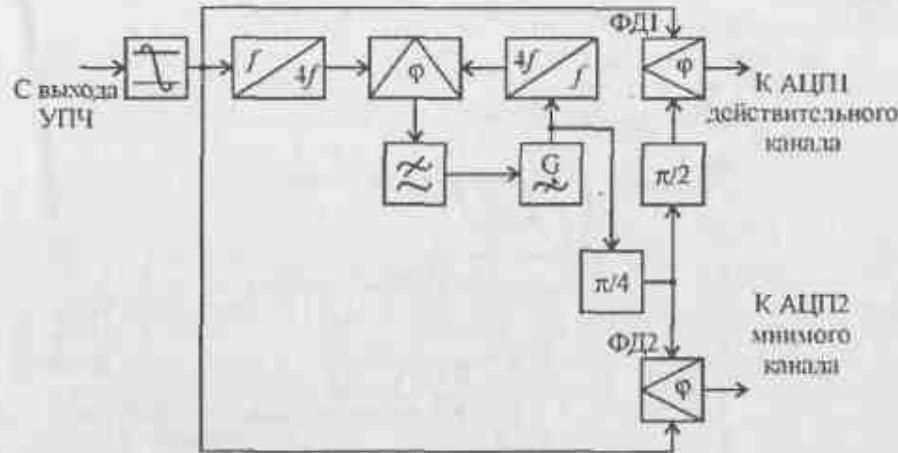


Рис. 17.5. Структурная схема аналоговой части демодулятора. ФД<sub>1</sub> — фазовый детектор,  $i = 1, 2$ .

Полагаем, что демодулированный сигнал совпадает с направлениями координатных осей, а следовательно, на выходах ФД<sub>1</sub> будут выделяться напряжения, соответствующие колебаниям, находящимся в фазе (противофазе), и не будут выделяться напряжения, соответствующие колебаниям, сдвинутым по фазе на углы  $\pm\pi/2$ .

Принимаемый демодулированный сигнал с выходов ФД<sub>1</sub> в виде двух квадратурных составляющих, пройдя фильтры нижних частот, поступает на АЦП действительного и мнимого каналов обработки.

В АЦП обоих каналов происходит дискретизация с периодом выборки, равным длительности дискрета  $\tau_d$ , и квантование на требуемое число уровней.

Поступающие на цифровые линии задержки 1 и 2 (ЦЛЗ1 и ЦЛЗ2) кодовые последовательности соответствуют действительной и мнимой частям сигнала. Выходы ЦЛЗ1 и ЦЛЗ2 соединены с сумматорами  $\Sigma 1 - \Sigma 6$  таким образом, что на их выходах появляются значения сжатых сигналов в момент времени  $t = 4\tau_d = \tau_c$ , знаки которых соответствуют состояниям информационных источников. Эти сигналы поступают на декодирующее и решающее устройство, на двух выходах которого появляется переданная информация.

17.3.2. Технически данную структурную схему проще реализовать, если произвести ряд линейных операций над сигналами, поступающими на обработку. Очевидно, что при сделанных предположениях на выходах ФД будут сигналы, которые с учетом временных диаграмм на рис. 17.1 примут вид, представленный на рис. 17.7.

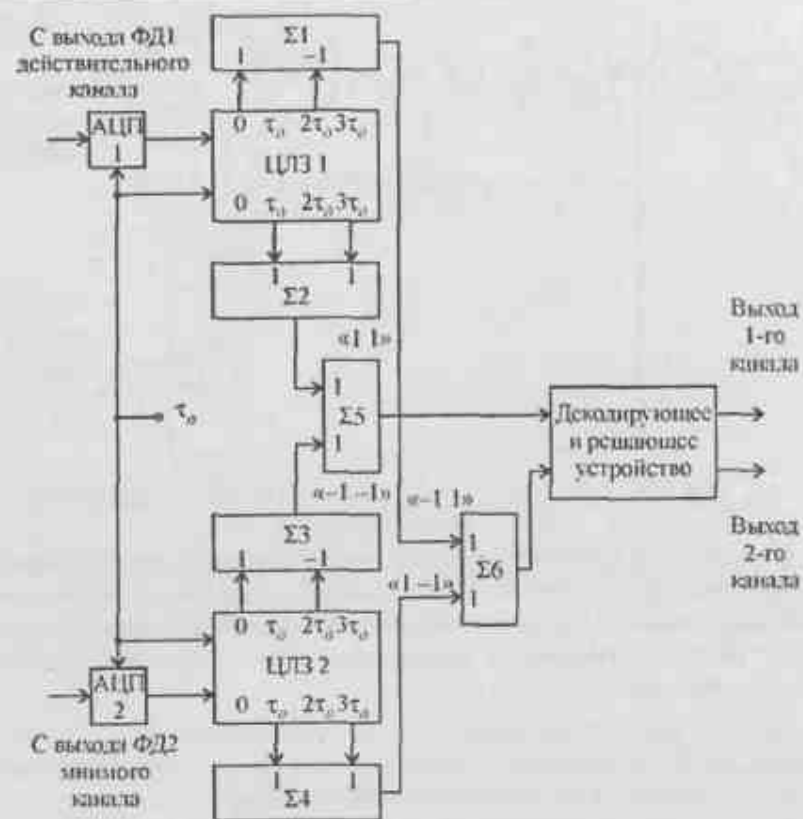


Рис. 17.6. Структурная схема устройства сжатия четырехпозиционных сигналов системы радиосвязи с двухкратной ФРМ

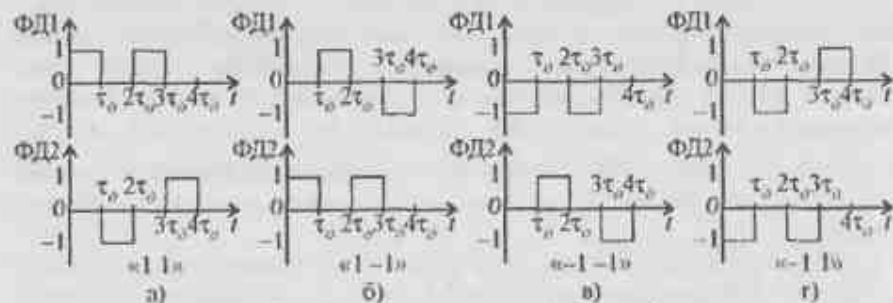


Рис. 17.7. Форма сигналов на выходах фазовых детекторов квадратурных каналов

Полагая, что сигналы на выходах ФД1 и ФД2 имеют единичную амплитуду, так как с выхода УПЧ поступает сигнал, ограниченный по амплитуде.

Соответствия сообщений «11», «-1-1», «-11» и «1-1» позициям импульсов во времени принимаемого E-кода приведены в табл. 17.3.

Таблица 17.3

Соответствия символов сообщений позициям E-кода

Символы сообщений		Амплитуда импульсов на выходах ФД							
		ФД1 – реальный канал				ФД2 – мнимый канал			
1-й канал	2-й канал	$\tau_0$	$2\tau_0$	$3\tau_0$	$4\tau_0$	$\tau_0$	$2\tau_0$	$3\tau_0$	$4\tau_0$
1	1	1	0	1	0	0	-1	0	1
1	-1	0	1	0	-1	1	0	1	0
-1	-1	-1	0	-1	0	0	1	0	-1
-1	1	0	-1	0	1	-1	0	-1	0

Из табл. 17.3 видно, что если сложить и вычесть сигналы на выходах ФД1 и ФД2, то получаются комплементарные (дополнительные) последовательности, описываемые D-кодами. Следовательно, можно использовать СФ, которые рассматривались ранее для обработки ФМ-сигналов, модулированных D-кодами. Тогда структурные схемы обработки преобразованных данных и соответствующие кодирующие последовательности будут иметь вид, представленный на рис. 17.8 и рис. 17.9.

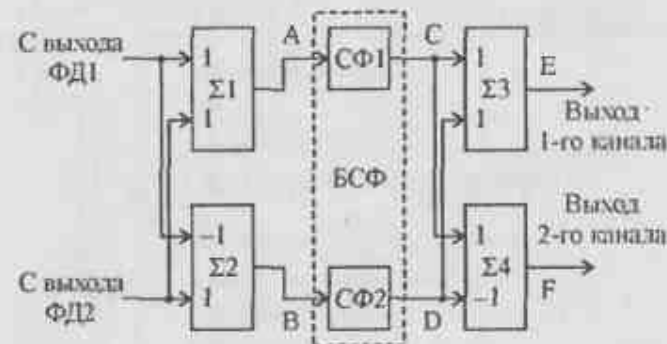


Рис. 17.8. Структурная схема устройства обработки преобразованных сигналов

Из рис. 17.4 видно, что полученные кодирующие последовательности представляют собой комплементарные последовательности, положения которых в точках А и В (рис. 17.8), а также их знаки содержат передаваемую информацию.

Однако особенности, связанные с другим видом используемой модуляции, вызывают необходимость рассмотрения вопросов обработки таких сигналов.



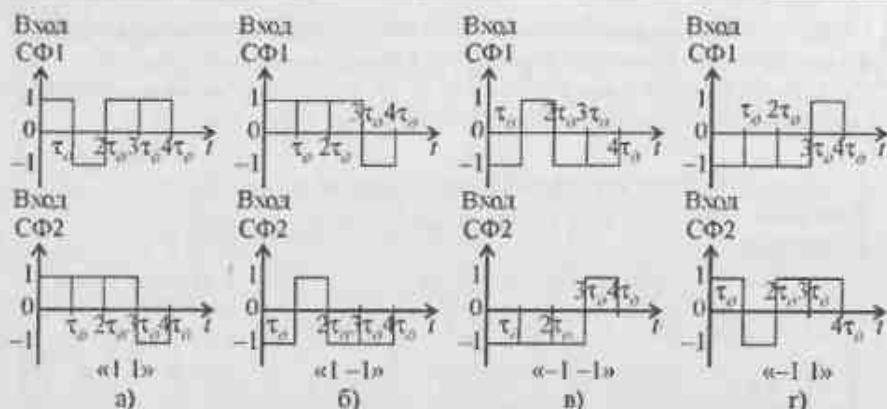


Рис. 17.9. Виды кодируемых последовательностей на входах первого и второго согласованных фильтров

В соответствии с рис. 17.8 и рис. 17.9 структурная схема блока согласованных фильтров (БСФ) принимает вид, представленный на рис. 17.10.

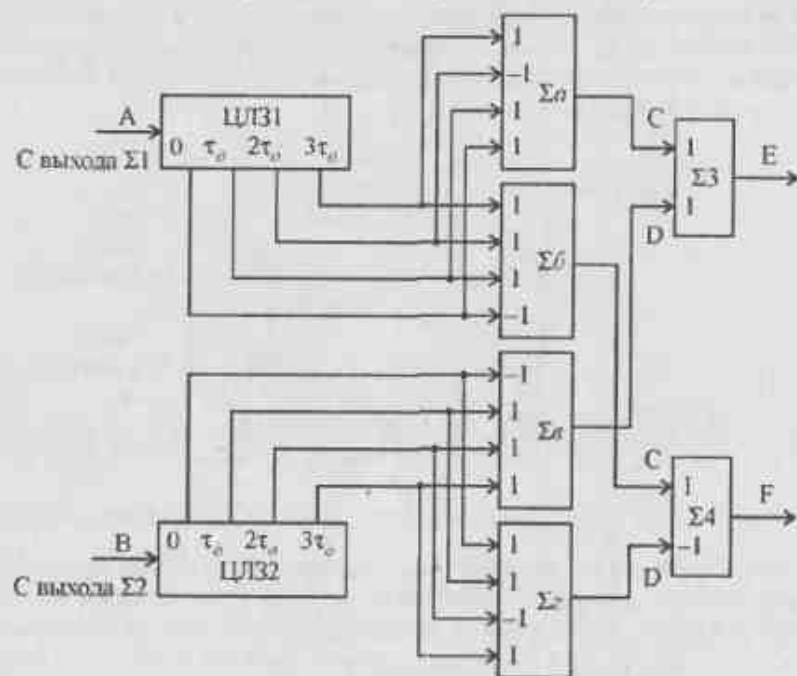


Рис. 17.10. Структурная схема блока согласованных фильтров

При подаче на входы структурной схемы, изображенной на рис. 17.10, сигналов, вид которых представлен на рис. 17.9, на выходах  $\Sigma\alpha$ ,  $\Sigma\beta$ ,  $\Sigma\gamma$ ,  $\Sigma\delta$  и соответственно  $\Sigma 3$  (точка E) и  $\Sigma 4$  (точка F) будут сигналы видов, представленных на рис. 17.11 – рис. 17.14.

Анализ рис. 17.11 – рис. 17.14 позволяет сделать вывод о том, что каждому состоянию источников информации соответствует сжатый сигнал соответствующей амплитуды на соответствующем выходе, имеющий соответствующий знак. При этом на выходе, где имеется информационный сигнал, отсутствуют боковые лепестки, в то время как на другом выходе эти лепестки имеются. Полученный эффект совпадает с эффектом, который имеет место при «обратной» работе с использованием D-кодов в двухчастотном сигнале.

Следовательно, после ограничения по модулю снизу амплитуд сигналов на выходах E и F схемы, изображенной на рис. 17.10, после их нормировки и учета знаков получается полное соответствие этих сигналов переданным информационным символам. Эти соответствия представлены в табл. 17.4.

Очевидно, что, подавая указанные в табл. 17.4 комбинации на вход декодирующего устройства, легко выделить символы, передаваемые источниками сообщения.

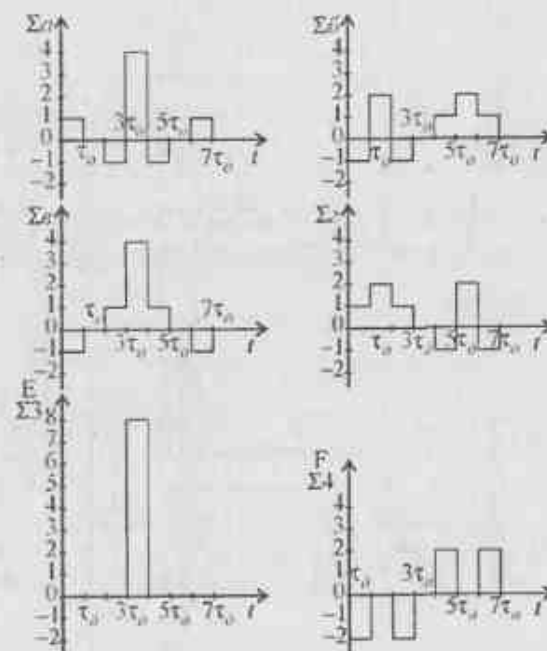


Рис. 17.11. Вид сигналов на выходах сумматоров и выходах E и F при состоянии источников информации «1 1»

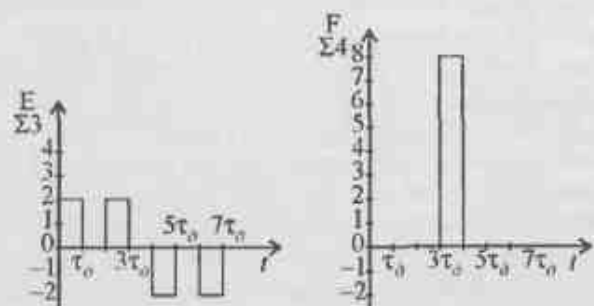


Рис. 17.12. Вид сигналов на выходах E и F при состоянии источников информации «1 -1»

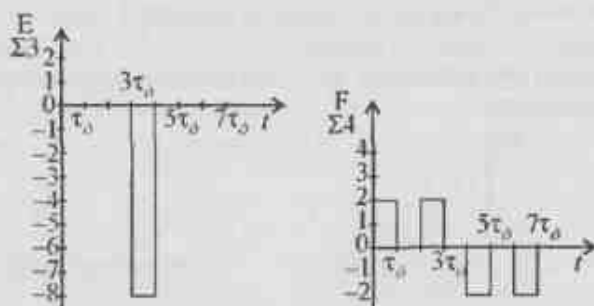


Рис. 17.13. Вид сигналов на выходах E и F при состоянии источников информации «-1 -1»

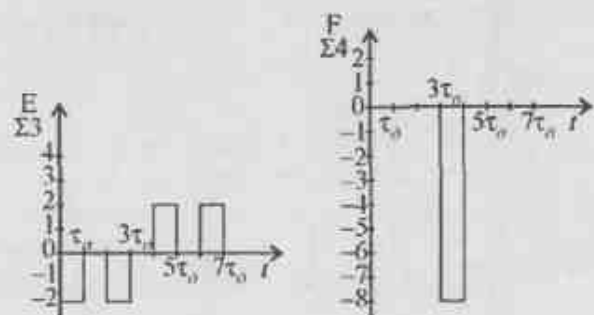


Рис. 17.14. Вид сигналов на выходах E и F при состоянии источников информации «-1 1»

Таблица 17.4

Соответствия на выходах E и F переданным информационным символам сообщений

Символы сообщений		Выход E	Выход F
1-й канал	2-й канал		
1	1	1	0
1	-1	0	1
-1	-1	-1	0
-1	1	0	-1

#### 17.4. Обработка фазоманипулированных на основе E-кодов сигналов в многоканальных системах радиосвязи

17.4.1. В настоящее время уделяется серьезное внимание синхронным системам радиосвязи и радиовещания, в которых используются сигналы с частотным разделением каналов и применяется ФРМ в каждом канале [146].

Системы радиосвязи на основе указанного подхода были разработаны и продемонстрировали свою эффективность в середине 60-х годов [139]. Однако не удалось создать системы радиосвязи с большим числом каналов, а также использовать многократные системы с ФРМ вследствие ограничений, связанных с техническими возможностями того периода времени.

Появление быстродействующей цифровой элементной базы и алгоритмов БПФ позволило в реальном масштабе времени производить обработку больших массивов чисел, что, в свою очередь, позволило реализовывать алгоритмы, которые по тем или иным причинам до этого времени не могли быть реализованы [8, 12].

В частности, применение алгоритмов БПФ и ОБПФ позволило отказаться от массивов генераторов синусоидальных и косинусоидальных сигналов. В работе [146] приведен достаточно подробный исторический обзор состояния проблемы, связанный с построением цифровых многоканальных систем радиосвязи с использованием алгоритмов ОБПФ и БПФ, которые использовались как часть процесса модуляции - демодуляции.

Внимание, которое уделяется синхронным многоканальным системам радиосвязи с ФРМ высокой кратности, в которых применяется цифровая обработка сигналов, связано со следующими их преимуществами [21].

Во-первых, использование соответствующих методов кодирования позволяет эффективно бороться с замираниями сигналов в отдельных частотных каналах.

Во-вторых, достигается эффективное использование отводимой полосы частот, поскольку применение ортогональных сигналов позволяет обеспечивать перекрытие спектров подканалов на уровне 3 дБ.

В-третьих, разделение по частоте за счет использования алгоритмов, основанных на ДПФ, в частности ОБПФ и БПФ, позволяет на приемном конце организовать обработку таким образом, что межсимвольные помехи могут быть устранены. Это достигается за счет того, что шаг по оси частот выбирается из условия его равенства величине, обратно пропорциональной длительности дискрета.

Следовательно, данный многоканальный вид радиосвязи может рассматриваться как вид модуляции с множеством поднесущих, частоты которых выбраны так, чтобы обеспечить ортогональность обрабатываемых символов.

Тем не менее, получить на практике полное подавление межсимвольных помех не удастся вследствие вносимых искажений в передаваемое сообщение в канале радиосвязи. Поэтому одним из методов борьбы с указанными помехами является введение временного защитного интервала между информационными импульсами, что снижает скорость передачи информации на 15–20% [139, 146].

В работе [146] предлагается структурная схема системы радиосвязи с ФРМ на основе алгоритмов ОБПФ и БПФ, изображенная на рис. 17.15.

Предполагается, что входные данные поступают последовательно во времени на вход кодирующего устройства. При этом полагаем, что каждое входное данное принимает значение  $\pm 1$ . Группируя эти данные по два, получаем последовательность комплексных чисел  $\{d_0, d_1, d_2, \dots, d_{N-1}\}$ , где

$$d_i = a_i + jb_i, \quad \{a_i, b_i\} = \pm 1.$$

Полученные данные от  $2N$  источников информации переводятся в параллельную форму и этим самым образуют  $2N$ -мерный входной вектор.

Каждому значению вектора входных данных соответствует свой «частотный» вход вычислителя, производящего операции по алгоритму ОБПФ. Этим самым все «частотные» входные данные преобразуются при помощи ортогонального преобразования во «временную» последовательность согласно алгоритму

$$\hat{S}_m = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \exp\left\{j \frac{2\pi}{N} nm\right\},$$

где  $m = 1, 2, \dots, N-1$ .

Нетрудно видеть, что здесь «эквивалентная» частота поднесущей равна  $f_n = 2\pi n/N$ , временной интервал между отсчетами  $\Delta t = T_c/N$ , номер отсчета сигнала  $\hat{S}_m$  во времени  $t_m = m\Delta t$ .

Сформированный указанным образом «временной» вектор преобразуется в последовательность квадратурных отсчетов, которые последовательно во времени поступают на устройство, добавляющее защитный временной интервал в обе квадратурные компоненты.

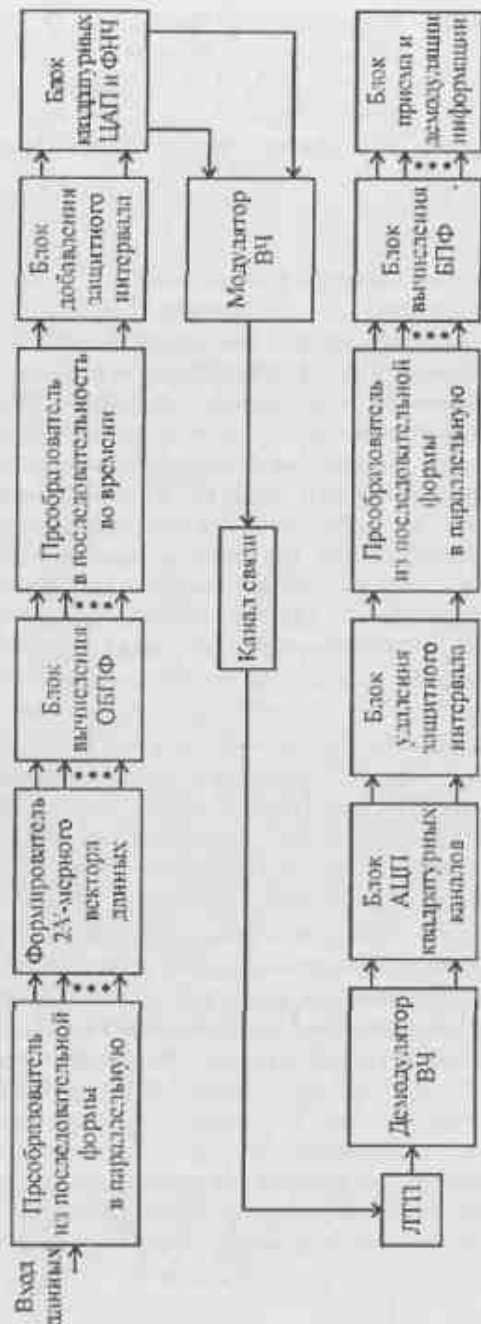


Рис. 17.15. Структурная схема многоканальной системы радиосвязи с цифровым формированием и обработкой сигналов с ФРМ

Далее эти квадратурные компоненты поступают на ЦАП и ФНЧ, где стабилизируется реализация и устраняются резкие перепады, связанные с изменениями величины кодов на выходах ЦАП. Одновременно этим самым устраняются паразитные высокочастотные составляющие, что сужает спектр излучаемого сигнала. Полученные квадратурные сигналы являются модулирующими для высокочастотных (ВЧ) колебаний, сдвинутых по фазе на  $\pi/2$ , как показано на рис. 17.3. После суммирования эти ВЧ колебания излучаются в эфир.

Пройдя по каналу связи, радиосигналы усиливаются в ЛПП, соответствующим образом демодулируются в демодуляторе высокой частоты, в результате чего образуются квадратурные составляющие. Эти квадратурные составляющие поступают на АЦП действительного и мнимого каналов, на выходах которых из полученной последовательности кодов в блоке удаления защитного интервала устраняются коды, соответствующие временному защитному интервалу. Далее, полученные группы кодовых последовательностей переводятся из последовательной формы в параллельную и поступают на блок вычисления БПФ. Полученные на выходе этого блока отсчеты комплексных чисел представляют собой переданную частотную информацию, которая поступает на блок приема информации. В этом блоке происходит соответствующее декодирование, в частности, соответствующее алгоритму двукратной ФРМ, и выделенная информация поступает к потребителю.

17.4.2. Одной из важнейших характеристик систем радиосвязи с использованием многократной ФРМ является выбор длительности информационного сигнала. С одной стороны, чем больше его длительность, тем больше его энергия и возможна большая плотность расположения поднесущих частот в заданном частотном диапазоне [146]. С другой стороны, это приводит к снижению пропускной способности многоканальной системы радиосвязи.

Уменьшение длительности символа сообщения приводит к снижению требований к стабильности расположенных близко по оси частот поднесущих, расширению полосы занимаемых частот, но при этом необходимо учитывать условия распространения радиоволн, в частности многолучевость. Как показано в [147], выходом из данной ситуации может быть использование E-кодов в многоканальных системах радиосвязи с ФРМ.

В этом случае происходит соответствующая модуляция каждого информационного символа соответствующим E-кодом. При этом каждому «частотному» каналу присваивается свой E-код, ортогональный соседним «частотным» каналам, а его фазовая ориентация определяется состоянием обоих информационных источников сообщений аналогично тому, как было описано для одноканальных систем радиосвязи с двукратной ФРМ.

Отметим, что ортогональность E-кодов в соседних каналах обеспечивается их свойствами, а сами коды могут периодически повторяться по «час-

тоте», т.е. для рассмотренного ранее частного случая они будут повторяться через каждые четыре частотных канала.

Поскольку каждый информационный символ в этом частном случае состоит из четырех дискретов в случае его модуляции E-кодом, то, следовательно, полоса частот, занимаемая многоканальным сообщением, также расширится в четыре раза по сравнению с системой, в которой используются простые сигналы и которая имеет аналогичную пропускную способность. Последнее обстоятельство снижает требования, которые предъявляются к стабильности поднесущих и к их зависимости от доплеровского сдвига при осуществлении радиосвязи с подвижными объектами.

Что касается необходимости учета условий распространения радиоволн, то применение сложных сигналов как раз и позволяет устранять нежелательные эффекты, возникающие из-за этого при обработке радиосигналов [140].

На основании изложенного выше можно предположить следующую структурную схему многоканальной системы радиосвязи с использованием двукратной ФРМ с использованием E-кодов, которая изображена на рис. 17.16.

Видно, что структурная схема, изображенная на рис. 17.16, отличается от структурной схемы, изображенной на рис. 17.15, наличием узла дополнительной модуляции информационных дискретов E-кодом, а приемная ее часть — наличием добавленного блока умножения отсчетов принятого сигнала на отсчеты импульсной характеристики СФ, соответствующие принятому E-коду обрабатываемого канала многоканального сообщения.

Применение соответствующего E-кода в каждом канале, фаза которого определяется состоянием двух источников сообщения, позволяет снизить межсимвольные искажения, поскольку в двух соседних каналах, как указывалось, применяются ортогональные E-коды. Соответственно применение E-кодов позволяет получать сжатые сигналы на выходах блока перемножения сигналов на отсчеты импульсной характеристики соответствующего согласованного фильтра.

Поскольку сложные ФМн сигналы в системах связи с ФРМ имеют такую же энергию, как и простые сигналы той же длительности и амплитуды, то сжатые сложные сигналы имеют максимальные амплитуды в соответствующее число раз больше, чем обработанные простые сигналы. Следовательно, применяя сложные сигналы, можно обеспечить большую дальность связи, по сравнению со случаем применения простых сигналов в системах многоканальной радиосвязи с ФРМ.

### 17.5. Выводы

В данной главе рассмотрены различные виды четырехфазных синхронных систем радиосвязи с ФРМ второго порядка в которых, для повышения помехоустойчивости, использованы E-коды. Подобные системы обладают рядом преимуществ по сравнению с двухпозиционными системами радиосвязи с ФРМ первого порядка использующих D-коды.

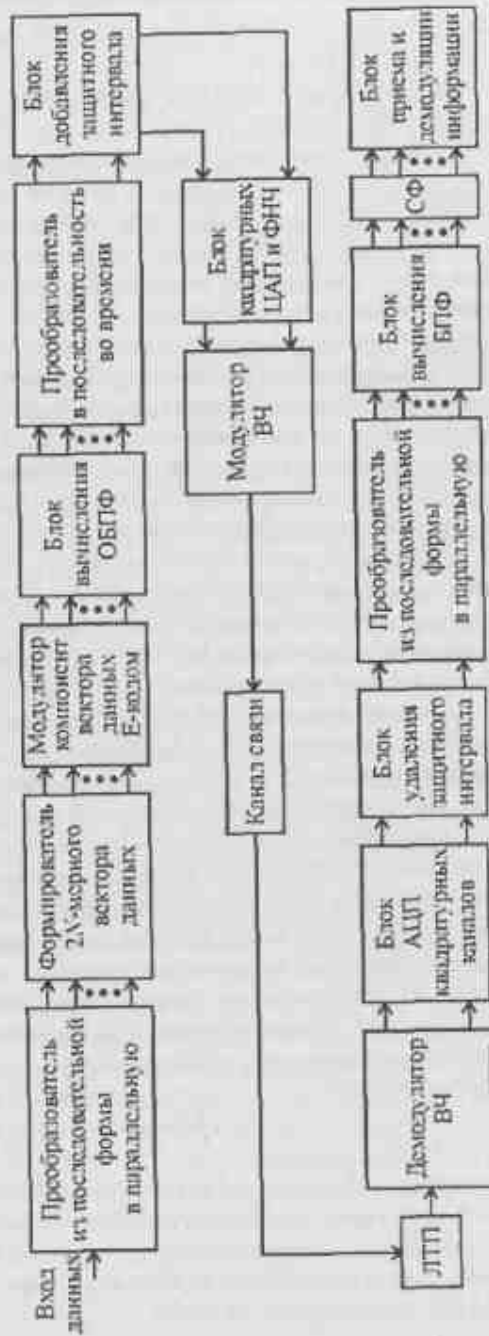


Рис. 17.16. Структурная схема многоканальной системы радиосвязи с цифровым формированием и обработкой сигналов с ФРМ и использованием E-кодов

К таким преимуществам относится возможность более высокой скорости передачи информации по одному частотному каналу при относительно незначительном ухудшении потенциальной помехоустойчивости, а также нечувствительность к доплеровскому смещению.

Показаны особенности формирования и модуляции сигналов по фазе с использованием E-кодов как для одноканальных синхронных систем радиосвязи с ФРМ второго порядка, так и синхронных многоканальных. Показано, что более высокая эффективность четырехфазных синхронных многоканальных ФРМ второго порядка достигается за счет применения алгоритма ОБПФ при формировании илчущаемых сигналов и алгоритма БПФ при их обработке.

Применение указанных алгоритмов снимает проблему формирования на передающем и приемной сторонах линии радиосвязи высокостабильной сетки частот расположенных на одинаковых частотных интервалах друг от друга и одновременно решает проблему количества используемых каналов.

В тоже время, одноканальные системы радиосвязи с ФРМ второго порядка в случае использования E-кодов, не требует каких-либо изменений в узлах, формирующих когерентные колебания для демодуляции принимаемого сообщения.

При этом использование E-кодов в системах радиосвязи с ФРМ второго порядка позволяет сохранить преимущества таких систем с одновременным повышением их характеристик за счет применения сложных сигналов. Последнее приводит к расширению полосы занимаемых частот.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Все многоканальные системы радиосвязи на основе ФРМ второго порядка, сформированные по принципу параллельного соединения одноканальных систем, каждая из которых использует общий для всех канал синхронизации, обладают тем недостатком, что имеющиеся при передаче сигналов замирания в тех или каналах радиосвязи, могут привести к полной потере передаваемой информации в этих каналах.

Применение алгоритмов ОБПФ при формировании и алгоритмов БПФ при обработке принимаемой реализации позволяет избежать указанного недостатка и сохранять передаваемую информацию по всем каналам радиосвязи.

При этом происходит отклонение векторов принимаемых сигналов от координатных осей во всех каналах одновременно на принимаемом конце, что несколько снижает помехоустойчивость по всем каналам.

Однако данный недостаток преодолевается использованием принципа, лежащего в основе построения всех систем радиосвязи, использующих ФРМ соответствующих порядков.

Применение E-кодов в многоканальных системах радиосвязи с ФРМ второго порядка, использующих алгоритмы ОБПФ и БПФ, приводит к расширению полосы занимаемых частот и снижению влияния многолучевости распространения радиоволн, а следовательно, и к повышению помехоустойчивости соответствующей системы передачи информации.

## 18. АНСАМБЛИ КODOVЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В АСИНХРОННОЙ СВЯЗИ

### 18.1. Вводные замечания

Рассмотренные в предыдущей главе многоканальные синхронные системы связи при всех своих преимуществах, получаемых в силу централизованного объединения абонентов, обладают одним серьезным недостатком, а именно – необходимостью синхронизации передающего и приемного трактов передачи сигналов во всех каналах одновременно. Эффективность работы этих систем существенно зависит от помехоустойчивости канала передачи синхросигнала, поскольку любые нарушения условий синхросигнала приводят к разрушению информации во всех каналах связи [150].

В настоящее время многоканальные автономные системы передачи информации используются в тех случаях, когда нельзя по тем или иным причинам применять централизованное объединение абонентов. К таким причинам относятся размещение абонентов на большой территории, случайность их размещения, высокие скорости движения абонентов, необходимость обеспечения большой надежности и живучести по сравнению с многоканальными синхронными системами [129].

Системы связи, которые удовлетворяют указанным требованиям носят название систем асинхронной адресной связи (ААС) [148]. Такие системы принципиально являются асинхронными, т.е. осуществить синхронизацию в перечисленных случаях практически невозможно.

В силу ограничений, накладываемых на полосу занимаемых частот системами ААС, в которой работают все их абоненты, в этих системах используется кодовое уплотнение и разделение сигналов, которое впервые предложено в работе [149].

Наиболее удобно осуществлять кодовое уплотнение и разделение абонентов в случае, когда передаваемая информация каждого абонента представляется в виде последовательности бит, что реализуется при использовании дельта-модуляции. Подобное представление информации, а также возмож-

ность ее обработки на цифровой элементной базе позволяет называть соответствующие системы ААС цифровыми, которые и будут с той или иной степенью подробности рассмотрены в данной главе.

### 18.2. Синтез ансамблей комплементарных кодовых последовательностей

18.2.1. Как показано в работах [129, 148], выбор сигналов для цифровых систем ААС, которые в дальнейшем будем называть системами ААС, полностью определяет их эффективность. Эффективность систем ААС зависит от уровня внутрисистемных помех, являющихся основными для этого вида радиосвязи, и полностью определяется свойствами применяемых ансамблей сложных сигналов при условии, что каждый из сигналов ансамбля объединен единым правилом построения, определяющим их индивидуальные и совместные характеристики [129].

Для снижения уровня внутрисистемных помех в системах ААС сложные сигналы из ансамбля должны обладать следующими свойствами [151–156]:

- иметь АКФ в виде « $\delta$ -функции»;
- иметь ВКФ равными нулю, т.е. быть «ортогональными в точке и на временном интервале при произвольном сдвиге».

Сложные сигналы на основе комплементарных кодовых последовательностей (ККП) при прохождении их через соответствующие СФ, называемые блоками СФ, имеют АКФ в виде « $\delta$ -функции» [133, 138, 151, 152].

В главах 16 и 17 рассмотрена процедура синтеза ансамблей ККП на основе D- и E-кодов с использованием предложенных символических форм записи, названных модифицированными матрицами Адамара, и определены их основные свойства.

Как показано в [129], под ансамблями сигналов систем ААС понимают множество сигналов объединенных единым правилом построения, определяющим их индивидуальные и совместные характеристики. Индивидуальные характеристики сигнала являются функциями его структуры во времени и частоте, распределения энергии на частотно-временной плоскости, спектральных и автокорреляционных характеристик. Совместные характеристики зависят от индивидуальных и являются функциями структуры ансамбля сигналов в целом, совместного использования частотно-временной плоскости, взаимокорреляционных свойств.

Среди применяемых в настоящее время на практике ансамблей сигналов наибольшее распространение получили сигналы формируемые методом прямой последовательности (Direct Sequence Spread Spectrum (DSSS)) и методом скачков по частоте (Frequency Hopping Spread Spectrum (FHSS)) [146].

Отметим, что все используемые в настоящее время в системах ААС сложные сигналы относятся к сложным сигналам первого порядка ( $k=1$ ).

По определению [129], сложным сигналом  $k$ -го порядка называется такой сложный сигнал у которого в каждый момент времени на плоскости время – частота находится  $k$  значений частот.

Ансамбли сигналов FHSS относятся к ансамблям ДЧ сигналов первого порядка у которых в каждый дискретный момент времени на частотно-временной плоскости находится один элемент, несущая частота которого отличается от несущих частот других элементов.

Применение ДЧ сигналов первого порядка в системах ААС приводит к появлению внутрисистемных помех, являющихся основными, уровень которых зависит от величин и числа боковых лепестков ВКФ одновременно работающих станций. Превышения количества одновременно работающих станций некоторой критической величины приводит к резкому снижению помехоустойчивости всей системы ААС, что является недостатком [148].

К ДЧ сигналам второго порядка, относящимся к сложным сигналам второго порядка ( $k = 2$ ) и которые могут рассматриваться как сумма независимых друг от друга ДЧ сигналов первого порядка, относятся сигналы у которых на частотно-временной плоскости в каждый дискретный момент времени находятся два элемента, несущие частоты которых отличаются от несущих частот других элементов.

18.2.2. Рассмотрим синтез ансамблей ККП, используемых для модуляции каждого информационного бита сообщения ДЧ сигналами второго порядка, обеспечивающих требуемое качество радиосвязи в одном диапазоне частот для заданного числа активных абонентов в системах ААС. Такие сигналы позволяют реализовать условие «да и нет в одном сигнале». «Да» – иметь АКФ в виде « $\delta$ -функции» на выходе соответствующего блока СФ из их ансамбля. «Нет» – иметь ВКФ равное нулю на выходе блока СФ, предназначенного для другого сигнала из ансамбля, т.е. быть «ортогональными в точке и на временном интервале при произвольном сдвиге». Это обеспечивается самоподавлением сигнала при его попадании в любой не предназначенный для этого сигнала блок СФ из этого же ансамбля [151].

Синтез ансамбля ККП выполняется в следующем порядке.

*Шаг 1.* Итеративно формируется макет первообразной  $FK$ -матрицы размером  $K \times K$ , где  $K = 2^p$  – количество независимых элементов;  $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

*Первая итерация.* Формируется первая строка макета первообразной  $FK$ -матрицы путем записи в строку  $K$  независимых элементов  $F_j$ ,  $1 \leq j \leq K$ , каждый из которых описывает соответствующий частотный элемент.

Образуется  $F1$ -матрица размером  $1 \times K$

$$F1 = [F_1 \dots F_{0,25K-1} F_{0,25K} \dots F_{0,5K-1} F_{0,5K} \dots F_{0,75K-1} F_{0,75K} \dots F_K]$$

*Вторая итерация.* Формируются две строки макета первообразной  $FK$ -матрицы в виде  $F2$ -матрицы размером  $2 \times K$ . Первая строка  $F2$ -матрицы образуется путем перезаписи на эти места элементов  $F1$ -матрицы.

Вторая строка  $F2$ -матрицы формируется из  $F1$ -матрицы путем предварительного деления ее по вертикали на равные части, количество которых равно количеству строк в  $F2$ -матрице, и производится нумерация полученных час-

тей слева направо. На нечетную позицию второй строки  $F2$ -матрицы записываются элементы, расположенные в четной части  $F1$ -матрицы с номером на единицу больше, а на четную позицию второй строки  $F2$ -матрицы записываются элементы, расположенные в нечетной части  $F1$ -матрицы с номером на единицу меньше. Образуется  $F2$ -матрица размером  $2 \times K$

$$F2 = \begin{bmatrix} F_1 & \dots & F_{0,25K-1} & F_{0,25K} & \dots & F_{0,5K-1} & F_{0,5K} & \dots & F_{0,75K-1} & F_{0,75K} & \dots & F_K \\ F_{0,5K} & \dots & F_{0,75K-1} & F_{0,75K} & \dots & F_K & F_1 & \dots & F_{0,25K-1} & F_{0,25K} & \dots & F_{0,5K-1} \end{bmatrix}$$

*Третья итерация,* как и последующие итеративное увеличение числа строк  $FK$ -матрицы в два раза на каждой итерации, осуществляется путем перезаписи в верхнюю половину вновь образуемой матрицы без изменения местоположения элементов предыдущей матрицы.

Нижняя половина формируется из предыдущей матрицы, которая предварительно делится по вертикали на число частей, равное числу строк вновь формируемой матрицы, и производится нумерация полученных частей слева направо. На нечетные позиции нижней половины формируемой матрицы записываются элементы четных частей предыдущей матрицы с номерами на единицу больше, а на четные позиции нижней половины формируемой матрицы записываются элементы нечетных частей предыдущей матрицы с номерами на единицу меньше.

Процесс итеративного увеличения числа строк продолжается до тех пор, пока не будет сформирована  $F0,5K$ -матрица, т.е. матрица размером  $0,5K \times K$ .

*Последняя итерация* по формированию макета первообразной  $FK$ -матрицы заключается в том, что формируется ее нижняя половина размером  $0,5K \times K$  путем перезаписи без изменений на это место ее верхней половины, описываемой  $F0,5K$ -матрицей

$$FK = \begin{bmatrix} F_1 & \dots & F_{0,25K-1} & F_{0,25K} & \dots & F_{0,5K-1} & F_{0,5K} & \dots & F_{0,75K-1} & F_{0,75K} & \dots & F_K \\ F_{0,5K} & \dots & F_{0,75K-1} & F_{0,75K} & \dots & F_K & F_1 & \dots & F_{0,25K-1} & F_{0,25K} & \dots & F_{0,5K-1} \\ F_{0,25K} & \dots & F_{0,5K-1} & F_1 & \dots & F_{0,25K-1} & F_{0,25K} & \dots & F_K & F_{0,5K} & \dots & F_{0,75K-1} \\ F_{0,75K} & \dots & F_K & F_{0,5K} & \dots & F_{0,75K-1} & F_{0,25K} & \dots & F_{0,5K-1} & F_1 & \dots & F_{0,25K-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F & \dots & F_{0,25K-1} & F_{0,25K} & \dots & F_{0,5K-1} & F_{0,5K} & \dots & F_{0,75K-1} & F_{0,75K} & \dots & F_K \\ F_{0,5K} & \dots & F_{0,75K-1} & F_{0,75K} & \dots & F_K & F_1 & \dots & F_{0,25K-1} & F_{0,25K} & \dots & F_{0,5K-1} \\ F_{0,25K} & \dots & F_{0,5K-1} & F_1 & \dots & F_{0,25K-1} & F_{0,25K} & \dots & F_K & F_{0,5K} & \dots & F_{0,75K-1} \\ F_{0,25K} & \dots & F_K & F_{0,5K} & \dots & F_{0,75K-1} & F_{0,25K} & \dots & F_{0,5K-1} & F_1 & \dots & F_{0,25K-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

В макете первообразной  $FK$ -матрицы в каждой из ее строк содержится  $K$  независимых элементов, в каждом столбце – по  $0,5K$  независимых элементов, а в каждой паре столбцов, начиная с левого ее края – по  $K$  независимых элементов.

Шаг 2. Формируются символические  $M$ -матрицы требуемого порядка по правилам, изложенным в главе 16.

В результате получается набор  $M_{2N}^{*****}$ -матриц, описываемых выражениями (16.6) – (16.13).

Шаг 3. В соответствии с выбранной по тем или иным критериям символической  $M_{2N}^{*****}$ -матрицей формируется  $DK$ -матрица порядка  $K = 2N$  при условии, что

$$M_2 = D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что  $D_2$ -матрица одновременно является первообразной для  $D$ -кода, как показано в главе 16.

Шаг 4. Формируется первообразная  $LFK_K^{*****}$ -матрица размером  $K \times K$ . Для этого используется произведение Адамара двух матриц  $A = [A(ij)]$  и  $B = [B(ij)]$  одинаковых размеров, которое определяется как их поэлементное произведение в виде [116]

$$A \cdot B = [A(ij)B(ij)].$$

Здесь  $ij$  – места пересечений строк  $1 \leq i \leq k$  и столбцов  $1 \leq j \leq k$ , где находится соответствующий элемент.

Тогда каждому элементу  $LFK_K^{*****}$ -матрицы присваиваются знаки  $(\pm)$  согласно правилу

$$\pm LFK(ij) = FK(ij) := [\pm DK(ij)],$$

где знак « $\pm$ » означает операцию присвоения знаков  $(\pm)$  элементов  $DK$ -матрицы элементам макета первообразной  $FK$ -матрицы, находящихся на одинаковых позициях в этих матрицах.

Образованная первообразная  $LFK_K^{*****}$ -матрица имеет  $2K$  независимых элементов, каждому из которых соответствует определенная позиция на частотной оси, зависящая от знаков  $(\pm)$ .

Шаг 5. Формируется квадратная  $LFK_R^{*****}$ -матрица размером  $R \times R$ , где  $R = K2^q$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$ , на основе первообразной  $LFK_K^{*****}$ -матрицы путем применения символической  $M_{2N}^{*****}$ -матрицы, использованной для присвоения знаков  $(\pm)$ . Требуемый размер  $R = 2S$  определяется количеством элементов  $S$  системы ААС.

Шаг 6. Вычисляются суммарные АКФ  $K_A(n)$  и суммарные ВКФ  $K_B(n)$  полученных ККП, описываемых  $LFK_R^{*****}$ -матрицей. Суммарные АКФ и суммарные ВКФ представляют собой суммы АКФ и ВКФ каждой из ККП, входящих в пару, и вычисляются с учетом следующих правил перемножения элементов друг на друга:

$$+1 = (F_j) \times (F_j) = (-F_j) \times (-F_j);$$

$$-1 = (F_j) \times (-F_j) = (-F_j) \times (F_j);$$

(18.1)

0 – результат перемножения элементов с различными индексами.

После вычисления суммарных АКФ и суммарных ВКФ производится проверка полученных результатов на соответствие заданным условиям.

Пример 1. Задаваясь числом независимых элементов  $K = 8$  и используя символическую  $M_N^{2ac4bd}$ -матрицу, получим первообразную  $LF8_8^{2ac4bd}$ -матрицу

$$LF8_8^{2ac4bd} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & -F_3 & F_4 & -F_5 & -F_6 & -F_7 & F_8 \\ F_5 & F_6 & -F_7 & F_8 & -F_1 & -F_2 & -F_3 & F_4 \\ F_3 & F_4 & F_1 & -F_2 & -F_7 & -F_8 & F_5 & -F_6 \\ F_7 & F_8 & F_5 & -F_6 & -F_3 & -F_4 & F_1 & -F_2 \\ F_1 & F_2 & -F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & -F_8 \\ F_5 & F_6 & -F_7 & F_8 & F_1 & F_2 & F_3 & -F_4 \\ F_3 & F_4 & F_1 & -F_2 & F_7 & F_8 & -F_5 & F_6 \\ F_7 & F_8 & F_5 & -F_6 & F_3 & F_4 & -F_1 & F_2 \end{bmatrix}.$$

Полагая  $M_8^{2ac4bd} = LF8_8^{2ac4bd}$ , для случая когда  $q = 2$ , получим  $LF8_{32}^{2ac4bd}$ -матрицу размером  $32 \times 32$ , описывающую дополнительные друг для друга кодовые последовательности, которые располагаются соответственно в верхней и нижней ее половинах. Полученная суммарная АКФ  $K_A(n)$  и все полученные суммарные ВКФ  $K_B(n)$  для первой и семнадцатой строк  $LF8_{32}^{2ac4bd}$ -матрицы, представлены в табл. 18.1.

Обозначение вида  $(x * y) + (z * w)$  описывают сумму свертки строки под номером  $x$  со строкой под номером  $y$  и свертки строки под номером  $z$  со строкой под номером  $w$ . Вычисления проводятся с учетом выполнения условий (18.1), описанных в шаге 6. Аналогичные значения суммарных  $K_A(n)$  и  $K_B(n)$  получаются и для других пар ККП, описываемых другими парами строк  $LF8_{32}^{2ac4bd}$ -матрицы, но расположены они в других местах соответствующих таблиц, описывающих их взаимодействие.



Таблица 18.1

Значения суммарной АКФ и суммарных ВКФ  $LF8_{32}^{2ac4bd}$ -матрицы

Номера вспомогательных строк	Значение суммарной АКФ $K_A(n)$ и суммарных ВКФ $K_B(n)$ в различных точках $n$																						
	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$K_A(n)=(1 \cdot 1)+(17 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(2 \cdot 1)+(16 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_A(n)=(3 \cdot 1)+(19 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(4 \cdot 1)+(20 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_A(n)=(5 \cdot 1)+(21 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(6 \cdot 1)+(22 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_A(n)=(7 \cdot 1)+(23 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(8 \cdot 1)+(24 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_A(n)=(9 \cdot 1)+(25 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(10 \cdot 1)+(26 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_A(n)=(11 \cdot 1)+(27 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(12 \cdot 1)+(28 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_A(n)=(13 \cdot 1)+(29 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(14 \cdot 1)+(30 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_A(n)=(15 \cdot 1)+(31 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(16 \cdot 1)+(32 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_A(n)=(17 \cdot 1)+(1 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(18 \cdot 1)+(2 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_A(n)=(19 \cdot 1)+(3 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(20 \cdot 1)+(4 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_A(n)=(21 \cdot 1)+(5 \cdot 17)$	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(22 \cdot 1)+(6 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_A(n)=(23 \cdot 1)+(7 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(24 \cdot 1)+(8 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_A(n)=(25 \cdot 1)+(9 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(26 \cdot 1)+(10 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_A(n)=(27 \cdot 1)+(11 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(28 \cdot 1)+(12 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_A(n)=(29 \cdot 1)+(13 \cdot 17)$	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(30 \cdot 1)+(14 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_A(n)=(31 \cdot 1)+(15 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_B(n)=(32 \cdot 1)+(16 \cdot 17)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Шаг 7. Переобозначаются элементы  $LFK_{R/S}^{*****}$ -матрицы, расположенные в ее нижней половине, путем добавления к каждому числу величины равной  $K$ , описывающему индексу соответствующего независимого частотного элемента. В результате образуется  $LFK_{R/S}^{*****}$ -матрица, описывающая пары ККП, модулирующих ДЧ сигналы второго порядка. Образованная  $LFK_{R/S}^{*****}$ -матрица имеет  $4K$  независимых элементов, каждому из которых соответствует определенная позиция на частотной оси, зависящая от знаков ( $\pm$ ).

Пример 2. Если положить величину  $q=0$ , то из первообразной  $LF8_{8/4}^{2ac4bd}$ -матрицы образуется  $LF8_{8/4}^{2ac4bd}$ -матрица, которая описывает требуемые синтезированные дополнительные кодовые последовательности

$$LF8_{8/4}^{2ac4bd} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & -F_3 & F_4 & -F_5 & -F_6 & -F_7 & F_8 \\ F_5 & F_6 & -F_7 & F_8 & -F_1 & -F_2 & -F_3 & F_4 \\ F_3 & F_4 & F_1 & -F_2 & -F_7 & -F_8 & F_5 & -F_6 \\ F_7 & F_8 & F_5 & -F_6 & -F_3 & -F_4 & F_1 & -F_2 \\ F_9 & F_{10} & -F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & -F_{16} \\ F_{13} & F_{14} & -F_{15} & F_{16} & F_9 & F_{10} & F_{11} & -F_{12} \\ F_{11} & F_{12} & F_9 & -F_{10} & F_{15} & F_{16} & -F_{13} & F_{14} \\ F_{15} & F_{16} & F_{13} & -F_{14} & F_{11} & F_{12} & -F_9 & F_{10} \end{bmatrix}$$

Если, аналогично описанному выше, из  $LF8_{32}^{2ac4bd}$ -матрицы получить  $LF8_{32/16}^{2ac4bd}$ -матрицу, то ей будут соответствовать суммарная АКФ  $K_A(n)$  и суммарные ВКФ  $K_B(n)$  расположенные в табл. 18.1 в верхней ее половине (выше жирной черты). Они описывают отклики системы ААС на воздействия соответствующих сигналов.

На этом процедура синтеза ансамбля ККП для систем ААС заканчивается.

### 18.3. Свойства и характеристики комплементарных кодовых последовательностей

Синтезированные  $LFK_{R/S}^{*****}$ -матрицы имеют размер  $R \times R$ , определенный числом абонентов  $S = 0,5R$  системы ААС. При этом у каждой станции системы ААС каждый бит информационного сообщения модулируется ККП таким образом, что образуется ДЧ сигнал второго порядка, который представим в виде суммы ДЧ сигналов первого порядка, каждый из которых расположен в своей полосе частот.

Положим, что синтезированные ККП, расположенные в верхней половине  $LFK_{R/S}^{*****}$ -матрицы, модулируют по частоте и по времени ДЧ сигналы первого порядка, частотные элементы которых расположены в одной полосе частот, а ККП, расположенные в нижней половине  $LFK_{R/S}^{*****}$ -матрицы, модулируют по частоте и по времени ДЧ сигналы первого порядка, частотные элементы которых расположены в другой полосе частот.

Следовательно, вся полоса частот, используемая системой ААС, составит  $4K$  частотных элементов, а база  $B$  каждого сложного сигнала второго порядка, являющегося адресом соответствующего абонента, равна  $B = 4KR$ .

В этом случае обеспечивается суммарная АКФ  $K_A(n)$  в виде «б-функции» и «ортогональность в точке и на временном интервале при произвольном сдвиге» для суммарных ВКФ  $K_B(n)$  при использовании ДЧ сигнала второго порядка. В примере 1 результаты, приведенные в верхней половине табл. 18.1, представляют работу системы АСС, использующей ансамбли ККП, описываемые  $LF8_{32/16}^{2oc4bd}$ -матрицей. Отметим, что боковые лепестки суммарных ВКФ  $K_B(n)$  не равны нулю, расположены в нижней половине табл. 18.1, причем эти виды взаимодействия ККП не соответствуют рассматриваемым в данном примере ДЧ сигналам второго порядка.

На рис. 18.1,а – рис. 18.4,а представлены графические изображения суммарных АКФ  $K_A(n)$  и суммарных ВКФ  $K_B(n)$ , а на рис. 18.1,б – рис. 18.4,б их модульные значения для различных значений  $K$  при использовании одинаковой символической  $M_{64}^{2oc4bd}$ -матрицы. Видно, что чем больше величина  $K$ , тем меньше количество БЛ у суммарных ВКФ  $K_B(n)$ , причем у АКФ  $K_A(n)$  они всегда отсутствуют.

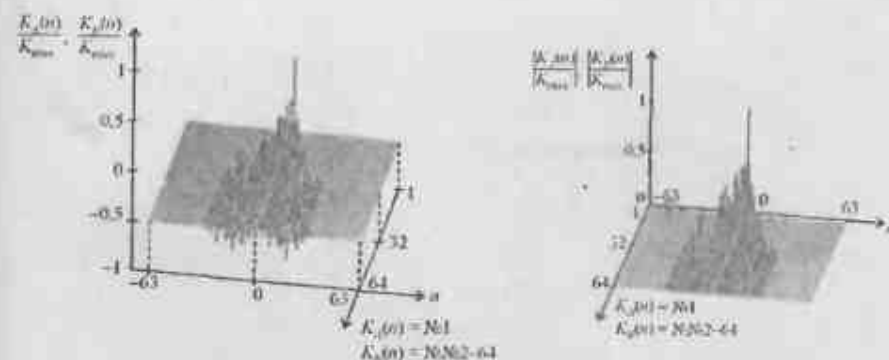
Основное количество БЛ для каждого случая сосредоточено в «нерабочей» области. Кроме того, видно, что если есть БЛ у соответствующих суммарных ВКФ, то их модули равны между собой, если эти БЛ расположены на одинаковом расстоянии относительно точки  $n=0$ . Использование этого свойства позволяет реализовать соответствующее адаптивное пороговое устройство, применение которого приводит к повышению помехоустойчивости работы абонентов системы ААС, в которой используются рассмотренные ККП.

На рис. 18.5,а – рис. 18.8,а представлены информативные суммарные АКФ  $K_A(n)$  и ВКФ  $K_B(n)$ , которые могут использоваться в системах ААС, а на рис. 18.5,б – рис. 18.8,б – соответственно их модульные значения.

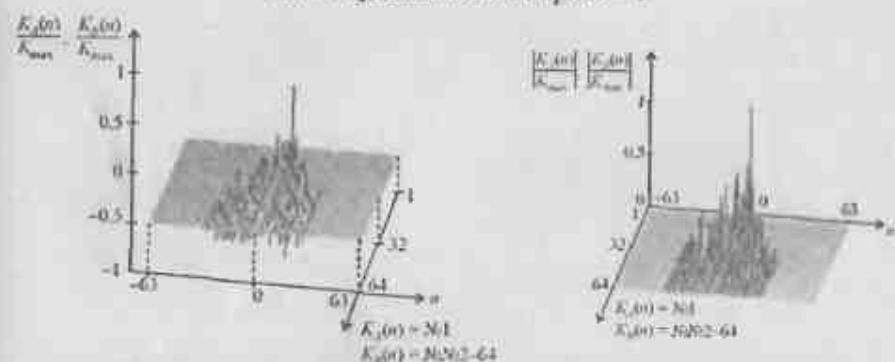
На рис. 18.9 приведена гистограмма распределения амплитуд БЛ суммарных ВКФ  $K_B(n)$  для различных значений  $K$ , причем, чем больше  $K$ , тем меньше количество БЛ. Видно, что абсолютные величины БЛ меньше или равны половине максимального значения пика суммарной АКФ  $K_A(0) = 128$ .

В качестве критериев оценки эффективности синтезированных ансамблей ККП можно использовать параметр  $\eta$ , который определяет в процентах отношение суммы позиций всех не равных нулю боковых лепестков  $\sum БЛ$  ВКФ  $K_B(n)$  ко всему количеству позиций, на которых могут находиться БЛ для  $LFK_R^{*****}$ -матриц, имеющий вид

$$\eta = \frac{\sum БЛ}{(2R-1)(R-1)} 100\%. \quad (18.2)$$



а) с учетом знаков БЛ б) их модульные значения  
Рис. 18.1. Видны АКФ  $(1*1)+(33*33)$  и ВКФ  $(1*y)+(33*w)$  синтезированных ККП при  $K=1$



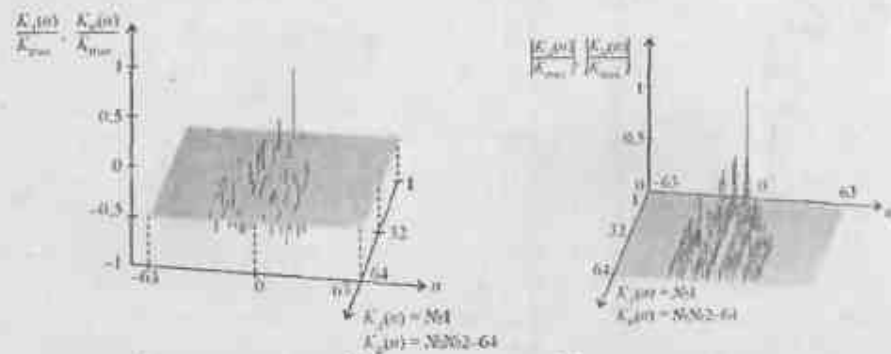
а) с учетом знаков БЛ б) их модульные значения  
Рис. 18.2. Видны АКФ  $(1*1)+(33*33)$  и ВКФ  $(1*y)+(33*w)$  синтезированных ККП при  $K=2$

Параметр  $\eta_S$  для  $LFK_{R/S}^{*****}$ -матриц, имеет вид

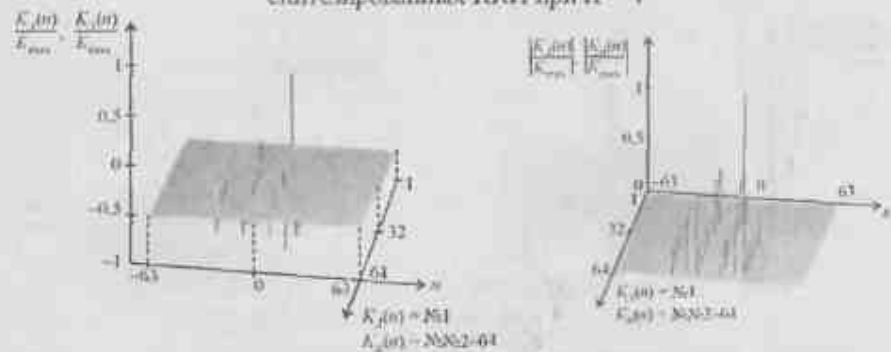
$$\eta_S = \frac{\sum БЛ_S}{(2R-1)(S-1)} 100\%, \quad (18.3)$$

где  $\sum БЛ_S$  – количество БЛ у всех ВКФ  $K_B(n)$  системы ААС не равные нулю, отнесенные ко всему количеству позиций, где могут находиться БЛ системы ААС в процентах.

Параметр  $\eta_S$  оценивает качество взаимодействия одной из станций системы АСС с остальными, а параметр  $\eta$  позволяет получать характеристики всего синтезированного ансамбля кодовых последовательностей.



а) с учетом знаков БЛ б) их модульные значения  
Рис. 18.3. Виды АКФ  $(1^*1)+(33^*33)$  и ВКФ  $(1^*y)+(33^*w)$  синтезированных ККП при  $K=4$



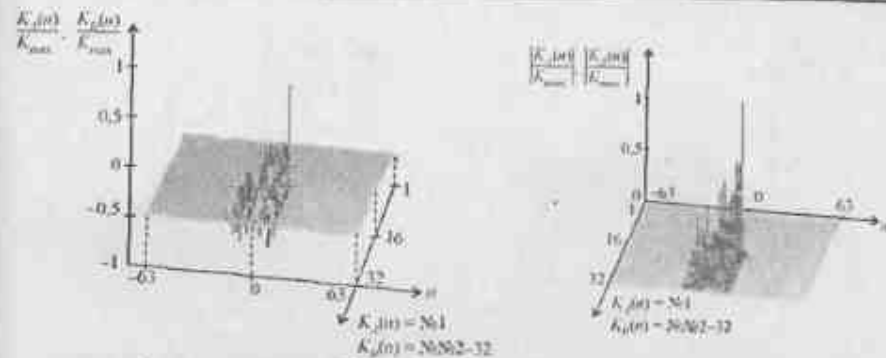
а) с учетом знаков БЛ б) их модульные значения  
Рис. 18.4. Виды АКФ  $(1^*1)+(33^*33)$  и ВКФ  $(1^*y)+(33^*w)$  синтезированных ККП при  $K=8$

Расчеты расчета параметров  $\eta_{\Sigma}$  и  $\eta$  по выражениям (18.1) и (18.2) с использованием символической  $M_N^{2ac-4bc^2}$ -матрицы сведены в табл. 18.2.

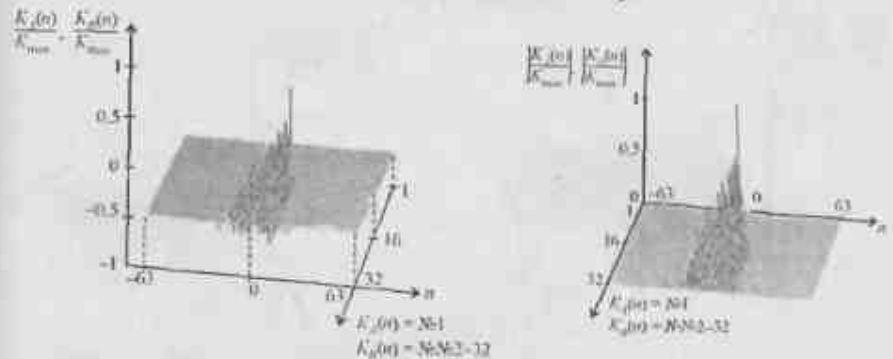
Таблица 18.2

Зависимости параметров  $\eta$  и  $\eta_{\Sigma}$  от величин  $K$  и  $R$  (в процентах)

K	R								
		4	8	16	32	64	128	256	512
1 (D-код)	$\eta$	19,05	22,86	22,23	22,94	22,65	22,46	22,34	22,24
	$\eta_{\Sigma}$	0	8,89	11,06	11,43	11,38	11,28	11,2	11,16
2 (E-код)	$\eta$	9,52	9,52	9,89	9,93	9,87	9,81	9,77	9,75
	$\eta_{\Sigma}$	0	4,44	4,61	4,67	4,93	4,92	4,92	4,92
4	$\eta$	0	0	0,86	1,23	1,35	1,38	1,39	1,4
	$\eta_{\Sigma}$	0	0	0	0,42	0,61	0,67	0,69	0,7
8	$\eta$	-	0	0	0,198	0,308	0,33	0,34	0,35
	$\eta_{\Sigma}$	-	0	0	0	0,102	0,15	0,17	0,175



а) с учетом знаков БЛ б) их модульные значения  
Рис. 18.5. Виды АКФ  $(1^*1)+(33^*33)$  и ВКФ  $(1^*y)+(33^*w)$  синтезированных ККП при  $K=1$ , используемые в ААС



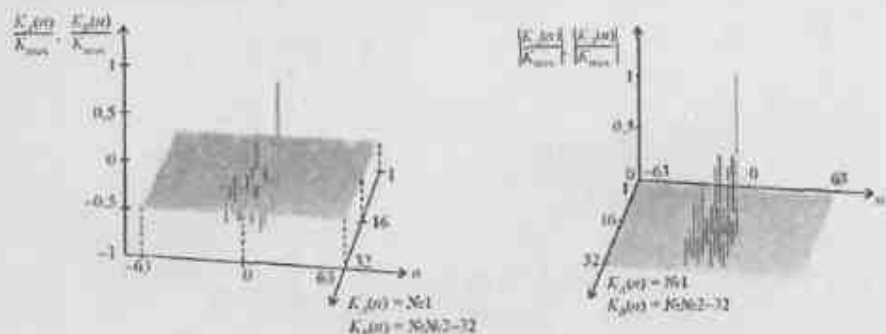
а) с учетом знаков БЛ б) их модульные значения  
Рис. 18.6. Виды АКФ  $(1^*1)+(33^*33)$  и ВКФ  $(1^*y)+(33^*w)$  синтезированных ККП при  $K=2$ , используемые в ААС

Анализ результатов показывает, что чем больше база  $B$  адреса системы ААС, использующей ДЧ сигналы второго порядка, тем относительно меньшее число позиций у ВКФ занимают не равные нулю БЛ.

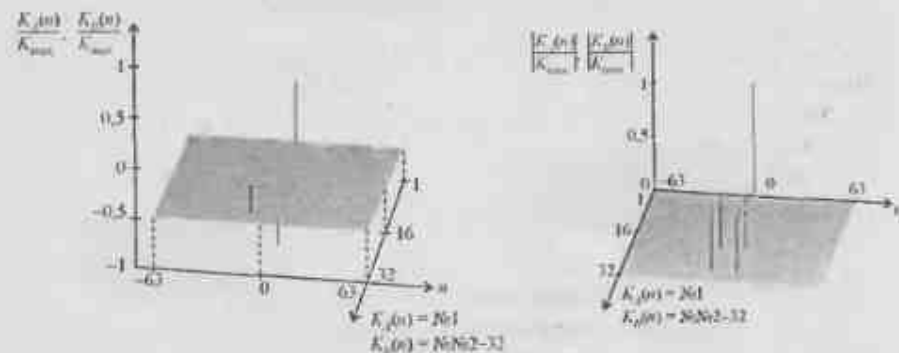
Нулевые значения параметра  $\eta_{\Sigma}$  сохраняются при различных  $K$  до величин  $R=4K$ , за исключением случая, когда  $K=2$ , где  $R=2K$ . Для параметра  $\eta$  нулевые значения сохраняются до величины  $R=2K$  для  $K \geq 4$ .

Параметры  $\eta_{\Sigma}$  и  $\eta$  при различных  $R$ , начиная со значений  $R \geq 4K$ , имеют примерно одинаковые значения, величины которых зависят от  $K$ .

Можно полагать, что условной «границей» при превышении которой параметр  $\eta \neq 0$ , является количество элементов  $R$  в ККП, численно равное используемому количеству независимых частотных элементов  $4K$ .



а) с учетом знаков БЛ б) их модульные значения  
Рис. 18.7. Виды АКФ  $(1*1)+(33*33)$  и ВКФ  $(1*_{y})+(33*_{w})$  синтезированных ККП при  $K=4$ , используемые в ААС



а) с учетом знаков БЛ б) их модульные значения  
Рис. 18.8. Виды АКФ  $(1*1)+(33*33)$  и ВКФ  $(1*_{y})+(33*_{w})$  синтезированных ККП при  $K=8$ , используемые в ААС

Расчет необходимой полосы частот  $\Delta F$  (Гц), занимаемой системой ААС, и определение разрешенного для использования диапазона частот в зависимости от заданного числа абонентов  $S$ , величины  $K$ , определяющей характеристики используемой ККП и скорости передачи информации  $V = F_S \log_2 d$  (бит/с), где  $F_S$  (Гц) – частота выборки;  $\log_2 d$  (бит) – количество бит;  $d$  – количество уровней квантования, производится согласно выражению

$$\Delta F = 8F_S SK \text{ (Гц)}$$

Если  $V = 64$  (кбит/с),  $S = 512$ ,  $K = 8$ ,  $d = 2$  то величина  $\Delta F = 2097,152$  (МГц), а следовательно, необходимо использовать для работы системы ААС разрешенный диапазон частот 37 – 39,5 (Гц).

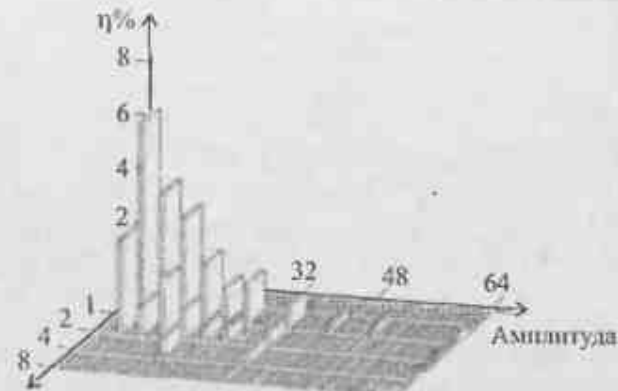


Рис. 18.9. Гистограмма распределения амплитуд БЛ суммарных ВКФ  $K_g(n)$  при суммарной АКФ  $K_d(0) = 128$

При заданных величинах полосы частот  $\Delta F$  (Гц), а, следовательно, и разрешенного к применению диапазона частот, величины  $K$ , скорости передачи информации  $V$  (бит/с) возможное количество абонентов определяется согласно выражению

$$S = 2h,$$

где  $h = \lfloor \log_2 S' \rfloor$  – ближайшее меньшее целое;  $S' = \Delta F / 8F_S K \geq S$ .

Если  $V = 64$  (кбит/с),  $\Delta F = 83,5$  (МГц),  $K = 4$ ,  $d = 2$ , что соответствует разрешенному частотному диапазону 2,4 – 2,4835 (Гц), то  $S' = 40$ , а следовательно, количество абонентов для рассматриваемого случая  $S = 32$ .

Уровень внутрисистемных помех, определяемых величинами и количеством БЛ ВКФ, и определяющих помехоустойчивость всей системы ААС, зависит от заданных и рассчитываемых параметров. Эти параметры получаются как с учетом данных, приведенных в табл. 18.2, так и путем непосредственного вычисления величин и количества БЛ суммарных ВКФ.

#### 18.4. Система асинхронной адресной связи

Рассмотрим применение полученных ККП в системе ААС, которая описана в [156].

Общая структурная схема любой системы ААС, независимо от видов используемых сигналов и работающих в одной полосе частот  $f_1$ , имеет вид, изображенный на рис. 18.10 [148].

Все асинхронные станции (АС) в рассматриваемой системе ААС идентичны. При этом каждое передаваемое сообщение содержит свой адрес, который известен на приемном конце. Каждая АС состоит из передающего и приемного узлов.

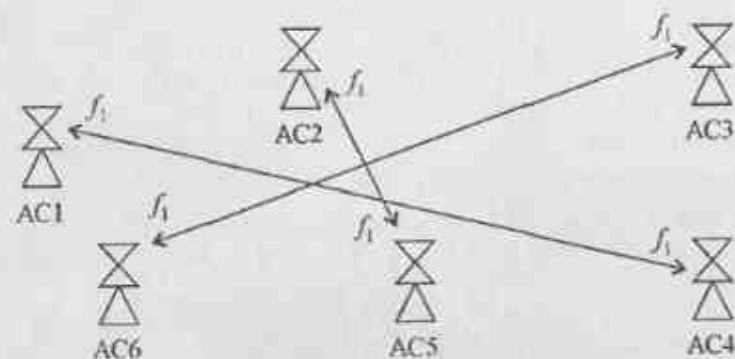


Рис. 18.10. Одночастотная система асинхронной адресной связи

Рассмотренные выше сложные сигналы второго порядка на основе ККП требуют, в случае непосредственного их использования в системах ААС, в два раза большей ширины полосы частот по сравнению с ААС, которые используют сложные сигналы первого порядка.

Очевидно, что в случае, если каждая из пар ККП будет использовать дважды отводимую полосу частот, то проигрыша в занимаемой полосе частот не будет.

Для обеспечения указанного условия необходимо соответственно «раскрасить» каждый сложный сигнал второго порядка, получаемый модуляцией какой-либо ККП из ансамбля.

Поясним сказанное на примере. Положим, что имеется ДЧ сигнал второго порядка модулированный парой ККП, описываемой первой и  $0,5N$ -й строками соответствующей  $\text{LFK}_{R/S}^{*****}$ -матрицы. Пусть каждый дискрет этой пары модулируется «нарастающим» ЛЧМ-сигналом. В дальнейшем, для простоты, будем называть один из сигналов, модулированных одной из ККП, называемой основной, первым основным, а другой, модулированный второй ККП, называемой дополнительной, вторым дополнительным. Также положим, что первый основной сигнал занимает первую полосу частот, а второй дополнительный сигнал — вторую полосу частот.

Пусть имеется другой ДЧ сигнал второго порядка, модулированный той же парой ККП, т.е. первой и  $0,5N$ -й строками  $\text{LFK}_{R/S}^{*****}$ -матрицы, но каждый дискрет этой пары модулируется «падающим» ЛЧМ-сигналом, который имеет такую же базу, как и «нарастающий». Но для второй пары ККП первый основной сигнал занимает вторую полосу частот, а второй дополнительный сигнал — первую полосу.

Очевидно, что базы сигналов с «нарастающей» и «падающей» ЛЧМ должны быть такие, чтобы отклики СФ при воздействии на их входы не предназначенных

для них ЛЧМ-сигналов были бы практически равны нулю. Данное условие достаточно хорошо выполняется при базах ЛЧМ-сигналов более 50.

На рис. 18.11 показана частотно-временная матрица двух ДЧ сигналов второго порядка дискреты которых имеют «падающий» и «нарастающий» законы линейной частотной модуляции. Сигналы соответствуют первой и девятой строкам  $\text{LFK}_{16/8}^{2ac-4bd}$ -матрицы.

С учетом вышесказанного, структурная схема передающей части АС примет вид, изображенный на рис. 18.12, а ее приемная часть примет вид, изображенный на рис. 18.13.

Устройство, изображенное на рис. 18.12 работает следующим образом. Пусть к моменту времени  $t < 0$  блок управления (БУ) устанавливает в дешифраторе адреса (ДшА) код, который соответствует коду вызываемой АС, устанавливает счетчик (Сч) в нулевое состояние, подает соответствующую команду на генератор частотно-модулированного сигнала (ГЧМС) для установки соответствующего закона частотной модуляции, управляет соответствующим образом мультиплексорами MS1–MS4 для приведения их в необходимый режим работы, запускает генератор поднесущих частот (ГПнЧ), подготавливает к запуску генератор тактовых импульсов (ГТИ) и подает управляющий сигнал на дельта-модулятор (ДМ), по которому в момент времени  $t = 0$  начинается работа всего устройства.

Начиная с момента времени  $t = 0$  с выхода генератора сообщений (ГС) поступает аналоговое сообщение на ДМ. Одновременно, с первого выхода БУ поступает сигнал по которому начинается работа ДМ, а с его второго выхода запускается ГТИ. С выхода ГТИ тактирующие импульсы с частотой  $f_c = 1/\tau$ , превышающей частоту преобразования  $F = 1/T$  аналогового сообщения в  $N$  раз, где  $T = N\tau$  — период дискретизации аналогового сообщения,  $\tau$  — период следования дискретов длительностью  $\tau_d = \tau$ , поступают на СЧ с  $N$  состояниями и на делитель частоты (ДЧ). С выхода ДЧ сформированные импульсы синхронизации длительностью  $T = N\tau$ , поступают на ДМ и синхронизируют его работу таким образом, что на его выходе из аналогового сообщения образуется последовательность знакопеременных импульсов единичной амплитуды, т.е. последовательность знакопеременных информационных битов длительностью  $T$  каждый.

Знаки этих импульсов, через блок выделения знака бита (БВЗБ) управляют схемами И1 и И2 таким образом, чтобы выходы ДШ подключались либо через схемы И1 ко входам MS1 и MS3, либо через схемы И2 ко входам MS2 и MS4. Положим, для определенности, что схемы И1 подключают выходы ДшА к MS1 и MS3 когда знак информационного бита положителен, а схемы И2 подключают выходы ДшА к MS2 и MS4 когда знак информационного бита отрицателен.

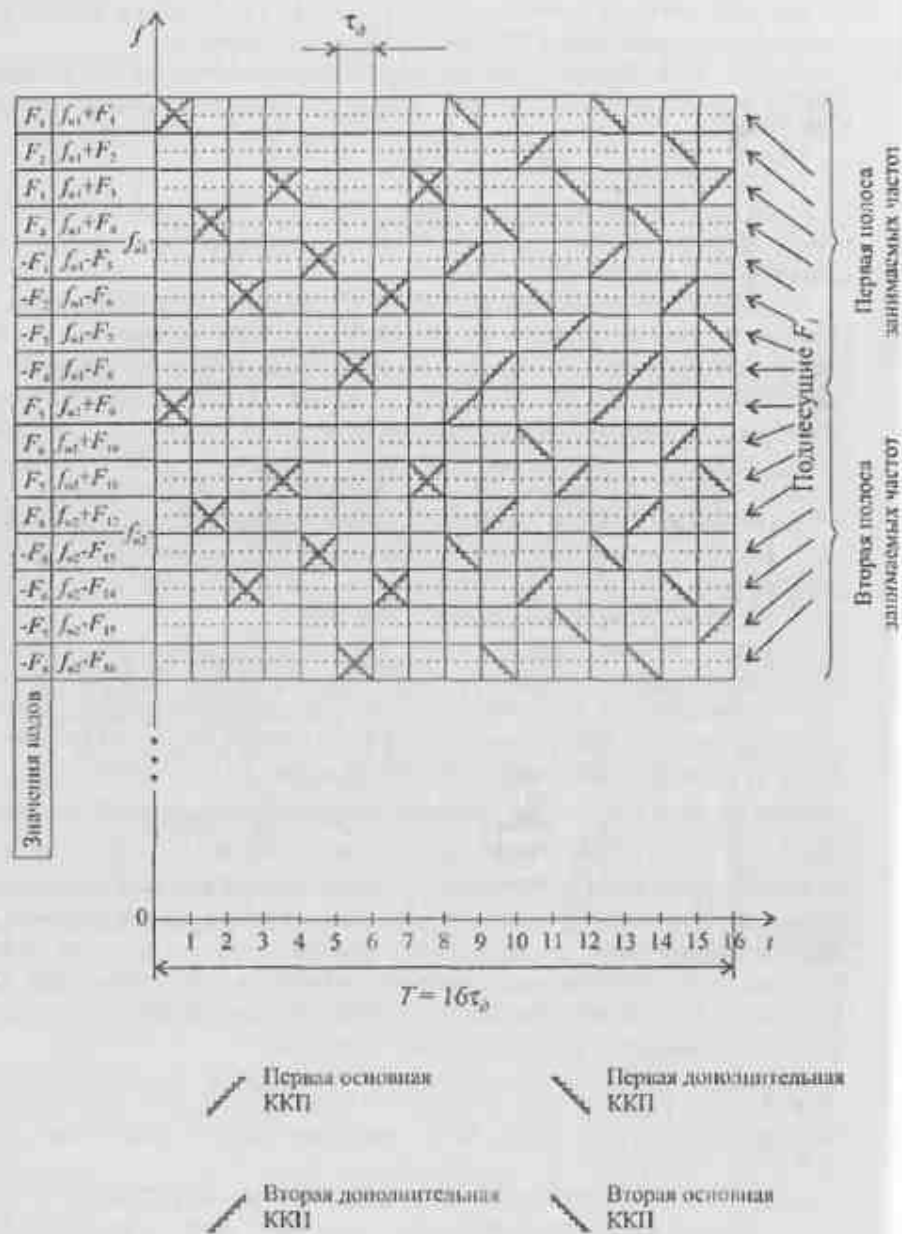


Рис. 18.11. Частотно-временная матрица двух ДЧ сигналов второго порядка

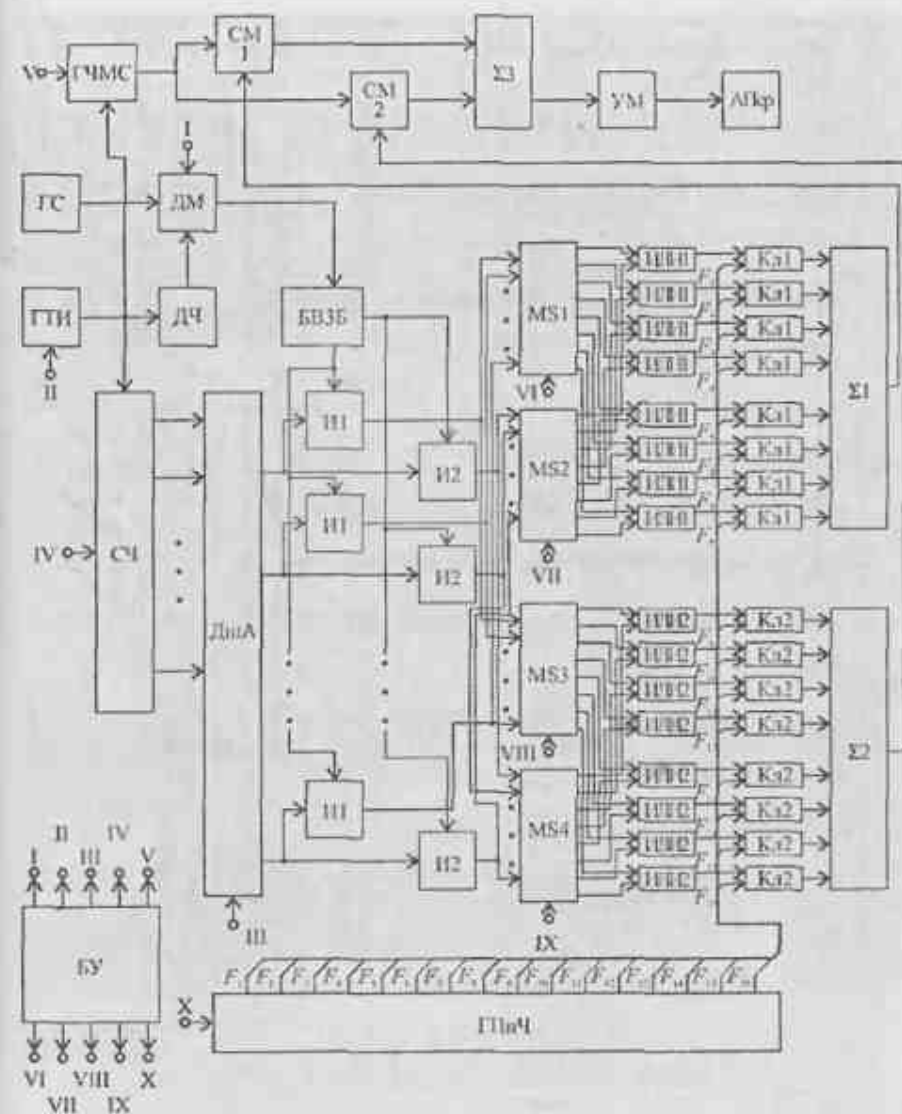


Рис. 18.12. Структурная схема передлюющей части асинхронной станции, использующей комплементарные кодовые последовательности

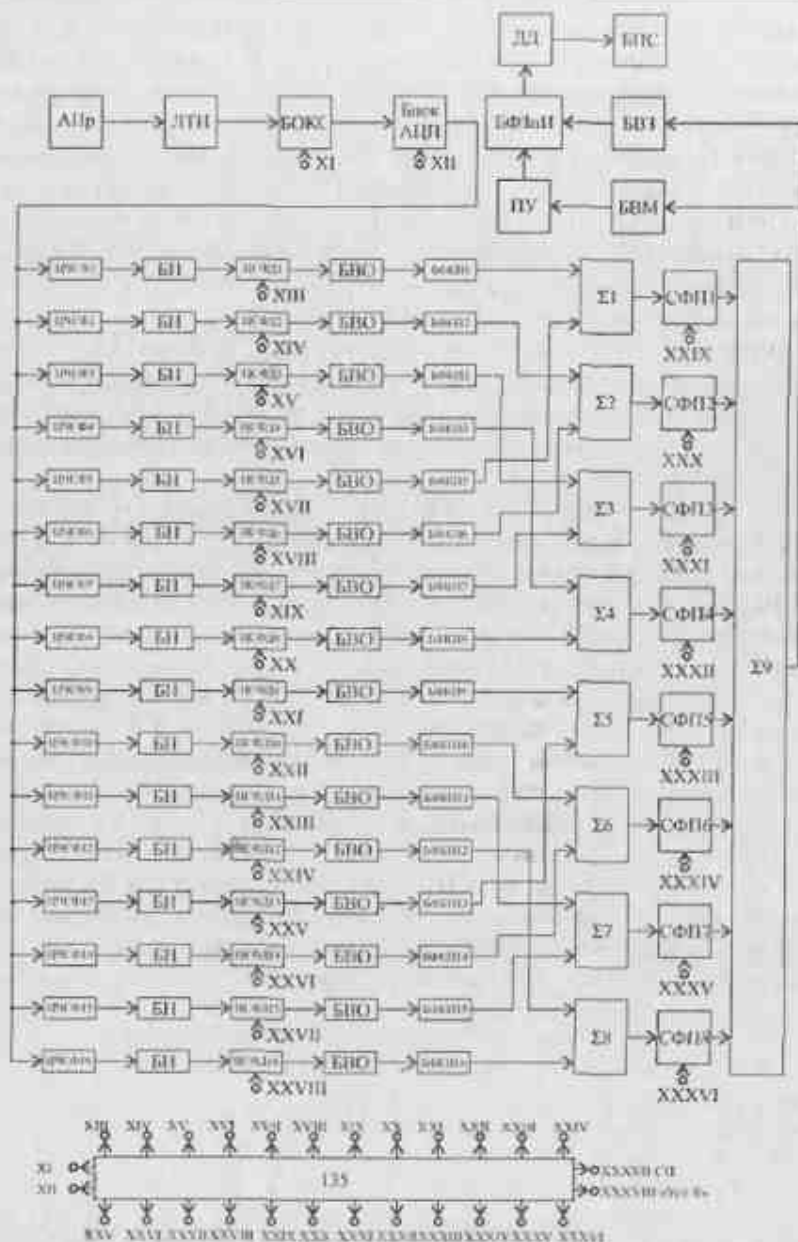


Рис. 18.13. Структурная схема приемной части асинхронной станции, использующей комплементарные кодовые последовательности

Пусть на выходе ДМ появился положительный информационный бит, длительность которого  $T$ , как указывалось ранее, в  $N$  раз больше периода следования  $\tau$  тактирующих импульсов, т.е.  $T = N\tau$ . В каждый дискретный интервал времени  $t = n\tau$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , определяемый периодом тактирующих импульсов ГТИ  $\tau$ , в течение длительности каждого информационного бита длительностью  $T$ , независимо от его знака, вырабатывается  $N$  раз в ГЧМС сигнал с заданным законом внутрдискретной модуляции, длительность каждого из которых равна  $\tau$ . Эти сигналы с частотной модуляцией поступают на первые входы первого и второго смесителя  $См1$  и  $См2$   $N$  раз за каждый временной интервал длительностью  $T$ .

Одновременно, в эти же дискретные интервалы времени  $t = n\tau$  тактирующие импульсы поступают на счетный вход СЧ и переводят его из состояния в состояние  $N$  раз за время длительности  $T$  информационного бита. При этом объем СЧ такой, что в момент появления следующего информационного бита СЧ обнуляется.

Поступающая в каждый дискретный момент времени  $t = n\tau$  с выходов СЧ информация на ДИА дешифруется и через схемы И1 поступает на MS1 и MS3, на одном из выходов которых в каждый дискретный момент времени появится потенциал, который проходит через соответствующую схему ИЛИ1 на входы первых ключей (Кл1) и соответственно через соответствующую схему ИЛИ2 на управляющие входы вторых ключей (Кл2). Положим, что Кл1 управляют моментами подключения ко входам первого сумматора ( $\Sigma1$ ) поднесущих частот с выходов ГПЧ основной последовательности, а Кл2 одновременно управляют моментами подключения ко входам второго сумматора ( $\Sigma2$ ) поднесущих частот с выходов ГПЧ соответствующих значениям дополнительной последовательности. Также положим, для определенности, что эти сигналы расположены по оси частот так, как показано на рис. 18.11, т.е. первая полоса частот соответствует основной кодовой последовательности, и, аналогично, вторая полоса занимаемых частот соответствует дополнительной последовательности.

Состояниям основной ККП соответствуют поднесущие, расположенные по оси частот, следующим образом

$$\begin{aligned}
 f_{n1} + F_1 &\rightarrow F_1; f_{n1} + F_2 \rightarrow F_2; f_{n1} + F_3 \rightarrow F_3; f_{n1} + F_4 \rightarrow F_4; \\
 f_{n1} - F_5 &\rightarrow -F_1; f_{n1} - F_6 \rightarrow -F_2; f_{n1} - F_7 \rightarrow -F_3; f_{n1} - F_8 \rightarrow -F_4; \\
 f_{n2} + F_9 &\rightarrow F_5; f_{n2} + F_{10} \rightarrow F_6; f_{n2} + F_{11} \rightarrow F_7; f_{n2} + F_{12} \rightarrow F_8; \\
 f_{n2} - F_{13} &\rightarrow -F_5; f_{n2} - F_{14} \rightarrow -F_6; f_{n2} - F_{15} \rightarrow -F_7; f_{n2} - F_{16} \rightarrow -F_8;
 \end{aligned}$$

в первой полосе занимаемых частот. Аналогично, состояниям дополнительной ККП соответствуют поднесущие, расположенные по оси частот во второй полосе занимаемых частот следующим образом

$$\begin{aligned}
 f_{u2} + F_9 &\rightarrow F_1; f_{u2} + F_{10} \rightarrow F_2; f_{u2} + F_{11} \rightarrow F_3; f_{u2} + F_{12} \rightarrow F_4; \\
 f_{u2} - F_{13} &\rightarrow -F_1; f_{u2} - F_{14} \rightarrow -F_2; f_{u2} - F_{15} \rightarrow -F_3; f_{u2} - F_{16} \rightarrow -F_4; \\
 f_{u1} + F_1 &\rightarrow F_5; f_{u1} + F_2 \rightarrow F_6; f_{u1} + F_3 \rightarrow F_7; f_{u1} + F_4 \rightarrow F_8; \\
 f_{u1} - F_5 &\rightarrow -F_5; f_{u1} - F_6 \rightarrow -F_6; f_{u1} - F_7 \rightarrow -F_7; f_{u1} - F_8 \rightarrow -F_8.
 \end{aligned}$$

В соответствии с состоянием СЧ в каждый дискретный момент времени  $nt$  в течение длительности  $t$  через Кл1 и КЛ2 ко входам  $\Sigma 1$  и  $\Sigma 2$  подключаются соответствующие выходы ППЧ и этим самым формируют частотно-временную матрицу сигнала, на которую настроена приемная станция в виде, изображенном на рис. 18.11.

Эти отрезки колебаний длительностью  $t$  с выходов  $\Sigma 1$  и  $\Sigma 2$  поступают соответственно на вторые входы СМ1 и СМ2 на первые входы которых, как указывалось, в течение каждого интервала времени длительностью  $t$  поступает частотно-модулированное колебание с ГЧМС.

В результате на выходе СМ1 и СМ2 формируются сигналы, представляющие собой радиопульсы с внутрдискретной частотной модуляцией, частотное заполнение которых определяется величинами поднесущих, а временное положение соответствует состояниям СЧ.

Полученные сигналы суммируются в третьем сумматоре ( $\Sigma 3$ ). Особенностью сигнала на выходе  $\Sigma 3$  является то, что в каждый дискретный интервал времени  $t$  он состоит из двух парциальных сигналов с внутрдискретной частотной модуляцией каждый, причем частотное заполнение у каждого из них зависит от параметра ККП основной и дополнительной последовательности в эти дискретные моменты времени.

С выхода  $\Sigma 3$  сформированный указанным образом сигнал усиливается в усилителе мощности (УМ) до необходимой величины и через антенну передатчика (АПер) излучается в пространство.

Пусть, начиная с момента времени  $t = 0$  осуществляется прием сообщения приемной станцией, структурная схема которой изображена на рис. 18.13 и соответственно настроенной на прием того или иного сообщения. Для этого положим, что соответствующие узлы до момента времени  $t = 0$  по сигналам с блока управления приемом (БУП) с тридцать восьмого выхода установлены в нулевое состояние. Так же, до момента времени  $t = 0$ , с тринадцатого по двадцать восьмой выходов БУП подаются управляющие сигналы на настройку цифровых согласованных фильтров дискретов (ЦСФД1, ..., ЦСФД16) таким образом, чтобы их импульсные характеристики соответствовали или первому или второму законам внутрдискретной модуляции в зависимости от того, на какую передающую станцию настраивается приемная. Одновременно, до момента времени  $t = 0$ , с двадцать девятого по тридцать шестой выходов БУП подаются управляющие сигналы на настройку согласованных фильтров последовательностей (СФП1, ..., СФП16) таким образом, чтобы их импульсные

характеристики описывались значениями основной и дополнительной кодовых последовательностей той станции, на прием информации от которой они настроены.

Пусть в момент времени  $t = 0$  на антенну приемника (АПр) поступает сигнал станции, на параметры сигнала которой настроены ЦСФД1, ..., ЦСФД16 и СФП1, ..., СФП16. Этот сигнал поступает с выхода АПр на вход ЛПП с выхода которого, усиленный до необходимого уровня, он поступает на блок образования квадратурных составляющих (БОКС). На другой вход БОКС поступают управляющие сигналы с одиннадцатого выхода БУП, параметры которых определяются условиями, связанными с необходимостью образования квадратурных составляющих принимаемого сигнала. Эти квадратурные составляющие поступают на входы блока АЦП, на управляющий вход которого с двенадцатого выхода БУП поступают сигналы, параметры которых определяются условиями выполнения теоремы Котельникова.

С выхода блока АЦП отсчеты квадратурных составляющих входной реализации, преобразованные в цифровую форму, поступают на входы цифровых частотно-селективных фильтров (ЦЧСФ1, ..., ЦЧСФ16), где подвергаются частотно-селективной фильтрации. Фильтры ЦЧСФ1, ..., ЦЧСФ16 имеют одинаковые полосы пропускания, равные полосе частот внутрдискретной частотной модуляции дискретов и центральные частоты которых соответствуют частотам преобразованных поднесущих  $F_1, \dots, F_{16}$ .

С выходов ЦЧСФ1, ..., ЦЧСФ16 расфильтрованные квадратурные составляющие, информация в которых заключена в изменениях частоты, подвергаются в блоках нормировки (БН) соответствующей нормировке с целью устранения паразитной амплитудной модуляции.

Расфильтрованные и пронормированные квадратурные составляющие поступают на соответствующие ЦСФД1, ..., ЦСФД16, где происходит согласованная фильтрация тех отдельных дискретов, на закон внутрдискретной модуляции которых настроены эти согласованные фильтры.

Получаемые на выходах ЦСФД1, ..., ЦСФД16 сжатые сигналы поступают на блоки выделения огибающих (БВО), где выделяются амплитуды сжатых сигналов, положения которых на временной оси зависят от моментов появления соответствующих дискретов кода на входе приемной станции.

Отсчеты кодов с выходов БВО поступают на блоки формирования кодовых последовательностей (БФКП1, ..., БФКП16) на выходах которых появляются импульсы единичной амплитуды, положительной, положим, полярности и заданной длительности и положение которых на оси времени определяется максимальной амплитудой сжатого дискрета.



Эти импульсы поступают на положительные входы сумматоров  $\Sigma 1, \dots, \Sigma 8$  с выходов соответственно БФКП1, ..., БФКП4 и БФКП9, ..., БФКП12, а на отрицательные входы  $\Sigma 1, \dots, \Sigma 8$  они поступают с выходов соответственно БФКП5, ..., БФКП8 и БФКП13, ..., БФКП16.

Таким образом, на выходах  $\Sigma 1, \dots, \Sigma 8$ , формируются последовательности, соответствующие значениям 0 и  $\pm 1$ .

Сформированные указанным образом трехуровневые последовательности импульсов  $(-1, 0, 1)$  с выходов  $\Sigma 1, \dots, \Sigma 8$  поступают на соответствующие согласованные фильтры последовательностей (СФП), настроенные соответствующим образом. Здесь они одновременно сжимаются и результаты обработки поступают на входы  $\Sigma 9$ , где они синхронно складываются таким образом, что формируется АКФ принимаемого сигнала. В зависимости от знака передаваемого бита на выходе  $\Sigma 9$  полученный сигнал будет иметь аналогичный знак.

Поскольку, помимо полезного сигнала, всегда при работе станций в составе систем ААС присутствуют на ее приемном конце сигналы многих станций, то одновременно, на выходе  $\Sigma 9$  будут находиться сигналы, которые могут быть описаны соответствующими ВКФ, у которых БЛ, расположенные на одинаковом расстоянии от центра и имеют одинаковые амплитудные значения по модулю. В тоже время АКФ принимаемых полезных сигналов БЛ не имеют.

Для повышения качества декодирования, сигналы с выхода  $\Sigma 9$  поступают на блок выделения знака (БВЗ) и блок выделения модуля (БВМ). В блоке БВЗ происходит фиксация знака сжатого сигнала в каждый момент времени, а в блоке БВМ происходит вычисление его модуля.

С выхода БВМ сигнал поступает на робастное пороговое устройство (ПУ), которое устойчиво при принятии решений к изменению уровня помех, к которым можно отнести и взаимные помехи работающих станций [152, 159].

Структурная схема робастного порогового устройства изображена на рис. 18.14.

Работает робастное пороговое устройство следующим образом. При поступлении с выхода согласованного фильтра комплементарной кодовой последовательности (СФ ККП) сигнала от АС, на которую он настроен, на его выходе появится отклик в виде импульса заданной амплитуды. При этом БЛ у принимаемого сигнала отсутствуют. В блоке БВМ вычисляется его модульное значение и сигнал поступает на цифровую линию задержки (ЦЛЗ) на  $2m+1$  отсчет. При ее прохождении, сигнал через отводы поступает на схему выбора максимума (СВМ), которая пропускает его на выход.

Прошедший СВМ сигнал умножается на константу, положим  $C = 1,125$ , и поступает на пороговый вход ПУ. Поскольку амплитуда сигнала на поро-

говом входе выше, чем на сигнальном, на выходе ПУ отсутствует разрешающий потенциал.



Рис. 18.14. Структурная схема робастного порогового устройства

Одновременно, с выхода СФ ККП полезный сигнал поступает на БВЗ, где выделяется его знак и поступает на ЦЛЗ на  $m+1$  отсчет. Величина  $m$  определяется ожидаемым диапазоном нахождения БЛ ВКФ других сигналов относительно точки ортогональности  $n=0$ . Для рассматриваемых сигналов  $m=0,5N$ .

Поскольку с выхода ПУ нет разрешающего потенциала, блок формирования законопеременных импульсов (БФЗпИ) не работает.

При достижении полезным сигналом отвода  $n=0$  ЦЛЗ на  $2m+1$  отсчет, он поступит на сигнальный вход ПУ. Одновременно, с выхода СВМ поступит нулевой сигнал, который, пройдя умножитель, поступит на пороговый вход ПУ. В этом случае на выходе ПУ появится разрешающий потенциал, поступающий на БФЗпИ. Одновременно, на другой вход БФЗпИ, поступит информация о знаке принятого сигнала с выхода ЦЛЗ на  $m+1$  отсчет. На выходе БФЗпИ, в зависимости от знака полезного сигнала, формируется соответствующий импульс, нормированный по амплитуде, который поступает на дельта-демодулятор (ДД). С выхода ДД получаемое демодулированное сообщение поступает в блок получателя сообщения (БПС), т.е. к получателю информации.

В том случае, когда на вход СФ ККП поступает сигнал от АС на которую он не настроен, на его выходе будут нули и могут быть БЛ, расположенные симметрично относительно точки  $n=0$  и имеющие равные амплитуды. Эти БЛ поступают на БВМ и БВЗ. После прохождения БВМ они поступают на ЦЛЗ на  $2m+1$  отсчет и поступают через СВМ на перемножитель, где их амплитуда увеличивается на величину  $C$ .

Пусть амплитуда какого-либо рассматриваемого БЛ будет самой максимальной. Тогда на выходе ПУ, пока этот БЛ проходит ЦЛЗ на  $2m+1$  отсчет, будет отсутствовать разрешающий потенциал.

В тот момент времени, когда рассматриваемый БЛ достигнет в ЦЛЗ на  $2m+1$  отсчет точки  $n=0$  и поступит на сигнальный вход ПУ, второй БЛ точно такой же амплитуды и в этот же момент времени поступит на  $-m$ -й отвод этой ЦЛЗ на  $2m+1$  отсчет. Этот второй БЛ, пройдя через СВМ и увеличив свою амплитуду в перемножителе на 1,125, поступит на пороговый вход ПУ. Этим самым он предотвратит появление разрешающего потенциала на выходе ПУ.

При дальнейшем прохождении обоих БЛ по ЦЛЗ на  $2m+1$  отсчет на выходе ПУ также не будет разрешающего потенциала.

При достижении второго БЛ точки  $n=0$  в ЦЛЗ на  $2m+1$  отсчет он поступит на сигнальный вход ПУ, на пороговом входе которого будет первый БЛ с большим значением амплитуды. Следовательно, и в этом случае на выходе ПУ будет отсутствовать разрешающий потенциал.

В том случае, когда с выхода СФ ККП будет поступать последовательность в виде сигнального импульса и обоих БЛ, то до тех пор, пока сигнальный импульс будет находиться в ЦЛЗ на  $2m+1$  отсчет, его большее значение амплитуды будет препятствовать появлению разрешающего потенциала на выходе ПУ до тех пор, пока он не окажется на отводе  $n=0$ . Поскольку максимальные значения амплитуд БЛ не превышают половины амплитуды полезного сигнала, то их амплитуды на пороговом входе ПУ равны 0,5625 амплитуды полезного сигнала, а, следовательно, в этот момент времени на выходе ПУ появится разрешающий потенциал и далее будет осуществляться нормальная работа приемной части АС, как было описано ранее.

Очевидно, что в случае, когда происходит совпадение во времени полезного сигнала и какого-либо БЛ в СФ ККП, то на его выходе будут искаженные амплитуды БЛ и полезного сигнала. В этом случае при увеличении амплитуды получаемой суммы, режим принятия решения не изменится. В том случае, когда сумма будет меньше амплитуды полезного сигнала, возможно либо принятие правильного решения, в случае, если фаза другого БЛ совпадает с фазой полезного сигнала, либо принятие решения о противоположной фазе сигнала относительно принимаемого полезного сигнала. В последнем случае получается «сбойная» ситуация на входе ДД, что приводит к искажению информации, устранение которой может быть достигнуто применением соответствующего кодирования.

Отметим, что аналогичные результаты получаются и в случае, когда поступающая с выхода СФ ККП последовательность представляет собой случайный поток импульсов, состоящих из полезного сигнала и БЛ сигналов работающих в этот момент времени других АС.

В течение всей работы приемной станции, с тридцать седьмого выхода БУП поступают на соответствующие входы соответствующих блоков синхронимпульсы (СИ), которые синхронизируют работу всего устройства.

Отметим, что БУ и БУП могут быть объединены.

### 18.5. Синтез ансамблей временных комлементарных кодовых последовательностей

18.5.1. Известно, что применение импульсно-кодовой модуляции (ИКМ) в многоканальных системах цифровой связи в настоящее время наиболее эффективно при организации синхронного режима их работы, что приводит к жестким требованиям к системам синхронизации [129].

Метод ИКМ называется также методом прямой последовательности DSSS.

Организация асинхронной адресной связи на основе непосредственного применения ИКМ между абонентами с использованием ограниченного числа частотно-независимых каналов приводит к появлению БЛ как в сигналах, обработанных в предназначенных для них декодирующих устройствах (ДУ), так и в сигналах, прошедших не предназначенные для них ДУ. При этом могут возникать либо «сбойные» ситуации, либо невозможность обеспечения одновременной работы требуемого в данный момент времени числа абонентов. Часто указанные недостатки являются недопустимыми, что и ограничивает применение систем асинхронной адресной связи в указанных областях [141, 160, 161].

В 18.2 рассмотрено построение ансамблей сложных ДЧ сигналов второго порядка формируемых методом FHSS и которые, проходя соответствующие блоки СФ, реализуют принцип «да и нет в одном сигнале».

В силу ряда причин не всегда удается организовать большое число независимых каналов связи при одновременном отсутствии ограничений на ширину полосы частот, занимаемых каждым из них. В частности, в ряде систем радиосвязи гигагерцового диапазона волн технически сложно обеспечить достаточно высокий уровень частотной селекции между большим числом каналов, а следовательно, существуют ограничения на их количество в заданном диапазоне частот при отсутствии ограничений на полосу занимаемых частот каждым из них [141, 160, 161]. Также к таким системам цифровой связи могут быть отнесены системы на основе «пространственных», волоконно-оптических линий связи (ВОЛС), используемых, например, или при организации распараллеленного вычислительного процесса в многопроцессорных вычислительных системах, или при организации передачи информации между различными узлами в летательных аппаратах.

При этом требуется учитывать также то обстоятельство, что, например, по ВОЛС передаются цифровые сигналы в виде кодов, представляемые как однополярные двухуровневые последовательности (0 и 1).

В то же время не вызывает больших трудностей и материальных затрат организация относительно небольшого количества каналов связи. В частно-

сти, для систем радиосвязи гигагерцового диапазона волн нетрудно обеспечить всего четыре независимых частотных канала с заранее заданной полосой пропускания для каждого. Для систем связи, использующих ВОЛС, нетрудно организовать одновременное использование нескольких (четырёх) идентичных волокон, обладающих, как известно, практически неограниченной полосой пропускания, и расположенных в «пространстве» рядом друг с другом.

Четыре независимых канала связи можно также обеспечить за счёт использования технологии спектрального уплотнения оптического канала (wave-length-division multiplexing – WDM).

18.5.2. Рассмотрим синтез ансамблей таких ККП, которые обеспечивали бы принцип «да и нет в одном сигнале» с учетом ограничений, накладываемых на количество независимых частотных каналов и их особенностей, используемых при построении систем ААС, причем необходимые характеристики обеспечивались бы за счёт применения временного подхода. ККП, удовлетворяющие указанным требованиям, называются временными элементарными кодовыми последовательностями (ВККП).

Будем полагать, что передаваемая информация между абонентами представляется в цифровой форме в виде последовательности информационных битов, имеющих знаки «+» или «-», и длительностью  $T_b$  каждый. В свою очередь, каждый временной интервал длительностью  $T_b$  разбивается на  $R$  элементов длительностью  $T = T_b/R$ , где  $R = 2S$ , причем величина  $S$  определяет количество абонентов в системе ААС. Величину  $T$  в дальнейшем будем называть временным подынтервалом. Каждому абоненту присваивается своя ВККП второго порядка, состоящая из  $R$  элементов, которой модулируется информационный бит.

Каждая ВККП второго порядка состоит из двух ВККП первого порядка. Под ВККП первого порядка будем понимать такую кодовую последовательность, каждый элемент которой занимает строго определенное дискретное местоположение на временной оси в отведенном для этой последовательности интервале времени.

В том случае, когда передается информационный бит, имеющий знак «+», то элементы ВККП первого порядка со знаками «+» передаются, по первому каналу связи, а элементы со знаком «-» этой же ВККП – по второму каналу связи.

В том же случае, когда информационный бит имеет знак «-», элементы ВККП первого порядка имеющие знаки «+» передаются по второму каналу связи, а элементы ВККП первого порядка имеющие знак «-» передаются по первому каналу связи.

Следовательно, для передачи информационного бита, модулируемого ВККП второго порядка, требуется четыре независимых канала связи. При этом при передаче информационного бита от одного абонента другому в

каждый момент времени всегда используются параллельно только два канала связи. В дальнейшем для определенности будем полагать, что положительные значения кодирующих последовательностей ВККП второго порядка при знаке «+» информационного бита передаются по нечетным каналам связи, а отрицательные – по четным, а в случае знака «-» информационного бита положительные и отрицательные значения кодирующих последовательностей меняются местами.

В свою очередь, каждый элемент каждой ВККП первого порядка подвергается ИКМ и представляет собой серию, состоящую из  $L$  парциальных импульсов длительностью  $\tau_n \ll T$  каждый. Эти парциальные импульсы располагаются внутри элемента таким образом, что образуют соответствующую кодово-адресную комбинацию. Длительность парциального импульса  $\tau_n$  определяется шириной полосы пропускания канала связи. В каждом элементе каждой ВККП первого порядка количество нулевых позиций  $Z \gg L$ .

В каждой ВККП первого порядка, состоящей из  $R$  элементов, имеется  $K = 2^p \leq R$  независимых элементов, где  $p = 3, 4, 5, \dots$ . Величина  $R = KQ$ , где  $Q = 2^q$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$  показывает, во сколько раз общее число элементов в синтезируемой ВККП первого порядка больше числа используемых независимых элементов. Характерной особенностью такого элемента является то, что он имеет только ему присущую кодово-адресную комбинацию, состоящую из  $L$  единиц в виде парциальных импульсов длительностью  $\tau_n$  каждый и  $Z$  нулей, которая располагается на временном подынтервале длительностью  $T$ .

Положим, что минимальное расстояние между соседними парциальными импульсами кодово-адресной комбинации будет равно  $\tau = 2\tau_n \ll T$ , т. е. защитные интервалы, окружающие каждый парциальный импульс, равны  $0,5\tau_n$ .

Обработка сформированной указанным образом ВККП второго порядка осуществляется в несколько этапов.

На первом этапе в принятой реализации подвергается дешифрации кодово-адресная комбинация каждого элемента ВККП второго порядка. В результате на выходах соответствующих ДУ, представляющих собой, например, линии задержки с отводами подключенными ко входам схем совпадений, в соответствующие моменты времени в соответствующих каналах связи появляются единицы, характеризующие местоположение на временной оси того или иного элемента ВККП второго порядка с соответствующим знаком, определяемым номером канала связи. Подобная обработка сигналов называется *статистическим разделением* [162].

На втором этапе из полученной последовательности однополярных импульсов формируются соответствующим образом две ВККП первого порядка с соответствующими знаками в виде двухполярных кодовых последовательностей импульсов, которые поступают на соответствующие им СФ, где осуществляются процедуры согласованной фильтрации.

На третьем этапе отклики, получаемые при прохождении обеих ВККП первого порядка через соответствующие СФ, суммируются в сумматоре, в результате чего на выходе образуется отклик, соответствующий переданному информационному биту.

Рассмотренный вид обработки ВДКП второго порядка в дальнейшем будем называть *статистическо-фильтровой обработкой*.

Отметим следующее обстоятельство. Поскольку ВККП второго порядка передается по четырем независимым и идентичным каналам связи, то можно использовать одинаковые кодово-адресные комбинации во всех каналах для «раскрашивания» соответствующих независимых элементов. Следовательно объем алфавита ВККП второго порядка равен  $4K$ .

18.5.3. Синтез требуемого ансамбля ВККП второго порядка выполняется следующим образом.

*Шаг 1.* Итеративно формируется макет первообразной ТК-матрицы, размер которой равен  $K \times K$ .

*Первая итерация.* Формируется первая строка первообразной ТК-матрицы путем записи в строку  $K$  независимых элементов (т. е. формируется  $K$  столбцов). Каждый из этих элементов описывает дискретное во времени местоположение на временной оси на каждом временном подынтервале длительностью  $T$  соответствующей кодово-адресной комбинации.

Тогда можно записать Т1-матрицу размером  $1 \times K$  в виде

$$\Pi = \left[ \begin{array}{cccc} T_{01} & - & T_{(0,25K)0,25K} & T_{(0,25K)0,25K+1} & \dots \\ \dots & & & & \\ - & T_{(0,5K)0,5K} & T_{(0,5K)0,5K+1} & - & T_{(0,75K)0,75K} & T_{(0,75K)0,75K+1} & - & T_{(K)0,K} \end{array} \right]$$

Здесь индекс  $1 \leq i \leq K$  в круглых скобках обозначает номер временного подынтервала  $T(i)$ , а индекс  $1 \leq j \leq K$  без скобок обозначает номер выбранной кодово-адресной комбинации. Для первообразной Т1-матрицы эти обозначения совпадают. Также отметим, что только при формировании первообразной ТК-матрицы используются «независимые» кодово-адресные комбинации без повторов во времени.

*Вторая итерация.* Формируются две строки макета первообразной ТК-матрицы в виде первообразной Т2-матрицы размером  $2 \times K$ . Первая

строка Т2-матрицы образуется путем перезаписи на эти места элементов Т1-матрицы.

Вторая строка Т2-матрицы формируется из Т1-матрицы путем предварительного деления ее по вертикали на равные части, количество которых равно количеству строк в Т2-матрице, и производится нумерация полученных частей слева направо. На нечетную позицию второй строки Т2-матрицы записываются элементы, расположенные в четной части Т1-матрицы с номером на единицу больше, а на четную позицию второй строки Т2-матрицы записываются элементы, расположенные в нечетной части Т1-матрицы с номером на единицу меньше. Производится соответствующая перенумерация номеров временных подынтервалов  $T(i)$  во второй строке, расположенных в скобках.

Образуется Т2-матрица размером  $2 \times K$  в виде

$$\Pi = \left[ \begin{array}{cccc} T_{01} & - & T_{(0,25K)0,25K} & T_{(0,25K)0,25K+1} & - & \\ T_{(0,5K)0,5K+1} & - & T_{(0,25K)0,75K} & T_{(0,25K)0,75K+1} & - & \\ \dots & & & & & \\ - & T_{(0,5K)0,5K} & T_{(0,5K)0,5K+1} & - & T_{(0,75K)0,75K} & T_{(0,75K)0,75K+1} & - & T_{(K)K} \\ - & T_{(0,5K)K} & T_{(0,5K)1} & - & T_{(0,75K)0,25K} & T_{(0,75K)0,25K+1} & - & T_{(K)0,5K} \end{array} \right]$$

*Третья итерация,* как и увеличение числа строк ТК-матрицы в два раза на каждой последующей итерации, осуществляется путем перезаписи в верхнюю половину вновь образуемой матрицы элементов предыдущей матрицы без изменения их местоположения.

Нижняя половина формируется из предыдущей матрицы, которая предварительно делится по вертикали на число частей, равное числу строк вновь формируемой матрицы, и производится нумерация полученных частей слева направо.

На нечетные позиции нижней половины формируемой матрицы записываются элементы четных частей предыдущей матрицы с номерами на единицу больше, а на четные позиции нижней половины формируемой матрицы записываются элементы нечетных частей предыдущей матрицы с номерами на единицу меньше.

Производится соответствующая перенумерация номеров временных подынтервалов  $T(i)$  во вновь образованной нижней половине матрицы, расположенных в круглых скобках.

Процесс итеративного увеличения числа строк продолжится до тех пор, пока не будет сформирована Т0,5K-матрица, т. е. матрица размером  $0,5K \times K$ .



ления элементов, каждый из которых имеет свою кодово-адресную комбинацию. Суммарные АКФ и суммарные ВКФ представляют собой суммы АКФ и ВКФ каждой из ВККП, входящих в пару, и вычисляются с учетом следующих правил перемножения элементов друг на друга вне зависимости от значения индексов  $i$ :

$$\begin{aligned} +1 &= (T_{(ij)}) \times (T_{(ij)}) = (-T_{(ij)}) \times (T_{(ij)}), \\ -1 &= (T_{(ij)}) \times (-T_{(ij)}) = (-T_{(ij)}) \times (T_{(ij)}) \end{aligned} \quad (18.4)$$

0 – результат перемножения элементов с различными индексами  $j$

Отметим, что для  $LTK_R^{2ac4bd}$ -матрицы пары ВККП расположены на строках, имеющих номера  $i$  и  $0,5N+i$  соответственно, где  $1 \leq i \leq 0,5N$ .

После вычисления суммарных АКФ  $K_A(n)$  и суммарных ВКФ  $K_B(n)$  производится проверка полученных результатов на соответствие заданным условиям.

Шаг 7. На этом этапе определяются ВККП, которые используют соответствующие каналы связи. Для этого дополнительно переобозначаются элементы в  $LTK_R^{*****}$ -матрице, расположенные соответственно в ее верхней и нижней половинах, путем добавления верхних индексов «1» и «2».

В дальнейшем будем полагать, что ВККП с верхним индексом «1» используют первый и второй каналы связи, а ВККП с верхним индексом «2» – третий и четвертый каналы связи.

В результате образуется  $LTK_{R/S}^{*****}$ -матрица, описывающая пары ВККП. Образованная  $LTK_{R/S}^{*****}$ -матрица имеет  $4K$  независимых элементов, каждому из которых соответствует определенная кодово-адресная комбинация на временной оси, а ее расположение в канале связи зависит от знаков «+» и «-».

Пример 2. Из первообразной  $LTS_{8/4}^{2ac4bd}$ -матрицы путем добавления верхних индексов «1» и «2» получим  $LTS_{8/4}^{2ac4bd}$ -матрицу, которая описывает требуемые синтезированные ВККП и имеет вид

$$LTS_{8/4}^{2ac4bd} = \begin{bmatrix} T^1(01) & T^1(12) & -T^1(33) & T^1(44) & -T^1(55) & -T^1(66) & -T^1(77) & T^1(88) \\ T^1(05) & T^1(26) & -T^1(37) & T^1(48) & -T^1(59) & -T^1(62) & -T^1(73) & T^1(84) \\ T^1(03) & T^1(24) & T^1(35) & -T^1(42) & -T^1(57) & -T^1(68) & T^1(75) & -T^1(86) \\ T^1(07) & T^1(28) & T^1(35) & -T^1(46) & -T^1(53) & -T^1(64) & T^1(71) & -T^1(82) \\ T^2(09) & T^2(210) & -T^2(311) & T^2(412) & T^2(513) & T^2(614) & T^2(715) & -T^2(816) \\ T^2(013) & T^2(214) & -T^2(315) & T^2(416) & T^2(519) & T^2(610) & T^2(711) & -T^2(812) \\ T^2(011) & T^2(212) & T^2(319) & -T^2(410) & T^2(515) & T^2(616) & -T^2(713) & T^2(814) \\ T^2(015) & T^2(216) & T^2(313) & -T^2(414) & T^2(511) & T^2(612) & -T^2(719) & T^2(810) \end{bmatrix}$$

На этом процедура синтеза ансамбля ВККП для систем ААС с ограниченным числом независимых частотных или «пространственных» каналов связи заканчивается. Видно, что рассмотренный метод очень похож на процедуру, изложенную в 18.2.

18.5.4. Синтезированные  $LTK_{R/S}^{*****}$ -матрицы имеют размер  $R \times R$ , определяемый, как указывалось, числом абонентов  $S = 0,5R$  системы ААС. При этом у каждой станции системы ААС каждый бит информационного сообщения модулируется ВККП второго порядка. Синтезированные ВККП второго порядка состоят из двух ВККП первого порядка, причем ВККП первого порядка, которые расположены в верхней половине  $LTK_{R/S}^{*****}$ -матрицы, описывают ИКМ по времени импульсов, имеющих одинаковые полосы частот в двух частотных каналах или в двух ВОЛС, а ВККП первого порядка, которые расположены в нижней половине  $LTK_{R/S}^{*****}$ -матрицы, описывают ИКМ по времени импульсов, имеющих такие же полосы частот в двух других каналах связи. При этом номер канала связи для каждой ВККП первого порядка определяется знаком «+» или «-».

Следовательно, вся полоса частот, используемая системой ААС, равна сумме четырех полос каналов. Тогда каждый сложный сигнал, модулирующий информационный бит, являющийся адресом соответствующего абонента, имеет базу равную  $B = 4T_0/\tau_n$ .

В этом случае, при выполнении условия (18.4) при использовании ВККП второго порядка, обеспечивается суммарная АКФ  $K_A(n)$  в виде « $\delta$ -функции» и «ортогональность» в точке и на временном интервале при произвольном сдвиге» для ВКФ  $K_B(n)$ .

В качестве критериев оценки эффективности синтезированных ансамблей ВККП можно использовать параметры  $\eta$  и  $\eta_S$ , которые описываются выражениями (18.2) и (18.3) соответственно.

Расчет всех суммарных ВКФ  $K_B(n)$  производится при условии полного статистического разделения кодово-адресных комбинаций.

Уровень внутрисистемных помех, зависящих от величины и количества БЛ суммарных ВКФ, определяет помехоустойчивость всей системы ААС. Этот уровень зависит от заданного количества абонентов  $S$  и рассчитываемых параметров.

Расчет необходимой полосы частот  $\Delta F$  (Гц) для каждого частотного канала производится согласно выражению

$$\Delta F = F_S R k_s k_a S L \log_2 d = 2 F_S k_s k_a S^2 L \log_2 d \quad (\text{Гц}).$$

Здесь  $k_s$  – коэффициент занятости отдельного канала связи, а  $k_a$  – коэффициент активности канала связи.

Задаваясь количеством абонентов  $F_S = 64000$  (Гц),  $S = 512$ ,  $d = 2$ ,  $L = 4$ ,  $k_s = 1$ ,  $k_a = 1$  получим  $\Delta F = 134219728$  (Гц)  $\approx 134,22$  (МГц). Обычно  $k_s = 0,1$ ,  $k_a = 0,25$ . Тогда  $\Delta F \approx 3,6$  (МГц)

Очевидно, что задаваясь полосой пропускания канала связи  $\Delta F$ , или длительностью парциального импульса  $\tau_n$ , частотой дискретизации  $F_c$  и количеством уровней квантования  $d$ , можно определить количество абонентов  $S$ , одновременная асинхронная работа которых удовлетворяет заданному качеству связи при использовании статистическо-фильтрового алгоритма обработки ВККП.

Отметим, что если в качестве линий связи используются линии по которым можно передавать двухполярные видеопульсы, как, например, в проводных линиях связи, то для организации асинхронной адресной связи на основе ВККП и при использовании статистическо-фильтрового метода обработки сигналов достаточно иметь только два канала связи. При этом соответствующие ВККП передаются только по одному каналу связи, а ДУ формируются из двухполярных серий парциальных импульсов двухполярные импульсы ВККП первого порядка в каждом канале связи. Эти полученные ВККП первого порядка далее обрабатываются описанным выше способом.

### 18.6. Выводы

Предложен метод получения ансамблей ККП имеющих суммарные АКФ в виде « $\delta$ -функций» и суммарные ВКФ со свойствами ортогональности «в точке и на временном отрезке при произвольном сдвиге». Синтез ансамблей ККП, обеспечивающих принцип «да и нет в одном сигнале», осуществляется итеративно, с использованием модифицированных матриц Адамара. Полученные ансамбли ККП предназначены для модуляции ДЧ сигналов второго порядка по времени и по частоте (метод FHSS) которые используются в системах ААС. Полученные соотношения показывают высокую эффективность применения полученных ансамблей ККП для систем ААС так как имеют более низкий уровень внутрисистемных помех. Это позволяет получить более высокую помехоустойчивость, а следовательно, и большую информационную пропускную способность систем ААС, все станции которых работают в одной полосе частот.

Показано, каким образом можно реализовать системы ААС у которых количество абонентов равно удвоенному числу используемых пар ККП за счет «двойного» использования занимаемой полосы частот. Это позволяет избежать требования иметь более широкую полосу занимаемых частот относительно случая, когда используются в таких системах сигналы первого порядка.

Рассмотрены процедуры получения ансамблей ВККП, которые целесообразно использовать для получения сложных сигналов второго порядка в малокашальных системах ААС и показана возможность использования для обработки соответствующих ансамблей сигналов статистическо-фильтровой процедуры (метод DSSS).

Все рассмотренные в данной главе подходы и полученные результаты основаны на свойствах сложных сигналов второго порядка, которые недостижимы при использовании любых известных сложных сигналов первого порядка.

## 19. ОБЩИЕ ОСОБЕННОСТИ МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ОБРАБОТКИ РАДИОСИГНАЛОВ

### 19.1. Вводные замечания

Все рассмотренные ранее методы и устройства цифровой обработки радиосигналов, в том числе и сложных, в реальном масштабе времени, ориентированы на их реализацию на МВС. Это связано с рядом преимуществ таких устройств, основным из которых является возможность преодоления одного из существенных ограничений ЦОС, а именно – *ограниченного быстродействия* используемых цифровых функциональных узлов. Основой развития МВС явились успехи микроэлектроники по созданию СБИС, которые позволили реализовывать распараллеленный и конвейерный режимы обработки радиосигналов.

В свою очередь, это способствовало появлению новых алгоритмов, в которых, за счет указанных свойств МВС, появляется возможность обрабатывать процессы, полоса которых превышает быстродействие используемых цифровых функциональных узлов в заданное число раз, а обработка производится как в режиме «скачущее», так и «скользящее» окно. Отметим, что впервые алгоритмы распараллеленной обработки рекурсивных и нерекурсивных элементарных ячеек в режиме работы «скользящее» окно были предложены в [163].

Как было показано ранее, все виды МВС могут быть условно разделены на два больших класса, а именно – систолические МВС и МВС ПА.

Под систолическими вычислительными структурами (СВС) понимаются параллельные и конвейерные вычислительные системы, состоящие из большого числа соединенных регулярным образом идентичных микропроцессоров, называемых также ячейками, которые ритмично обрабатывают поступающие данные, а полученные результаты также ритмично передают следующим ячейкам [5, 6].

При решении тех или иных задач ЦОС на СВС возникает ряд проблем, которые требуют самостоятельного решения, например, такие как:

- какой вид должны иметь систолические массивы для реализации конкретного класса алгоритмов;

- можно ли решить одинаковые задачи на различных видах массивов и как оценить эффективность каждого полученного решения;

- какие виды алгоритмов наиболее эффективно реализуются на систолических массивах, а также ряд других вопросов, возникающих попутно.

Указанные проблемы в некоторых случаях могут оказаться настолько сложными, что могут оказать влияние на возможности обработки с требуемой производительностью при заданных массо-габаритных ограничениях.

В свою очередь, под МВС ПА понимаются вычислительные устройства, обладающие универсальной коммутационной средой и распределенной памятью, основой которых являются микропроцессоры (называемые также ячейками), работающие с машинными языками высокого уровня и реализующие макрооперации путем программирования структуры как системы, так и микропроцессоров (ячеек), ее составляющих, адекватно решаемой задаче [4].

Поэтому представляет интерес рассмотреть особенности и возможности построения различных классов МВС, ориентированных на выполнение операций цифровой обработки радиосигналов с учетом различных видов микропроцессоров (ячеек), их составляющих, различных форм представления радиосигналов в цифровом виде и алгоритмов их обработки [164].

## 19.2. Анализ особенностей представления радиосигналов и алгоритмов их обработки на МВС

19.2.1. В зависимости от вида решаемых задач, радиосигналы, поступающие с выхода ЛТТ, могут быть представлены либо в виде цифровых отсчетов квадратурных составляющих комплексной огибающей, либо в виде бинарно-квантованных отсчетов полной фазовой функции принимаемой реализации.

Известные алгоритмы обработки таких отсчетов радиосигналов распадается на два больших класса, а именно — безынерционные (нелинейные и линейные) и инерционные (линейные).

К безынерционным нелинейным алгоритмам могут быть отнесены алгоритмы, выполняющие операции логарифмирования, потенцирования и ряд других подобных операций. Такие операции в цифровом виде могут быть реализованы путем применения соответствующим образом запрограммированных запоминающих устройств (ЗУ), которые преобразуют коды входных сигналов в коды выходных сигналов.

К безынерционным линейным алгоритмам могут быть отнесены такие алгоритмы, которые связаны, например, с изменением масштаба данных.

К инерционным алгоритмам относятся линейные алгоритмы согласно которым вычисляются дискретные аналоги интеграла свертки во временной

области в зависимости от вида представления входных реализаций и различных видах импульсных характеристик.

Входные данные, поступающие на обработку в том или ином виде, условно могут быть классифицированы на реализации:

- моменты времени начала и конца которых известны точно (например, в задачах синхронной связи, импульсной радиолокации и т.п.);

- моменты времени начала и конца точно неизвестны, но без потери информации, заключенной в реализации, могут быть выбраны произвольно (например, при обработке данных, поступающих от генераторов шума);

- моменты времени начала и конца той или иной реализации точно неизвестны и задаться ими без потери информации не представляется возможным (например, в радиоразведке).

При этом в качестве критерия эффективности целесообразно принять критерий минимума вычислительных операций, использование которого позволяет оценить эффективность принятого технического решения при одинаковой сложности того или иного алгоритма обработки и темпа поступления входных данных [12].

19.2.2. Как правило, процессы, у которых известны моменты времени начала и окончания, обрабатываются в режиме работы вычислителя «скачущее» окно при помощи тех или иных быстрых алгоритмов расчета (алгоритмов БПФ). Это позволяет получать выходной отклик за минимально возможное количество операций путем осуществления необходимых вычислительных процедур в частотной области. При этом более предпочтительным является использование устройств класса СВС, поскольку в этом случае архитектура вычислителя задана, а используемые алгоритмы легко программируемы для этих задач.

В том случае, когда время начала и конца реализации неизвестно, а в процессе обработки возникает необходимость изменения не только параметров алгоритма, но и самого алгоритма обработки, более предпочтительным является применение вычислительного устройства класса МВС ПА. В этом случае естественным образом решается задача перепрограммирования архитектуры многопроцессорной системы так, чтобы структура МВС ПА соответствовала решаемой задаче и обеспечивалась естественное распараллеливание процесса обработки радиосигналов.

Это позволяет, как показано в [4], значительно упростить распределение вычислений между микропроцессорами (ячейками) или модульными процессорными элементами (МПЭ), повысить эффективность загрузки оборудования и вычислительную мощность системы в целом. Последнее делает вычислительные устройства на основе МВС ПА более эффективными по сравнению с устройствами на основе СВС для указанного класса задач.



19.3. Обработка радиосигналов на МВС ПА

19.3.1. МВС ПА, предназначенные для решения задач ЦОС, должны обеспечивать:

- параллелизм управления МПЭ или ячейками, простоту доступа к данным при их обработке;
- децентрализацию работы всей системы;
- перестраиваемость структуры с целью адаптации системы к потребностям задач с учетом имеющихся ресурсов;
- открытость, т.е. возможность развития системы за счет подключения дополнительных МПЭ или ячеек, без изменения принципов функционирования имеющихся в наличии;
- модульность технических и программных средств и регулярность (в пределе однородность) структуры.

В табл. 19.1 приведены условия работы, которым должна удовлетворять МВС ПА, ориентированная на решение класса задач обработки радиосигналов [12, 164].

В МВС ПА могут использоваться не только функционально законченные микропроцессоры, но и МПЭ, которые могут состоять из структурно более простых узлов и должны в реальном масштабе времени обеспечивать выполнение набора крупных операций. В дальнейшем будем полагать, что если не оговорено особо, то как микропроцессоры, так и МПЭ могут называться ячейками, из которых состоят все виды МВС.

Реализация рассмотренных видов обработки на МВС ПА, которые должны решаться в реальном масштабе времени, позволяют сформулировать требования к набору крупных операций.

Они должны состоять из более простых и должны структурно реализовываться МПЭ, которые являются в таком случае основным узлом МВС ПА. При этом указанные особенности обработки должны обеспечиваться на МВС ПА при условии ее соответствия указанным критериям, а также с учетом рассмотренных в предыдущих разделах режимов обработки и алгоритмов.

19.3.2. Очевидно, что независимо от класса МВС, используемые в них ячейки должны удовлетворять следующим требованиям:

- конструктивно быть выполнены в стандартном корпусе с минимально возможным числом выводов, минимальной потребляемой мощностью и максимальной степенью интеграции;
- иметь возможность выполнять макрооперации с использованием языка программирования высокого уровня;
- возможность осуществления параллельности обменов данными и выполнения арифметико-логических действий как внутри ячейки, так и при взаимодействии с другими частями вычислительного устройства;

Таблица 19.1

Сводные характеристики применения МВС ПА, предназначенной для обработки радиосигналов

Режимы обработки сигналов	«Скользящее» окно			«Скачущее» окно		
Алгоритм обработки	Прямое вычисление ДПФ и свертки			Вычисление ДПФ и свертки по алгоритму БПФ		
Виды решаемых задач	Спектральный анализ	Фильтрация	Сжатие сложных сигналов	Спектральный анализ	Фильтрация	Сжатие сложных сигналов
Вид используемого фильтра	Рекурсивный, нерекурсивный	Рекурсивный, нерекурсивный	Нерекурсивный, рекурсивный	Специализированный нерекурсивный		
Распараллеливаемость	Рассматривается в данной книге			Основано на распараллеливании		
Адаптация	Настройка на задачу структуры вычислителя, структуры МПЭ и/или коэффициентов			Адаптивное изменение коэффициентов		
Области применения	Радиолокация, радиосвязь, радионавигация, радиоразведка			Радиолокация, радиосвязь, радионавигация		

• конвейерность обработки данных внутри ячейки за счет ее соответствующих возможностей;

• одинаковое время выполнения всех операций внутри ячейки для обеспечения более простой синхронизации работы всей вычислительной системы.

19.3.3. Для реализации ячейки МВС ПА в виде МПЭ могут быть использованы четыре микросхемы типа К1815ВФ3 (используемой как АЛУ), К1517ИР1 (представляющую собой ортогональную регистровую память – ОРП) и КМ1509КП1 (коммутатор). Отметим, что развитием этих микросхем является серия 1582 (1582 ВЖ3-0034 – микропроцессор, 1582 ВЖ3-0032 – ОРП,

1029 КР2 – коммутатор). Ячейки в виде МПЭ должны также содержать оперативные запоминающие устройства (ОЗУ) хранения коэффициентов и постоянные запоминающие устройства (ПЗУ) хранения кодов структуры ячейки. Также в состав ячейки в виде МПЭ могут быть включены управляемая цифровая линия задержки (ЦЛЗ) и реверсивный счетчик (РС). В качестве примера на рис. 19.1 приведена структурная схема МПЭ на основе микропроцессора К1815ВФ3.

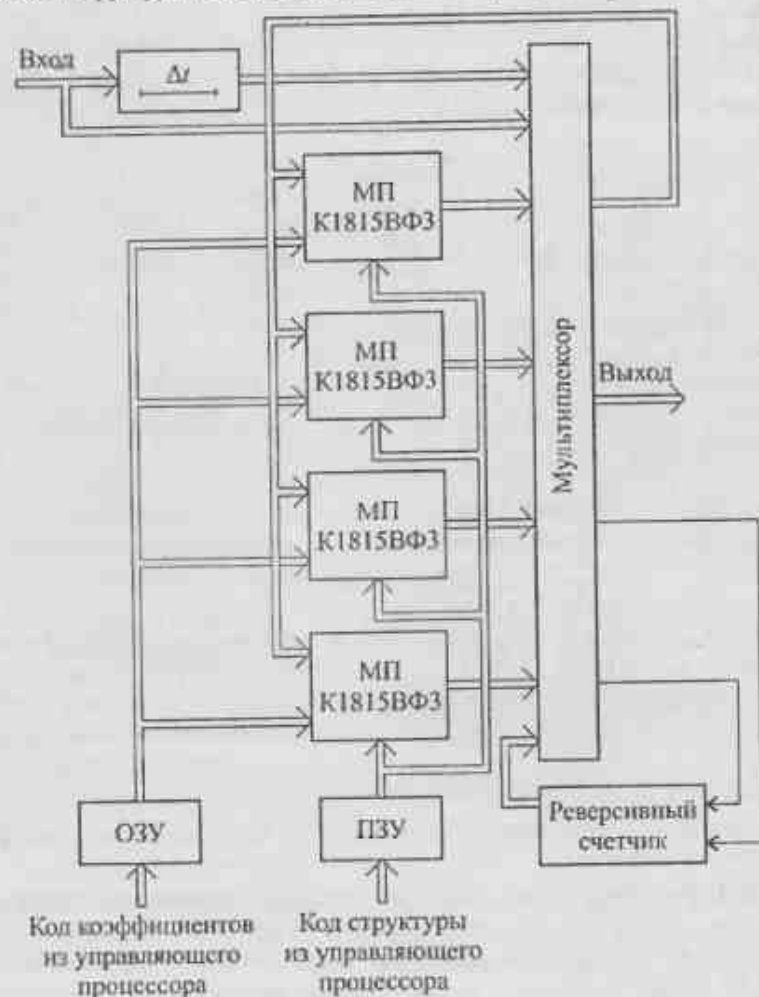


Рис. 19.1. Структурная схема МПЭ на основе микропроцессора К1815ВФ3

В этом случае структурная схема МВС ПА, на основе МПЭ, выполненного с учетом особенностей микропроцессора К1815ВФ3 и ориентированная на обработку радиосигналов, может быть представлена в виде, изображенном на рис. 19.2 [165].

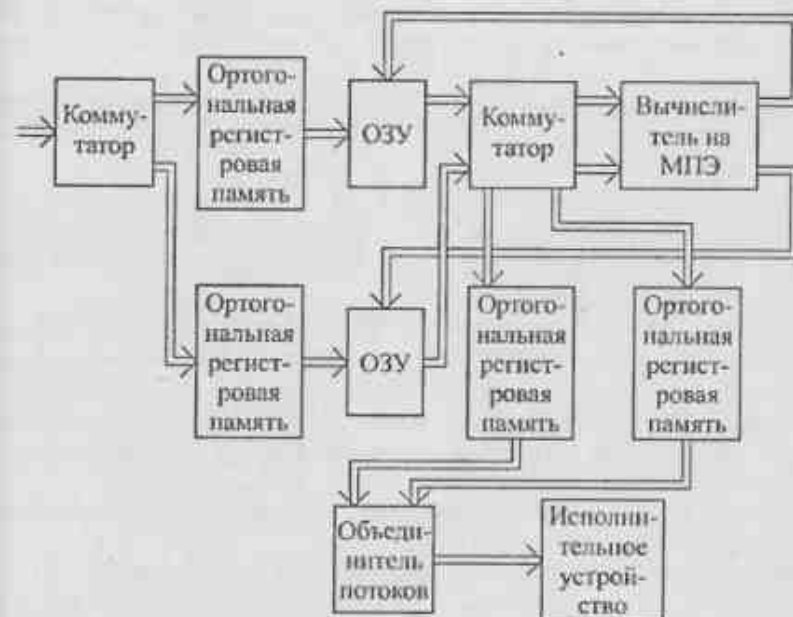


Рис. 19.2. Структурная схема МВС ПА на основе МПЭ

19.3.4. МПЭ (или их набор) должен реализовывать:

- структуру комплексной тангенсной ячейки, которая может быть выполнена путем каскадного соединения двух МПЭ (один – рекурсивное звено, другой – нерекурсивное);
- структуру действительной биквадратной ячейки, которая так же выполняется на основе двух МПЭ (один – рекурсивное звено, другой – нерекурсивное);
- структуру элементарной операции БПФ (так называемой «бабочки»);
- структуру, вычисляющую коэффициенты Фурье на основе алгоритма Герцеля [15, 26];
- структуру ячейки, вычисляющей отчет корреляционной функции;
- структуру комплексной квазитангенсной ячейки;
- структуру действительной квазитангенсной биквадратной ячейки;
- структуры указанных ячеек при распараллеленной обработке входных данных;

- структуру приближенного вычисления корня квадратного из суммы квадратов квадратурных составляющих комплексного сигнала;
- структуру, позволяющую производить сравнение данных, их масштабирование и выполнять логические операции;
- структуры, реализующие алгоритмы обработки бинарно-квантованных сигналов, фазовые функции которых могут быть представлены в виде произведения комплексных экспоненциальных функций.

Отметим, что операции логарифмирования и потенцирования проще выполнять путем применения специальных ПЗУ, в которых заранее «зашифрованы» эти функции.

19.3.5. Решение вышеперечисленных задач назовем задачами первичного уровня программирования. К задачам вторичного уровня программирования отнесем организацию связей между МПЭ, то есть структуру вычислителя для решения конкретной задачи.

При этом для каждого алгоритма работы многопроцессорной системы коды связей и коды операций могут быть сведены в один код, который предварительно записывается в ПЗУ. Тогда формирование структуры может осуществляться путем записи требуемого кода, соответствующего той или иной структуре, в буферные регистры МП и мультиплексоров МПЭ.

Структурная схема алгоритма настройки и управления многопроцессорной системой от ЦВМ изображена на рис. 19.3.

Работает алгоритм настройки и управления следующим образом.

*Шаг 1.* На этапе настройки МВС ПА на вид решаемой задачи всегда в режиме внешнего управления задается структура вычислителя.

*Шаг 2.* Задются или определяются требуемые технические характеристики вычислителя. В частности, для задач цифровой фильтрации, к ним относят тип фильтра (ФНЧ, ПФ, ФВЧ, РФ), вид аппроксимирующего полинома, полосы пропускания (задержания), центральные частоты, уровни неравномерности [166].

*Шаг 3.* В зависимости от выбранного вида решаемой задачи формируется код управления, соответствующий синтезированной структуре устройства обработки.

*Шаг 4.* Для выбранного вида структуры производится расчет коэффициентов согласно тем или иным методам расчетов.

*Шаг 5.* Производится преобразование информации из формы, в которой она представлена в ЦВМ, в форму представления данных, принятых для МПЭ на основе К1815ВФ3. Подобное преобразование осуществляется специальной программой, которая определяется аппаратурной реализацией интерфейса ЦВМ и видом устройства согласования ЦВМ с МВС.

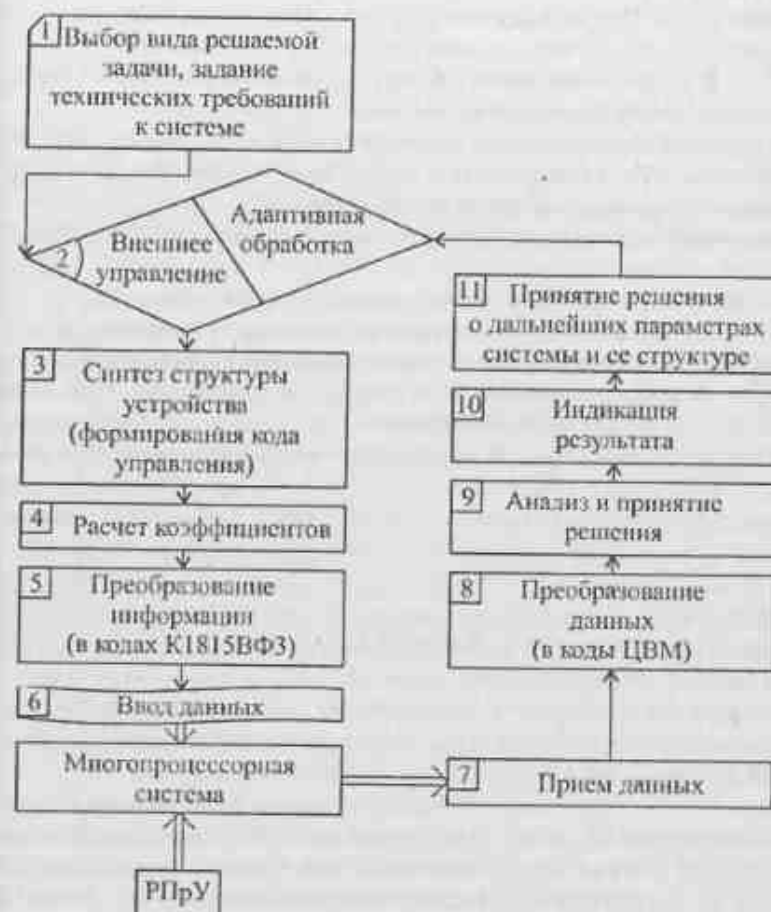


Рис. 19.3. Структурная схема алгоритма настройки и управления многопроцессорной системой от ЦВМ

*Шаг 6.* Осуществляется ввод данных в многопроцессорный вычислитель. Поступающие с выхода ЛТТД данные, преобразованные в соответствующую форму, обрабатываются синтезированной структурой.

*Шаг 7.* Полученные после обработки результаты поступают в управляющую ЦВМ в соответствии с протоколом обмена данными.

*Шаг 8.* Данные, поступившие с выхода МВС на вход ЦВМ, преобразуются в коды, с которыми оперирует ЦВМ.

*Шаг 9.* В зависимости от алгоритма анализа, производится соответствующее принятие решения.

*Шаг 10.* После принятия решения производится индикация результатов обработки.

*Шаг 11.* В случае адаптивной обработки сигнала, производится принятие решения о дальнейших параметрах и структуре системы.

Следовательно, рассмотренный алгоритм программирования МВС ПА представляет собой двухуровневую аппаратно-программную реализацию управления, т.е. на первом уровне осуществляется аппаратно-программная настройка МПЭ, а на втором – аппаратно-программная настройка МВС ПА.

#### 19.4. Многопроцессорные вычислительные структуры с программируемой архитектурой на основе систолических ячеек

В качестве ячейки МВС может быть использован разработанный фирмой Texas Instruments цифровой сигнальный процессор TMS320C80 (MVP) который может рассматриваться как пример реализации простейшей СВС [8]. Этот цифровой сигнальный процессор имеет производительность 2 миллиарда операций в секунду и оперирует одновременно с четырьмя 32-разрядными числами с фиксированной запятой и может в настоящее время рассматриваться как технический стандарт де-факто.

Это устройство содержит в одном корпусе пять процессоров – четыре сигнальных процессора типа ADSP и один управляющий RISC процессор, имеет внутреннее статическое ОЗУ на 50-Кбайт, внешнюю шину с пропускной способностью 400 Мбайт/с, два блока генерации адресов, два программируемых видеоконтроллера, интерфейс со всеми видами памяти (динамической, статической, двухпортовой), 64-разрядное машинное слово, линейная и двухкоординатная адресация, 44 доступных пользователю регистра.

Очевидно, что на основе TMS320C80, являющимся простейшей систолической ячейкой (СЯ), могут быть реализованы СВС требуемой размерности на основе которых достаточно просто организовать вычислительные процессы, использующие быстрые алгоритмы расчета.

Если использовать TMS320C80 в качестве ячейки в МВС ПА, то в этом случае получающаяся структура можно рассматривать как ее частный случай, поскольку структура ячейки архитектурно остается неизменной, а требуемые крупные операции выполняются программным путем.

В дальнейшем подобный подкласс вычислителей предлагается называть многопроцессорными вычислительными системами с программируемой архитектурой на систолических ячейках (МВС ПА СЯ) у которых программируется архитектура выполняемой задачи, а те или иные необходимые крупные операции выполняются в соответствующих систолических ячейках, выполненных на основе TMS320C80, программным путем.

При ориентации МВС ПА СЯ на выполнение задач ЦОС, каждая из ее ячеек должна программно реализовывать за один и тот же интервал времени следующие крупные операции [164]:

- алгоритм работы комплексной тангенсной структуры с возможностью перехода к синусной (рекурсивной) и косинусной (нерекурсивной) структурам;
- алгоритм работы действительной биквадратной структуры;
- алгоритм элементарной операции БПФ, описывающий работу структуры в виде «бабочки»;
- алгоритмы работы структуры, вычисляющий коэффициент Фурье (в том числе и по алгоритму Герцеля);
- алгоритм работы элементарного устройства, вычисляющего отчет корреляционной функции;
- алгоритмы работы квазитангенсной структуры;
- алгоритмы работы действительной биквадратной квазитангенсной структуры;
- части алгоритмов, описывающих указанные структуры, архитектурно реализуемые в распараллеленном виде;
- алгоритмы приближенного вычисления корня квадратного из суммы квадратов квадратурных составляющих обработанных отсчетов радиосигналов;
- алгоритмы сравнения данных, их масштабирования и выполнения логических операций;
- алгоритмы обработки бинарно-квантованных сигналов, полные фазовые функции которых могут быть представлены в виде произведения комплексных экспоненциальных функций.

Будем также по-прежнему полагать, что в МВС ПА СЯ выполнение операций логарифмирования и потенцирования проще выполнять путем применения специальных ПЗУ в которых «зашиты» эти функции.

Аналогично тому, как осуществляется настройка МВС ПА на вид решаемой задачи ЦОС, можно осуществлять настройку МВС ПА СЯ также на ряд шагов.

*Шаг 1.* От внешнего управляющего устройства задается структура соединений СЯ между собой, которая определяется алгоритмом обработки и техническими характеристиками реализуемого устройства. К техническим характеристикам устройств ЦОС могут быть отнесены тип фильтра (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ), вид аппроксимирующего АЧХ полинома, полосы пропускания (задержания), центральные частоты настройки проектируемых устройств, уровни неравномерностей АЧХ, необходимую степень распараллеливания алгоритма обработки.

*Шаг 2.* В соответствии со структурой устройства производится выбор крупных операций для каждой СЯ и производится расчет соответствующих параметров для каждой из них.

*Шаг 3.* Включает в себя ввод данных в соответствующим образом настроенное устройство, который может осуществляться непосредственно с выхода ЛТП через узлы, формирующие коды квадратурных составляющих радиосигналов.

*Шаг 4.* Получающиеся в результате обработки на МВС ПА СЯ выходные данные могут поступать как на выход (для их индикации), так и на управляющее устройство для корректировки (в случае необходимости) параметров и/или структуры.

Нетрудно видеть, что многие характеристики МПС ПА СЯ по реализации заданных алгоритмов обработки, тождественны характеристикам МВС ПА на основе МПЭ. Следовательно выбор той или иной структуры во многом определяется технико-экономическими характеристиками разрабатываемых устройств.

#### 19.5. Области применения многопроцессорных вычислительных систем

Целью обработки сигналов является решение одной из двух задач: либо определение истинных параметров принимаемых сигналов, искаженных действием помех или среды, через которую передается сигнал, либо оценка влияния характеристик этой среды на параметры сигнала. К областям, в которых в настоящее время находит применение ЦОС можно отнести системы связи, навигации, радиолокации, радиоразведки, гидролокации, геофизики, где производится обработка радио- и звуковых (речевых) сигналов, и изображений [83].

В данном разделе дается краткая характеристика особенностей применения ЦОС в указанных областях.

Ранее были рассмотрены некоторые виды ЦОС и алгоритмы для систем связи. Помимо рассмотренных, в существующих системах связи применяется так называемая *T*-несущая. В этих системах ЦОС применяется для передачи по одному проводу одновременно 24 телефонных разговоров со скоростью 1,544 Мбит/с [83]. Сигнал каждого канала дискретизируется с частотой 8000 Гц и каждая выборка квантуется для последующей передачи в виде цифр в двоичном коде при использовании ИКМ.

Существуют, помимо цифровых ИКМ систем, системы дифференциальной ИКМ (ДИКМ), которые передают только разность приращений отсчетов сигналов в соседние моменты времени. Данные коды модулируют передатчик, а затем обрабатываются на приемном конце соответствующими

демодуляторами. Такая телефонная связь может быть осуществлена и через спутниковые системы связи.

ЦОС применяется для построения коммутаторов в телефонных станциях. При этом используется принцип временного разделения каналов (ВРК), позволяющий производить цифровое временное уплотнение каналов связи.

Другой класс задач ЦОС связан с цифровой обработкой звуковых сигналов. К задачам звуковой техники относятся запись, хранение, передача и воспроизведение сигналов, воспринимаемых органами слуха [167, 168].

При этом используемое преобразование звуковых сигналов в цифровые осуществляется с применением линейной ИКМ, ДИКМ, дельта-модуляции (ДМ) и адаптивной дельта-модуляции (АДМ).

Полученные коды в цифровом виде заносятся на тот или иной носитель информации. При этом в качестве носителей цифровой информации в настоящее время используются магнитная лента и компакт-диски (compact disk – CD). Применение различных видов ИКМ позволяет также применить помехоустойчивое кодирование цифровой информации, что ослабляет влияние неоднородности носителя. При считывании информации с носителей, коды декодируются таким образом, что в восстанавливаемом звуковом сообщении, появляющемся на выходе ЦАП, отсутствуют искажения, связанные с записью, хранением и воспроизведением этого сообщения. Подобные системы позволяют передавать звуковую информацию с динамическим диапазоном более 98 дБ [167].

Методы обработки речевых сигналов, интенсивно развиваясь, охватывают области анализа, синтеза речи, а так же область кодирования речевых сигналов после проведения их анализа [168, 169].

К задачам первого класса относят задачи, связанные с автоматическим распознаванием речевых сигналов. В этих автоматических системах для распознавания речевых сигналов на основе исходного речевого колебания принимается решение, например, по опознанию личности по голосу [169].

К задачам второго класса относят задачи, связанные с синтезом речи. Например, когда необходимо по печатному тексту, переданному в ЦВМ, снять на ее выходе речевой сигнал. Задачи такого типа встречаются в информационных системах, например, когда врачу необходимо получить доступ к истории болезни, хранящейся в ЦВМ.

К третьему классу относятся задачи в которых сначала выполняется анализ речевого сигнала, а затем его кодирование. Примерами могут служить системы засекречивания, сжатия речевой информации при передаче. Еще одним примером системы анализа-кодирования (синтеза) являются системы накопления-выдачи речевых сообщений, такие, как автоматический секретарь в телефонной линии. В системе накопления выдачи речи анализ сообщения может выполняться в произвольном масштабе времени, результаты анализа

запоминаются в памяти ЦВМ. При формировании требуемого словесного ответа эти результаты используются для управления синтезатором речи.

В методах обработки речевых сообщений используются способы кодирования ИКМ, ДИКМ, ДМ и другие. В этих методах предполагается, что ширина спектра сигнала ограничена. Другие методы связаны с учетом структуры речевого сигнала. Они основаны на моделировании органов речи линейной системой с медленно изменяющимися параметрами, возбуждаемой соответствующим сигналом. В данном методе часто находят применение гомоморфная обработка сигналов.

В последнее время широкое распространение получили цифровые методы обработки изображений [116–125]. Во многом их развитию способствовало появление алгоритмов БПФ. В свою очередь, обработка изображений распадается на два больших класса – собственно обработке сигналов и их анализу и классификации, начиная от создания искусственного интеллекта и кончая извлечением из изображения разного рода информации.

При обработке сигналов изображений двумерными линейными системами производятся операции с двумерными функциями от двух пространственных переменных, в отличие от одномерных линейных систем, оперирующих с временными функциями. При этом целесообразно использование алгоритмов БПФ, которые также применимы при реализации алгоритмов сжатия информации.

Другой важной задачей является цифровое восстановление изображений. В медицинской диагностике некоторые способы формирования изображения связаны с проектированием трехмерных тел на двумерную плоскость с одновременным устранением неоднозначностей, связанных с положением проекций.

В области радиолокации ЦОС применяется в задачах первичной, вторичной и третичной обработке информации. При этом в радиолокационной системе с ЦОС требуется выполнение ряда функционально законченных операций [1, 83, 143].

При первичной обработке радиолокационных сигналов решаются следующие задачи [126, 142, 170, 171]:

- обнаружение полезных (отраженных от цели) сигналов и формирование радиолокационных отметок (то есть принятие решения: либо сигнал есть, либо нет);
- определение координат объектов в пространстве (дальность до цели, доплеровский сдвиг частоты, угловые координаты).

При вторичной обработке радиолокационных сигналов:

- обнаружение траекторий цели по совокупности радиолокационных отметок, полученных в ряде последовательных циклов обзора РЛС;
- слежение за траекторией цели (сопровождение);

• сглаживание и экстраполяция параметров траекторий сопровождаемых целей.

При третичной обработке радиолокационных сигналов:

• объединение информации от нескольких источников (отдельных РЛС или группы РЛС) по целям, находящимся в области перекрытия их зон обзора;

• отождествление (идентификация) траекторий, полученных от нескольких источников одной и той же цели и вычисления ее параметров.

Решение задачи оптимизации обработки подобной информации возможно путем соответствующего анализа эффективности построения отдельных подсистем и системы в целом по «внешним» (задаваемым потребителем радиолокационной информации) и «внутренним» (специфическим для радиолокационной системы) критериями оптимальности.

Более подробное рассмотрение некоторых вопросов первичной обработки ансамблей сложных сигналов с учетом новых подходов будет рассмотрено в следующих главах.

В современных гидролокационных системах общий подход в применении ЦОС аналогичен как и в радиолокации, в частности, при проектировании согласованных фильтров. Однако существенной особенностью применения ЦОС в гидролокации являются задачи оценки свойств водной среды и ее влияния на обработку сигналов [83]. Другой важной задачей является картографирование и профилирование дна. Задачи пассивной гидролокации осуществимы за счет подводного наблюдения путем проведения спектрального анализа. При активной гидролокации возникают аналогичные задачи по обнаружению цели и измерению дальности до нее, доплеровского смещения, сопровождению, навигации, связи с объектами. При этом наряду с решением конкретных задач достаточно часто требуется решение задач гидролокации, связанных с моделированием распространения звуковых волн и влиянием этого распространения на обработку сигналов, в том числе на сигналы с большой базой.

Другой важной областью применения ЦОС стала геофизика [83]. При этом методы обработки сигналов привязаны к поиску новых месторождений нефти и минерального сырья. В данной области чаще находят применение цифровые параметрические модели, так как существует связь между эффектами, получаемыми в результате прохождения колебаний в земной коре и параметрами модели.

Создание моделей является систематизированным объединением теоретических и эмпирических сведений в одну общую структуру. При этом важным методом является применение прогнозирующей инверсной свертки для обработки сейсмограмм. Отметим, что прогнозирующая инверсная свертка означает свертку записи сигнала, полученного на выходе некоторого искажающе-

го устройства (фильтра) с оператором, обратным к характеристике фильтра, то есть с оператором ошибок предсказания. Иногда подобная информация носит название инверсной фильтрации с предсказанием.

Этот метод оказался полезным при обработке наземных и морских сейсмических измерений, когда обрабатываемые сейсмические сигналы испытывали реверберацию.

Модификацией метода инверсной свертки при более детальном учете параметров слоистой структуры, является метод динамической инверсной свертки. Отметим, что достаточно эффективно применение методов гомоморфной фильтрации. Также достаточно эффективно используются в геофизике методы, основанные на применении многомерных многоканальных устройств обработки.

Отметим, что в последнее время достаточно интенсивно ЦОС стала находить применение и в биологических исследованиях [145, 172]. В частности, в [172] рассматривается применение метода синтезированной апертуры антенны для повышения угловой разрешающей способности при ультразвуковом зондировании сердечной мышцы при проведении медицинского обследования.

#### 19.6. Выводы

Рассмотрены два класса МВС – систолические и с программируемой архитектурой. Показаны более широкие возможности МВС ПА при решении задач ЦОС. В свою очередь, МВС ПА могут быть реализованы либо на основе набора МПЭ, структура каждого из которых также программируется в соответствии с той или иной задачей, либо на основе систолических ячеек, структуры которых неизменны, а требуемые функции реализуются путем программирования систолических ячеек. Рассмотренная МВС ПВ СЯ обладает тем достоинством, что обработка радиосигналов осуществляется путем использования аппаратно-программного принципа организации вычислений. Это позволяет получать высокую вычислительную мощность за счет одновременного использования преимуществ, свойственных МВС ПА, и достижений микроэлектроники, позволяющих получать СБИС в виде отдельного микропроцессора систолической архитектуры, который может использоваться как отдельная ячейка вычислительной системы.

Проведенный обзор областей применения ЦОС показал, что в настоящее время нет препятствий для использования рассмотренных классов МВС при решении различных задач. При этом наиболее эффективными областями применения МВС являются те из них, где используются сложные алгоритмы обработки и одновременно требуется обрабатывать процессы, полоса которых может превышать в заданное число раз быстродействие используемых цифровых функциональных узлов.

Отметим еще одну важную тенденцию развития МВС. В течение длительного времени стоимость хранения одного бита информации в памяти ЦВМ была существенно выше стоимости выполнения какой-либо операции, производимой над этой информацией. В последнее время наблюдается быстрое падение стоимости хранения бита информации и относительно более медленное падение стоимости выполнения операции над одним битом этой информации. Это привело к тому, что стоимость выполнения операции над битом информации стала существенно превышать стоимость его хранения.

Поэтому для ряда специальных задач появилась возможность разработать алгоритмы ЦОС, которые за счет существенного проигрыша в затратах оборудования на хранение информации, позволяют получить выигрыши в снижении количества операций над этой информацией, что, в конечном итоге, позволяет существенно повысить производительность МВС.

Таким примером может служить замена рекурсивной ячейки  $N$ -го порядка с одинаковыми (единичными) коэффициентами, рекурсивной (синусной), с коэффициентом обратной связи равным единице. При этом режим работы «скользящее» окно обеспечивается за счет дополнительной организации операции вычитания  $N$  отсчетов из результатов вычислений, поступающих на обработку с выхода дополнительно введенной памяти.

Отметим еще одно важное обстоятельство. В последнее время появились микропроцессоры ЦОС супергарвардской архитектуры, т.е. такой архитектуры, у которой, помимо отдельной памяти для хранения данных и программы, имеется отдельные шины и порты ввода и вывода информации. Следовательно, могут быть МВС с новыми видами коммутационных структур, что приведет к их более высокой производительности.

## 20. СИНТЕЗ И АНАЛИЗ АНСАМБЛЕЙ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ

### 20.1. Вводные замечания

Как известно, основной характеристикой сигналов, применяемых в радиолокации, являются их функции неопределенности (ФН). В течение длительного времени для задач импульсной радиолокации ограничения, накладываемые используемой элементной базой, привели к постулату раздельности внутри- и межпериодной обработок [127, 173, 174].

Появление способов, алгоритмов и устройств, использующих возможности, предоставляемые ЦОС, позволило генерировать и обрабатывать сложные радиолокационные сигналы в реальном масштабе времени [1, 5, 8, 20, 25, 26, 34, 83].

В свою очередь, это стимулировало появление методов, позволяющих получать ансамбли сложных сигналов (СС) с заданными свойствами и позволило отказаться от постулата раздельности внутри- и межпериодной обработок [133, 137, 138, 175 – 178].

Как следствие, появилась возможность получения и применения ансамблей СС  $(l, k)$  порядка. Под ансамблем СС  $(l, k)$  порядка будем понимать последовательность, состоящую из  $l$  импульсов, причем в каждый момент времени внутри каждого импульса одновременно присутствует  $k$  значений частоты, причем для каждой  $k$ -й частоты используется свой закон внутримпульсной модуляции, который зависит от законов внутримпульсной модуляции всех других частот во всей последовательности [179].

Очевидно, что сигнал вида  $(l, k)$  представляет собой  $k$ -частотный одиночный радиопульс, у которого законы изменения каждой частоты во времени зависят от законов изменения каждой другой частоты.

В свою очередь, сигнал вида  $(l, 1)$  представляет собой ансамбль, состоящий из  $l$  одночастотных радиосигналов, каждый из которых имеет свой

закон внутримпульсной модуляции, зависящий от законов внутримпульсной модуляции других радиосигналов в их последовательности.

Следует отметить важное обстоятельство. При достаточно большом количестве частот внутри каждого импульса, процесс на выходе радиопередаточного устройства за время длительности этого сигнала представляет собой случайный процесс вида «белый» шум. Это, в ряде случаев, бывает неприемлемым в силу того, что существенно увеличивается влияние пик-фактора на конечный результат обработки и, одновременно, понижается средняя мощность радиопередаточного устройства.

Поэтому большой интерес представляет рассмотрение ансамблей радиосигналов  $(l, 1)$  порядка обладающие постоянной амплитудой, что позволяет более эффективно использовать мощностные характеристики радиопередаточного устройства и которые и будут подробно рассматриваться в дальнейшем. При этом при обозначении порядка ансамбля сигналов будет описываться только их количество в последовательности, например,  $l = N$ , или просто  $N$ .

### 20.2. Синтез и анализ ансамблей радиолокационных фазоманипулированных сигналов с внутрдискретной модуляцией

Рассмотренные в работах [12, 26] методы синтеза ансамблей кодирующих последовательностей, позволяют получать  $N$  ФМн сигналов  $x_i(t)$ , каждый из которых обладает ФН  $\chi_i(t, F)$ , описываемой выражением (16.36), и которые являются взаимодополняющими друг для друга.

Введенное понятие в виде суммарной ФН  $\chi(t, F)$ , описываемой выражением (16.37), позволило с единых позиций рассматривать характеристики ансамблей СС. При этом основной особенностью суммарной ФН таких сигналов является то, что в ней отсутствуют БЛ на плоскости  $(t, F)$  за исключением области  $\pm \tau_0$  прилегающей к точке  $\tau_0$ , описываемое выражением (16.38), и которое получило название «квазиидеальной» ФН [12, 135, 136, 143].

Непосредственное применение ансамблей ФМн сигналов, каждый из которых состоит из  $N$  дискретов, в когерентно-импульсных радиолокаторах обнаружения со сжатием импульсов, требует наличия информации о начальной фазе каждого из  $N$  принимаемых отраженных сигналов ансамбля.

Последнее обстоятельство существенно затрудняет техническую реализацию устройств обработки таких ансамблей СС.

Рассмотрим метод синтеза ансамблей СС на основе ФМн сигналов при обработке которых нет необходимости иметь информацию о начальной фазе каждого принимаемого отраженного сигнала.



Пусть имеется ансамбль из  $N$  радиолокационных ФМн сигналов, который может быть представлен в виде ортогональной матрицы размером  $N \times N$ , каждая строка которой описывает парциальный ФМн сигнал, состоящий из  $N$  дискретов без внутридискретной модуляции [135, 136]

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \dots & x_1(N) \\ x_2(1) & x_2(2) & \dots & x_2(N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_N(1) & x_N(2) & \dots & x_N(N) \end{bmatrix}. \quad (20.1)$$

Набор импульсных характеристик СФ для этого ансамбля сигналов можно представить в виде столбцов матрицы  $\mathbf{H}$  размером  $N \times N$ , которая имеет вид

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1(1) & h_2(1) & \dots & h_N(1) \\ h_1(2) & h_2(2) & \dots & h_N(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1(N) & h_2(N) & \dots & h_N(N) \end{bmatrix}. \quad (20.2)$$

При использовании ортогональных кодирующих последовательностей с единичными элементами, описанными в [12], матрица откликов

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} \quad (20.3)$$

будет диагональной матрицей, элементы главной диагонали которой соответствуют откликам фильтров с импульсными характеристиками  $h_i(j)$ ,  $i, j = \{1, \overline{N}\}$  на поступающие на их входы сигналы  $x_i(j)$ ,  $i, j = \{1, \overline{N}\}$  и которые совпадают со значениями функции неопределенности в точке  $(\tau, F) = (0, 0)$  для каждого сигнала.

Очевидно, что сумма элементов главной диагонали (т.е. след матрицы  $\mathbf{Y}$ ) будет равна величине, пропорциональной  $N^2$ . Как показано в [135], рассмотренный случай будет иметь место, когда  $\mathbf{H} = \mathbf{X}^T$ , т.е. матрицы ортогональны друг другу.

Как указывалось, недостатком такого ансамбля сигналов является необходимость иметь информацию о начальной фазе каждого ФМн сигнала из ансамбля.

Во избежание указанного недостатка введем внутридискретную частотную модуляцию (ЧМ), закон изменения которой определяется знаком кода ФМн сигнала [143].

Положим также, что обработка полученного таким образом ансамбля радиолокационных сигналов с внутридискретной ЧМ распадается на три этапа: внутридискретную, внутримпульсную и межпериодную.

Для получения информации о знаке кода ФМн сигнала будем полагать, что каждый поступающий на обработку ФМн сигнал с внутридискретной

ЧМ подается на систему фильтров, импульсные характеристики которых определяются модулирующими функциями дискретов ФМн сигнала и которые в дальнейшем будут называться согласованными фильтрами дискретов (СФД). В частности, при использовании ФМн сигналов с двумя состояниями фазы  $(0, \pi)$  количество законов внутридискретной модуляции будет равно двум.

В этом случае характеристики модулирующих функций для положительных и отрицательных значений дискретов должны отвечать следующим требованиям:

- иметь равные полосы занимаемых частот;
- быть ортогональными друг другу, т.е.  $\int_0^{\tau_0} \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0$  при  $i \neq j$ ,

где  $\tau_0$  – длительность дискрета;

- иметь одинаковые изменения при одинаковых знаках и величине доплеровского сдвига частоты  $F_D$ ;
- изменения ФН для положительных и отрицательных значений дискретов при  $F_D \neq 0$  должны быть зеркально-симметричными в каждой точке оси  $F$ , проходящей через точку  $\tau = 0$ .

Выделяя после первого этапа обработки на выходах соответствующих СФД отклики отдельных дискретов и присваивая им знаки кодов соответствующего ФМн сигнала с внутридискретной модуляцией, можно записать ансамбль СС в виде матрицы размером  $N \times (2N+1)$  [143]

$$\mathbf{X}_M = \begin{bmatrix} \Delta_1^+(1) & x_1(1) & \Delta_1^+(1)+\Delta_1^+(2) & x_1(2) & \dots & \Delta_1^+(N-1)+\Delta_1^+(N) & x_1(N) & \Delta_1^+(N) \\ \Delta_2^+(1) & x_2(1) & \Delta_2^+(1)+\Delta_2^+(2) & x_2(2) & \dots & \Delta_2^+(N-1)+\Delta_2^+(N) & x_2(N) & \Delta_2^+(N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_N^+(1) & x_N(1) & \Delta_N^+(1)+\Delta_N^+(2) & x_N(2) & \dots & \Delta_N^+(N-1)+\Delta_N^+(N) & x_N(N) & \Delta_N^+(N) \end{bmatrix}, \quad (20.4)$$

где  $x_n(k) = (x_n(k)_{\max} - \delta)$  – отсчеты сигналов, знаки которых определяются кодом ФМн последовательности и совпадают со знаками сигналов  $x_i(j)$ , описываемых в (20.1);  $x_n(k)_{\max}$  – максимальный отклик кода ФМн сигнала на выходе СФД;  $\delta$  – величина рассогласования модулирующей функции дискрета с импульсной характеристикой СФД, которая зависит от доплеровского сдвига в принимаемом сигнале, связанным с движением цели, который полагается величиной постоянной на обрабатываемом временном интервале;  $\Delta_n^+(k)$  и  $\Delta_n^-(k)$  – БЛ, окружающие слева и справа главные пики на выходах СФД соответственно, уровни и знаки которых определяются значением кода дискретов;  $1 \leq k \leq N$ ;  $1 \leq n \leq N$ .

Тогда набор импульсных характеристик СФ для каждой из последовательностей из матрицы  $X_M$  (20.4) может быть записан в виде матрицы  $H_M$  размером  $(2N+1) \times N$

$$H_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1(1) & h_2(1) & \dots & h_N(1) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1(2) & h_2(2) & \dots & h_N(2) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1(N) & h_2(N) & \dots & h_N(N) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (20.5)$$

где величины  $h_n(k)$  совпадают с соответствующими значениями  $h_i(j)$  в выражении (20.2), а нули соответствуют местоположению БЛ в сжатых дискретах.

Запишем результат второго этапа обработки ансамблей сигналов, заключающийся в прохождении соответствующих сигналов описываемых матрицей  $X_M$  (20.4) через СФ с импульсными характеристиками определяемыми матрицей  $H_M$  (20.5) в виде матрицы  $K$  размерностью  $N \times (4N+1)$

$$K = \quad (20.6)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & w_1^*(1) & V_1(1) & w_1^*(1)+w_2^*(1) & \dots & V_{2l} & \dots & w_{N-1}^*(1)+w_N^*(1) & V_N(1) & w_N^*(1) & 0 \\ 0 & w_1^*(2) & V_1(2) & w_1^*(2)+w_2^*(2) & \dots & V_{2l} & \dots & w_{N-1}^*(2)+w_N^*(2) & V_N(2) & w_N^*(2) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & w_1^*(N) & V_1(N) & w_1^*(N)+w_2^*(N) & \dots & V_{2l} & \dots & w_{N-1}^*(N)+w_N^*(N) & V_N(N) & w_N^*(N) & 0 \end{bmatrix}$$

где  $V_n(k)$  – отклик СФ ФМи сигнала на главные пики  $x_n(k)$ ;  $w_n^*(k)$  и  $w_n^{\dagger}(k)$  – БЛ сжатых дискретов, которые являются откликами СФ ФМи сигнала с импульсной характеристикой  $h_n(k)$  из матрицы (20.5) на БЛ  $\Delta_n^*(k)$  и  $\Delta_n^{\dagger}(k)$  из (20.4) соответственно;  $V_{2l}$  – главный пик сжатого ФМи-сигнала. Отметим, что уровни и знаки БЛ сжатых дискретов зависят от знака кода ФМи сигнала.

Полученную матрицу откликов  $K$  можно представить в виде суммы матриц

$$K = K_{odd} + K_{even}$$

$$K_{odd} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & V_1(1) & 0 & \dots & V_{2l} & \dots & 0 & V_N(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_1(2) & 0 & \dots & V_{2l} & \dots & 0 & V_N(2) & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & V_1(N) & 0 & \dots & V_{2l} & \dots & 0 & V_N(N) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (20.7)$$

$$K_{even} = \begin{bmatrix} 0 & w_1^*(1) & 0 & w_1^*(1)+w_2^*(1) & \dots & 0 & \dots & w_{N-1}^*(1)+w_N^*(1) & 0 & w_N^*(1) & 0 \\ 0 & w_1^*(2) & 0 & w_1^*(2)+w_2^*(2) & \dots & 0 & \dots & w_{N-1}^*(2)+w_N^*(2) & 0 & w_N^*(2) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & w_1^*(N) & 0 & w_1^*(N)+w_2^*(N) & \dots & 0 & \dots & w_{N-1}^*(N)+w_N^*(N) & 0 & w_N^*(N) & 0 \end{bmatrix}. \quad (20.8)$$

При этом четные столбцы матрицы  $K_{odd}$  состоят из нулей, а нечетные столбцы представляют собой отклики СФ на прохождение соответствующих ФМи сигналов. Четные столбцы второй матрицы  $K_{even}$  состоят из значений, соответствующих БЛ сжатых дискретов, а ее нечетные столбцы равны нулю.

Сумма откликов на выходах отдельных СФ, соответствующая третьему этапу обработки, описывается суммарной ФН ансамбля ФМи сигналов и может быть представлена в виде

$$\chi_M(\tau, F) = \sum_{i=1}^N \chi_{iM}(\tau, F), \quad (20.9)$$

где  $\chi_{iM}(\tau, F)$  – ФН, описываемые строками матрицы (20.6).

Видно, что суммирование столбцов в матрице (20.7) приводит к выражению (20.9), что позволяет получить свойства, описанные ранее. Отметим, что в диапазоне  $\pm \tau_\Delta$  относительно точки  $\tau = 0$  будет находиться сумма основных пиков сжатых дискретов и их БЛ.

Очевидно, что в общем случае суммирование столбцов матрицы  $K_{even}$  в (20.8) не приводит к компенсации БЛ сжатых дискретов. В результате в суммарной ФН на плоскости  $(\tau, F)$  в соответствующих областях длительностью  $\tau_\Delta$ , где расположены эти БЛ, не происходит их полной компенсации.

Для ликвидации указанного недостатка можно использовать свойство, в соответствии с которым умножение строк и столбцов ортогональной матрицы на  $-1$  сохраняет свойство ортогональности.

Для подавления БЛ сжатых дискретов в тех областях суммарной ФН (20.9), где они находятся, дополнительно введем ансамбль сигналов, инверсный относительно ансамбля сигналов (20.1), полученный умножением строк на  $-1$ .

Будем полагать, что после первого этапа обработки с выходов СФД аналогично будут появляться отгибающие отдельных дискретов, величины пиков и знаки которых будут соответствовать кодам ФМи сигналов, имеющих соответствующие БЛ, прилегающие к их пикам. В этом случае матрица инверсного ансамбля сигналов  $\bar{X}_M$  размерностью  $N \times (2N+1)$  примет вид

$$\bar{X}_M = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_1^+(1) & \bar{x}_1(1) & \bar{\Delta}_1^+(1)+\bar{\Delta}_1^+(2) & \bar{x}_1(2) & \dots & \bar{\Delta}_1^+(N-1)+\bar{\Delta}_1^+(N) & \bar{x}_1(N) & \bar{\Delta}_1^+(N) \\ \bar{\Delta}_2^+(1) & \bar{x}_2(1) & \bar{\Delta}_2^+(1)+\bar{\Delta}_2^+(2) & \bar{x}_2(2) & \dots & \bar{\Delta}_2^+(N-1)+\bar{\Delta}_2^+(N) & \bar{x}_2(N) & \bar{\Delta}_2^+(N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\Delta}_N^+(1) & \bar{x}_N(1) & \bar{\Delta}_N^+(1)+\bar{\Delta}_N^+(2) & \bar{x}_N(2) & \dots & \bar{\Delta}_N^+(N-1)+\bar{\Delta}_N^+(N) & \bar{x}_N(N) & \bar{\Delta}_N^+(N) \end{pmatrix} \quad (20.10)$$

Для получения такой системы сигналов необходимо, чтобы закон внутрисигнальной модуляции каждого дискрета в системе  $X_M$  изменился на противоположный.

Матрица импульсных характеристик размерностью  $(2N+1) \times N$  набора СФ для этого ансамбля сигналов при условии, что отсчеты импульсной характеристики матрицы  $H_M$  (20.5) будут умножены на  $-1$ , т.е.  $h_n(k) = -\bar{h}_n(k)$ , примет вид

$$\bar{H}_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{h}_1(1) & \bar{h}_2(1) & \dots & \bar{h}_N(1) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{h}_1(2) & \bar{h}_2(2) & \dots & \bar{h}_N(2) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{h}_1(N) & \bar{h}_2(N) & \dots & \bar{h}_N(N) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (20.11)$$

Отклики на сигналы  $\bar{X}_M$ , описываемые матрицей (20.10), на выходах СФ, набор импульсных характеристик которых описывается матрицей  $\bar{H}_M$  (20.11), после второго этапа обработки могут быть представлены в виде матрицы  $\bar{K}$  размерностью  $N \times (4N+1)$

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{w}_1^+(1) & \bar{V}_1(1) & \bar{w}_1^+(1)+\bar{w}_2^+(1) & \dots & V_{II} & \dots & \bar{w}_{N-1}^+(1)+\bar{w}_N^+(1) & \bar{V}_N(1) & \bar{w}_N^+(1) & 0 \\ 0 & \bar{w}_1^+(2) & \bar{V}_1(2) & \bar{w}_1^+(2)+\bar{w}_2^+(2) & \dots & V_{II} & \dots & \bar{w}_{N-1}^+(2)+\bar{w}_N^+(2) & \bar{V}_N(2) & \bar{w}_N^+(2) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \bar{w}_1^+(N) & \bar{V}_1(N) & \bar{w}_1^+(N)+\bar{w}_2^+(N) & \dots & V_{II} & \dots & \bar{w}_{N-1}^+(N)+\bar{w}_N^+(N) & \bar{V}_N(N) & \bar{w}_N^+(N) & 0 \end{pmatrix} \quad (20.12)$$

Из сравнения (20.6) с (20.12) видно, что главные пики  $V_{II}$  имеют одинаковые знаки.

Разбивая матрицу (20.12) так как было описано выше, получаем

$$\bar{K} = \bar{K}_{odd} + \bar{K}_{even} \quad (20.13)$$

$$\bar{K}_{odd} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{V}_1(1) & 0 & \dots & V_{II} & \dots & 0 & \bar{V}_N(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{V}_1(2) & 0 & \dots & V_{II} & \dots & 0 & \bar{V}_N(2) & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \bar{V}_1(N) & 0 & \dots & V_{II} & \dots & 0 & \bar{V}_N(N) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20.13)$$

$$\bar{K}_{even} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{w}_1^+(1) & 0 & \bar{w}_1^+(1)+\bar{w}_2^+(1) & \dots & 0 & \dots & \bar{w}_{N-1}^+(1)+\bar{w}_N^+(1) & 0 & \bar{w}_N^+(1) & 0 \\ 0 & \bar{w}_1^+(2) & 0 & \bar{w}_1^+(2)+\bar{w}_2^+(2) & \dots & 0 & \dots & \bar{w}_{N-1}^+(2)+\bar{w}_N^+(2) & 0 & \bar{w}_N^+(2) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \bar{w}_1^+(N) & 0 & \bar{w}_1^+(N)+\bar{w}_2^+(N) & \dots & 0 & \dots & \bar{w}_{N-1}^+(N)+\bar{w}_N^+(N) & 0 & \bar{w}_N^+(N) & 0 \end{pmatrix} \quad (20.14)$$

Матрица (20.13) имеет такие же свойства, как и матрица (20.7). Их сравнение показывает, что значения, описывающие БЛ сжатых ФМи сигналов и находящиеся на одних и тех же позициях в матрицах, одинаковы и противоположны по знаку, а значения отклики, соответствующие главным пикам сжатых сигналов, имеют одинаковые величины и знаки. При суммировании одноименных столбцов матриц (20.7) и (20.13) выполняется условие

$$K_{\Sigma odd} = K_{odd} + \bar{K}_{odd} = \sum_{i=1}^{2N} \chi_{i odd M}(\tau, F)$$

Сравнение матриц (20.8) и (20.14) показывает, что значения БЛ сжатых дискретов, находящихся на одноименных позициях в этих матрицах одинаковы и противоположны по знаку. Следовательно, суммирование откликов, описываемых матрицами (20.8) и (20.14), позволяет компенсировать БЛ сжатых дискретов, появление которых связано с использованием внутрисигнальной модуляции

$$K_{\Sigma \delta} = K_{even} + \bar{K}_{even} = \sum_{i=1}^{2N} \chi_{i even M}(\tau, F) = 0$$

В результате третьего этапа обработки суммарная ФН на всей плоскости  $(\tau, F)$  описывается выражением

$$K_{\Sigma} = K_{\Sigma odd} + K_{\Sigma \delta} = \sum_{i=1}^{2N} \chi_{i odd M}(\tau, F) + \sum_{i=1}^{2N} \chi_{i even M}(\tau, F) = \sum_{i=1}^{2N} \chi_{i M}(\tau, F) \begin{cases} \neq 0 & \text{при } |\tau| \leq \tau_{\delta} \\ = 0 & \text{при } \tau_{\delta} < |\tau| \leq (N-1) \tau_{\delta} \end{cases} \quad (20.15)$$

Таким образом, в используемых системах сигналов  $X_M$  и  $\bar{X}_M$  компенсация БЛ, обусловленная свойствами парциального ФМн сигнала, осуществляется за счет свойства соответствующей автокорреляционной функции ФМн сигналов без внутридискретной модуляции, а использование инверсной системы ФМн сигналов  $\bar{X}_M$  позволяет компенсировать БЛ сжатых дискретов  $X_M$ . Это позволяет получить «квазиидеальную» суммарную ФН.

### 20.3. Обработка ансамблей радиолокационных фазоманипулированных сигналов на основе D-кодов

Рассмотрим использование изложенного метода на основе применения ансамбля ФМн сигналов с элементами +1 и -1, описываемых при помощи модифицированных матриц Адамара [143].

Известна форма записи системы ФМн сигналов при помощи модифицированных матриц Адамара, которая описывается, например, символическим равенством (16.21).

Видно, что ансамбль ФМн сигналов на основе четырехэлементных D-кодов с внутридискретной модуляцией, прошедших через систему СФД, соответствующую системе кодов, описываемых модифицированной матрицей Адамара  $D_4^{2ad3od} = H_4^{2od3od}$ , с учетом (20.4) можно записать в виде матрицы  $X_D$  размером  $4 \times 9$  [143]

$$X_D = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 + \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 - \Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_2 + \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 \\ \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 - \Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_2 + \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 + \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 \\ -\Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_2 + \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 + \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 + \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 \\ \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 + \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 + \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 - \Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_1 \end{bmatrix} \quad (20.16)$$

где  $\Delta_I$  и  $\Delta_{II}$  – главные пики сжатых дискретов, имеющие противоположные направления частотно-временных зависимостей на плоскости  $(\tau, F)$  и знаки которых соответствуют знакам используемого ФМн кода;  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  – левые БЛ сжатых дискретов;  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  – правые БЛ сжатых дискретов. Знаки БЛ совпадают со знаками главных пиков  $\Delta_I$  и  $\Delta_{II}$  соответственно.

Импульсные характеристики СФ, учитывая (20.5), запишутся в виде матрицы  $H_D$  размером  $9 \times 4$

$$H_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20.17)$$

Результаты прохождение ансамбля ФМн сигналов с внутридискретной ЧМ (20.16) через соответствующие СФ, описываемые (20.17), аналогично (20.6), запишутся в виде матрицы  $K_D$  размером  $4 \times 17$

$$K_D = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & \Delta_I & w_1 & 0 & -w_2 \\ 0 & w_1 & \Delta_I & w_1 + w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 - w_2 \\ 0 & -w_2 & -\Delta_{II} & -w_2 - w_2 + w_1 & -\Delta_{II} + \Delta_I & 2w_1 + w_1 - w_2 - w_2 \\ 0 & -w_1 & -\Delta_I & -w_1 & 0 & w_1 \\ -\Delta_{II} & 3w_1 + w_2 - w_2 & 3\Delta_I + \Delta_{II} & 3w_1 - w_2 + w_2 & -\Delta_{II} \\ -\Delta_{II} & 3w_1 + w_2 - w_2 & 3\Delta_I + \Delta_{II} & 3w_1 - w_2 + w_2 & -\Delta_{II} \\ 2\Delta_I - \Delta_{II} & 3w_1 + 2w_1 + w_2 - w_2 & 3\Delta_I + \Delta_{II} & w_1 + 3w_1 + w_2 & \Delta_I \\ \Delta_I & 3w_1 + w_1 + w_2 & 3\Delta_I + \Delta_{II} & 2w_1 + 3w_1 - w_2 + w_2 & 2\Delta_I - \Delta_{II} \\ w_1 - w_2 - w_2 & -\Delta_{II} + \Delta_I & -w_2 + w_1 + w_1 & \Delta_I & w_1 & 0 \\ -w_2 & 0 & w_1 & \Delta_I & w_1 & 0 \\ w_1 & 0 & -w_1 & -\Delta_I & -w_1 & 0 \\ 2w_1 + w_1 - w_2 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 - w_2 & -\Delta_{II} & -w_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Суммируя столбцы, получаем матрицу-строку  $K_{D\Sigma}$  размерности  $1 \times 17$

$$K_{D\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 & w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 + w_1 - 2w_2 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ \Rightarrow 3w_1 - 3w_2 + 2w_1 - 2w_2 & 3\Delta_I - 3\Delta_{II} & 12w_1 + 3w_1 + 4w_2 - 3w_2 & 12\Delta_I + 4\Delta_{II} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3w_1 + 12w_1 - 3w_2 + 4w_2 \quad 3\Delta_I - 3\Delta_{II} \quad 2w_1 + 3w_1 - 2w_2 - 3w_2 \quad 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_1 + 2w_1 - w_2 - 2w_2 \quad \Delta_I - \Delta_{II} \quad w_1 - w_2 \quad 0 \quad (20.18)$$

Видно, что на четных позициях по оси  $\tau$  имеются отклики, связанные с наличием БЛ сжатых дискретов. Чтобы устранить эти БЛ, аналогично изложенному ранее, введем инверсный ансамбль ФМн сигналов, который можно записать в виде матрицы  $\bar{X}_D$  размером  $4 \times 9$

$$\bar{X}_D = \begin{bmatrix} -\Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_2 - \Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_2 + \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 - \Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_2 \\ -\Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_2 + \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 - \Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_2 - \Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_2 \\ \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 - \Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_2 - \Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_2 - \Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_2 \\ -\Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_2 - \Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_2 - \Delta_2 & -\Delta_{II} & -\Delta_2 + \Delta_1 & \Delta_I & \Delta_1 \end{bmatrix} \quad (20.19)$$

Тогда импульсные характеристики СФ запишутся в виде матрицы  $\bar{H}_D$  размером  $9 \times 4$

$$\bar{H}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20.20)$$

Результаты прохождения инверсного ансамбля ФМн сигналов с внутридискретной ЧМ (20.19) через соответствующие СФ, описываемые (20.20), запишем в виде матрицы  $\bar{K}_D$  размером  $4 \times 17$

$$\bar{K}_D = \begin{bmatrix} 0 & w_2 & \Delta_{II} & w_2 & 0 & -w_1 \\ 0 & w_2 & \Delta_{II} & w_2 + w_2 - w_1 & \Delta_{II} - \Delta_I & w_2 - w_1 - w_1 \\ 0 & -w_1 & -\Delta_I & -w_1 - w_1 + w_2 & -\Delta_I + \Delta_{II} & 2w_2 + w_2 - w_1 - w_1 \\ 0 & -w_2 & -\Delta_{II} & -w_2 & 0 & w_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\Delta_I & 3w_2 + w_1 - w_1 & 3\Delta_{II} + \Delta_I & 3w_2 - w_1 + w_1 & -\Delta_I \\ -\Delta_I & 3w_2 + w_1 - w_1 & 3\Delta_{II} + \Delta_I & 3w_2 - w_1 + w_1 & -\Delta_I \\ 2\Delta_{II} - \Delta_I & 3w_2 + 2w_2 + w_1 - w_1 & 3\Delta_{II} + \Delta_I & w_2 + 3w_2 + w_1 & \Delta_{II} \\ \Delta_{II} & 3w_2 + w_2 + w_1 & 3\Delta_{II} + \Delta_I & 2w_2 + 3w_2 - w_1 + w_1 & 2\Delta_{II} - \Delta_I \\ w_2 - w_1 - w_1 & -\Delta_I + \Delta_{II} & -w_1 + w_2 + w_2 & \Delta_{II} & w_2 & 0 \\ -w_1 & 0 & w_2 & \Delta_{II} & w_2 & 0 \\ w_2 & 0 & -w_2 & -\Delta_{II} & -w_2 & 0 \\ 2w_2 + w_2 - w_1 - w_1 & \Delta_{II} - \Delta_I & w_2 - w_1 - w_1 & -\Delta_I & -w_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Суммируя столбцы, получаем матрицу-строку  $\bar{K}_{DS}$  размерностью  $1 \times 17$

$$\bar{K}_{DS} = [0 \quad w_2 - w_1 \quad \Delta_{II} - \Delta_I \quad 2w_2 + w_2 - 2w_1 - w_1 \quad 2\Delta_{II} - 2\Delta_I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3w_2 - 3w_1 + 2w_2 - 2w_1 \quad 3\Delta_{II} - 3\Delta_I \quad 12w_2 + 3w_2 + 4w_1 - 3w_1 \quad 12\Delta_{II} + 4\Delta_I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3w_2 + 12w_2 - 3w_1 + 4w_1 \quad 3\Delta_{II} - 3\Delta_I \quad 2w_2 + 3w_2 - 2w_1 - 3w_1 \quad 2\Delta_{II} - 2\Delta_I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_2 + 2w_2 - w_1 - 2w_1 \quad \Delta_{II} - \Delta_I \quad w_2 - w_1 \quad 0] \quad (20.21)$$

Аналогично описанному выше видно, что на четных позициях матрицы-строки (20.21) по оси  $\tau$  имеются отклики, связанные с наличием БЛ сжатых дискретов, величины которых равны величинам БЛ, расположенным на одноименных позициях матрицы-строки (20.18), но имеют противоположные знаки. Тогда, суммируя столбцы (20.18) и (20.21), получаем матрицу-строку размером  $1 \times 17$

$$K_{SD} = K_{DS} + \bar{K}_{DS} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 16w_1 + 16w_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\Delta_I + 16\Delta_{II} \quad 16w_1 + 16w_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Следовательно, возможно использование D-кодов в качестве модулирующих функций радиолокационных ФМн сигналов. Это позволяет получить подавление БЛ на всей плоскости  $(\tau, F)$ , кроме области  $\pm \tau_0$  относительно точки  $\tau = 0$ . Очевидно, что предложенный метод синтеза ансамбля ФМн сигналов с внутридискретной модуляцией каждого дискрета соответствующими ЧМ, законы изменения которых определяются знаком кода, может быть применен и в случае использования модифицированных матриц Адамара других размеров.

#### 20.4. Влияние искажающих факторов на обработку ансамблей радиолокационных фазоманипулированных сигналов с внутريدискретной модуляцией

20.4.1. Выше рассматривалась обработка ансамбля радиолокационных ФМи сигналов с внутريدискретной модуляцией при условии, что преобразование их квадратурных составляющих в цифровую форму осуществлялось многоразрядными АЦП, у которых количество разрядов было выбрано таким большим, что шумами квантования можно было пренебречь. В реальных условиях работы при приеме сигналов с максимальных дальностей и при отношениях  $P_c/P_{ш} < 1$  может возникнуть ситуация, когда количество уровней квантования, используемых для преобразования сигнала, невелико. Предельным случаем является ситуация, когда уровень принимаемой аддитивной смеси сравним с величиной младшего разряда АЦП. В этом случае задача обработки принимаемого ансамбля СС может быть сведена к обработке сигналов, подвергающихся бинарному квантованию. Подобная задача рассматривалась в работах [180 – 185].

Как было показано в этих работах, система идеальный ограничитель – полосовой фильтр обладает линейными свойствами при отношениях  $P_c/P_{ш} \ll 1$ . Тогда поступающие на обработку сигналы могут быть представлены в виде

$$\text{sign}x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } x(t) > 0, \\ -1 & \text{при } x(t) < 0. \end{cases} \quad (20.22)$$

При этом потери в отношении сигнал/шум на выходе устройства, обрабатывающего такой сигнал, составляют приблизительно 1 дБ [186].

С другой стороны, как показано в [183], корреляционная функция на выходе идеального ограничителя с точностью до постоянного множителя совпадает с корреляционной функцией на входе ограничителя, причем фазовая структура сигнала сохраняется.

Рассмотрим влияние ограничителя на характеристики суммарной ФН, т.е. рассмотрим случай, когда осуществляется обработка ансамбля ФМи сигналов с внутريدискретной ЧМ, которые подвергаются бинарному квантованию при отсутствии шума (случай  $P_c/P_{ш} \gg 1$ ) [185].

Тогда с учетом изложенного выше ансамбль ФМи сигналов на выходе блока СФД, используемого для обработки многоразрядных отсчетов и на вход которого поступает бинарно-квантованный сигнал (20.22), можно представить в виде

$$\begin{aligned} X_{\text{Могр}} = & \begin{bmatrix} \alpha \Delta_1^*(1) & \alpha x_1(1) & \alpha \Delta_1^*(1) + \alpha \Delta_1^*(2) & \alpha x_1(2) & \dots \\ \alpha \Delta_2^*(1) & \alpha x_2(1) & \alpha \Delta_2^*(1) + \alpha \Delta_2^*(2) & \alpha x_2(2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha \Delta_N^*(1) & \alpha x_N(1) & \alpha \Delta_N^*(1) + \alpha \Delta_N^*(2) & \alpha x_N(2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \alpha \Delta_1^*(N-1) + \alpha \Delta_1^*(N) & \alpha x_1(N) & \alpha \Delta_1^*(N) & \dots \\ \dots & \alpha \Delta_2^*(N-1) + \alpha \Delta_2^*(N) & \alpha x_2(N) & \alpha \Delta_2^*(N) & \dots \\ \dots & \alpha \Delta_N^*(N-1) + \alpha \Delta_N^*(N) & \alpha x_N(N) & \alpha \Delta_N^*(N) & \dots \end{bmatrix} = \alpha X_M, \quad (20.23) \end{aligned}$$

где  $\alpha$  – коэффициент, определяющий изменение величины корреляционной функции входного процесса при его бинарном квантовании,  $X_M$  – матрица, определяемая выражением (20.4).

При прохождении ансамбля сигналов (20.23) через систему СФ ФМи сигналов с импульсными характеристиками  $H_M$ , описываемыми  $H_M$ -матрицей (20.5), получим на их выходах отклики в виде матрицы

$$K_{\text{огр}} = \alpha K,$$

где  $K$  – матрица, описываемая выражением (20.6).

Как было показано в 20.2, в общем случае суммирование столбцов матрицы  $K$  не приводит к компенсации БЛ сжатых дискретов. Это ведет к тому, что в суммарной ФН на плоскости  $(\tau, F)$  в соответствующих областях длительностью  $\tau_s$ , где расположены эти БЛ, не происходит их полной компенсации.

Для подавления БЛ сжатых дискретов в тех областях суммарной ФН, где они находятся, дополнительно введем ансамбль сигналов, инверсную относительно ансамбля сигналов (20.23) и полученную умножением всех строк на  $-1$ . В этом случае матрица инверсной системы сигналов  $\bar{X}_{\text{Могр}}$  на входе

СФ ФМи сигнала примет вид

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\text{Могр}} = & \begin{bmatrix} \alpha \bar{\Delta}_1^*(1) & \alpha \bar{x}_1(1) & \alpha \bar{\Delta}_1^*(1) + \alpha \bar{\Delta}_1^*(2) & \alpha \bar{x}_1(2) & \dots \\ \alpha \bar{\Delta}_2^*(1) & \alpha \bar{x}_2(1) & \alpha \bar{\Delta}_2^*(1) + \alpha \bar{\Delta}_2^*(2) & \alpha \bar{x}_2(2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha \bar{\Delta}_N^*(1) & \alpha \bar{x}_N(1) & \alpha \bar{\Delta}_N^*(1) + \alpha \bar{\Delta}_N^*(2) & \alpha \bar{x}_N(2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \alpha \bar{\Delta}_1^*(N-1) + \alpha \bar{\Delta}_1^*(N) & \alpha \bar{x}_1(N) & \alpha \bar{\Delta}_1^*(N) & \dots \\ \dots & \alpha \bar{\Delta}_2^*(N-1) + \alpha \bar{\Delta}_2^*(N) & \alpha \bar{x}_2(N) & \alpha \bar{\Delta}_2^*(N) & \dots \\ \dots & \alpha \bar{\Delta}_N^*(N-1) + \alpha \bar{\Delta}_N^*(N) & \alpha \bar{x}_N(N) & \alpha \bar{\Delta}_N^*(N) & \dots \end{bmatrix} = \alpha \bar{X}_M, \quad (20.24) \end{aligned}$$

где  $\bar{X}_M$  – матрица, определяемая выражением (20.10).

При прохождении ансамбля сигналов (20.24) через систему СФ ФМи сигналов с импульсными характеристиками  $\bar{H}_M$ , описываемыми  $\bar{H}_M$ -матрицей (20.11), получим на их выходах отклики в виде матрицы

$$\bar{K}_{огр} = \alpha \bar{K},$$

где  $\bar{K}$  – матрица, описываемая выражением (20.12).

Как было показано выше, суммарную ФН на всей плоскости  $(\tau, F)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} K_{огр\Sigma} &= \alpha K + \alpha \bar{K} = \alpha K_{\Sigma\text{лчн}} + \alpha K_{\Sigma\text{бл}} = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{2N} \chi_{i\text{odd}M}(\tau, F) + \alpha \sum_{i=1}^{2N} \chi_{i\text{even}M}(\tau, F) = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{2N} \chi_{iM}(\tau, F) \begin{cases} \neq 0 \text{ при } |\tau| \leq \tau_\delta, \\ = 0 \text{ при } \tau_\delta < |\tau| \leq (N-1)\tau_\delta. \end{cases} \end{aligned} \quad (20.25)$$

Сравнительный анализ выражений (20.25) и (20.15) показывает, что на форму суммарной ФН не оказывает влияние число разрядов, используемых в АЦП. Влияние числа разрядов АЦП сказывается только на области  $\pm\tau_\delta$  относительно точки  $\tau = 0$  суммарной ФН, и сводится оно только к изменению этих величин.

20.4.2. Рассмотрим влияние весовой обработки отдельных дискретов на форму суммарной ФН.

Очевидно, что введение весовой обработки каждого дискрета с внутридискретной ЧМ приводит к известным эффектам на выходах соответствующих СФД, а именно: ухудшению разрешающей способности по дальности и снижению уровня БЛ сжатых дискретов.

Тогда, с учетом вышесказанного, ансамбль ФМи сигналов на выходе блока СФД с весовой обработкой можно представить в виде, аналогичном выражениям (20.23) и (20.24), т.е. в виде

$$X_{M\text{вс}} = \beta X_M \text{ и } \bar{X}_{M\text{вс}} = \beta \bar{X}_M, \quad (20.26)$$

где  $\beta$  – коэффициент, зависящий от используемой весовой функции и определяющий изменение величины корреляционной функции на выходе СФД, связанной с рассогласованием за счет введения весовой обработки.

При прохождении ансамбля сигналов (20.26) через систему СФ ФМи сигналов с импульсными характеристиками, описываемыми  $H_M$ - и  $\bar{H}_M$ -матрицами (20.5) и (20.11), получим матрицы откликов в виде

$$K_{\text{вс}} = \beta K \text{ и } \bar{K}_{\text{вс}} = \beta \bar{K}.$$

Аналогичным образом суммарную ФН на всей плоскости  $(\tau, F)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} K_{\text{вс}\Sigma} &= K_{\text{вс}} + \bar{K}_{\text{вс}} = \beta(K + \bar{K}) = \\ &= \beta \sum_{i=1}^{2N} \chi_{i\text{odd}M}(\tau, F) + \beta \sum_{i=1}^{2N} \chi_{i\text{even}M}(\tau, F) = \\ &= \beta \sum_{i=1}^{2N} \chi_{iM}(\tau, F) \begin{cases} \neq 0 \text{ при } |\tau| \leq \tau_\delta, \\ = 0 \text{ при } \tau_\delta < |\tau| \leq (N-1)\tau_\delta. \end{cases} \end{aligned} \quad (20.27)$$

Сравнительный анализ выражений (20.27) и (20.15) показывает, что на форму суммарной ФН не оказывает влияние вид используемой весовой функции и происходит только изменение величин основного пика и БЛ сжатых дискретов.

20.4.3. Поскольку на форму используемой весовой функции не накладывалось никаких ограничений, то приведенные результаты легко распространяются на случай, когда необходимо оценить влияние конечной длины разрядной сетки весовых коэффициентов блока СФД. В этом случае на выходе блока СФД ансамбль ФМи сигналов с внутридискретной ЧМ также может быть записан в форме (20.26). При этом коэффициент  $\beta$  будет описывать зависимость отклонений полученных откликов (20.26) от откликов, описываемых выражениями (20.4) и (20.10), которые были получены для случая отсутствия любых рассогласований передаточной функции блока СФД от обрабатываемых сигналов.

Следовательно, ограничение длины разрядной сетки весовых коэффициентов блока СФД не приводит к появлению БЛ в суммарной ФН. Это приводит только к изменению величины суммарной ФН в области  $\pm\tau_\delta$  относительно точки  $\tau = 0$ .

### 20.5. РЛС обнаружения, использующая ансамбли сложных сигналов

Рассмотрим когерентно-импульсную РЛС обнаружения, реализующую рассмотренный алгоритм обработки и использующую ансамбли ФМи сигналов с внутридискретной ЧМ [187].

Рассматриваемая РЛС, структурная схема которой изображена на рис. 20.1, работает следующим образом. В момент времени  $t = t_0$  антенный переключатель (АП), управляемый сигналом со второго входа блока синхронизации (БС), подключает к выходу радиопередаточное устройство (РПУ) антенну. В тот же самый момент времени управляющий сигнал с первого входа БС поступает на блок цифрового формирователя фазоманипулированного сигнала (БЦФФМиС), который формирует соответствующий код ФМи сигнала и, например, пусть первый сигнал будет иметь код  $\{1, 1, -1, 1\}$ . Управляющие сигналы с выхода БЦФФМиС поступают на блоки перестройки весового коэффициента (БПВК) и устанавливают в каждом из них соответствующие весовые коэффициенты.

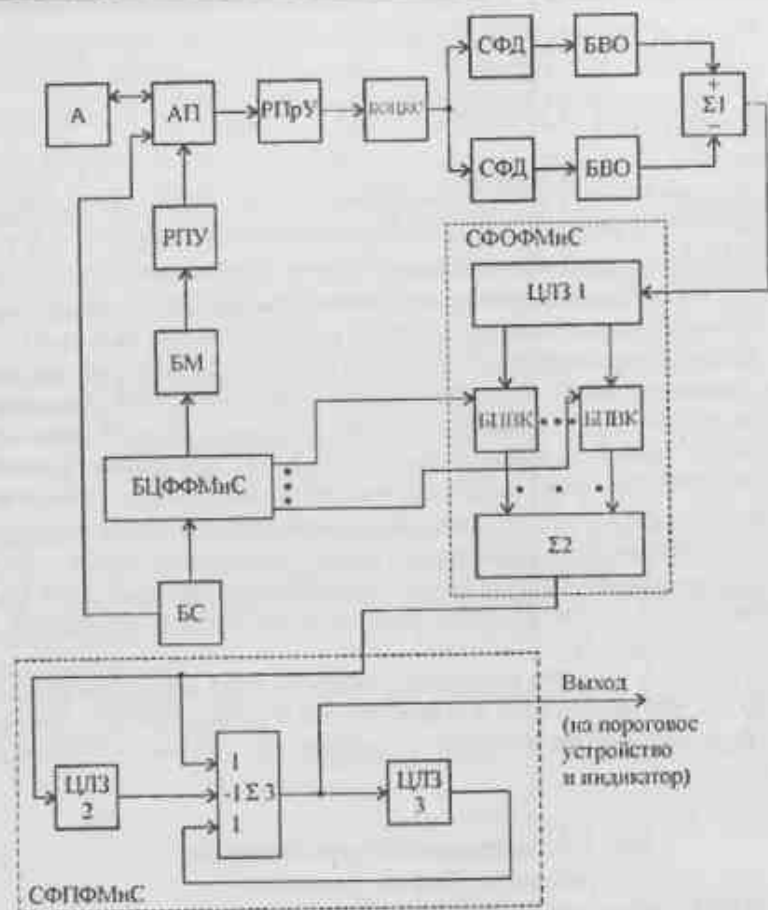


Рис. 20.1. Структурная схема РЛС, использующая ансамбль ФМн сигналов с внутридискретной модуляцией

Одновременно с выхода БЦФФМнС сформированный код последовательно во времени разряд за разрядом поступает на блок модуляции (БМ). Длительность во времени каждого разряда кода равна  $\tau_d$ .

За длительность этого временного интервала, равного  $\tau_d$ , в БМ вырабатывается сигнал с непрерывной фазовой функцией, закон изменения которой («нарастающий» или «падающий») определяется параметрами кода ФМн сигнала, поступающего с выхода БЦФФМнС. Сформированный в БМ подобным образом сложный ФМн поступает на РПУ где модулирует соответствующим образом несущую частоту и через

АП излучается антенной (А) в пространство. На рис. 20.2,а изображен сигнал в виде четырехразрядного кода, поступающий с выхода БЦФФМнС, а на рис. 20.3,а изображены квадратурные составляющие комплексной огибающей этого излучаемого сигнала.

В момент времени  $t = t_1$ , соответствующий моменту времени окончания излучения сформированного зондирующего сигнала, БС выдает управляющий сигнал, по которому АП подключает ко входу радиоприемного устройства (РПрУ) антенну. Устройство начинает работать на прием.

Пусть в момент времени  $t = t_2 \geq t_1$ , на вход устройства приходит отраженный сигнал, который может иметь доплеровский сдвиг или не иметь. Этот сигнал, пройдя через антенну А и АП, поступит на РПрУ, где произойдет его соответствующее усиление и перенос на промежуточную частоту. С выхода усилителя промежуточной частоты (УПЧ) принятый сигнал поступит на вход блока формирования цифровых квадратурных составляющих (БОЦКС), на выходе которого появятся квадратурные составляющие комплексной огибающей принимаемого сигнала с доплеровским сдвигом (рис. 20.4,а) или без доплеровского сдвига (рис. 20.5,а).

Эти квадратурные составляющие представляют собой многоуровневые отсчеты, частота следования которых определяется условиями выполнения теоремы Котельникова. Отсчеты квадратурных составляющих комплексного сигнала поступают на согласованные фильтры дискретов (СФД), где происходит согласованная фильтрация отдельных дискретов принимаемых сигналов.

В том случае, если используемые законы внутридискретной модуляции непрерывным ЧМ сигналом являются ортогональными, то к моменту окончания каждого дискрета на выходах СФД произойдет полное разделение этих сигналов. В том случае, если используются квазиортогональные законы внутридискретной модуляции непрерывным ЧМ сигналом, на выходах того СФД который в данный момент времени не является согласованным для принимаемого сигнала, будет выходящий эффект не равный нулю и пропорциональный значению интеграла свертки принимаемого дискрета с импульсной характеристикой этого фильтра.

Соответствующим образом обработанные дискреты в СФД поступают на блоки выделения огибающей (БВО), на выходах которых выделяются огибающие прошедших СФД сигналов.

С выходов БВО снятые сигналы поступают на вычитатель  $\Sigma 1$  на выходе которого образуется сигнал, местоположения и знаки пиков которого соответствуют ФМн коду, выработанного БЦФФМнС. На рис. 20.6,а показан сигнал с доплеровским сдвигом, получающийся на выходе вычитателя  $\Sigma 1$ , а на рис. 20.7,а показан сигнал без доплеровского сдвига.



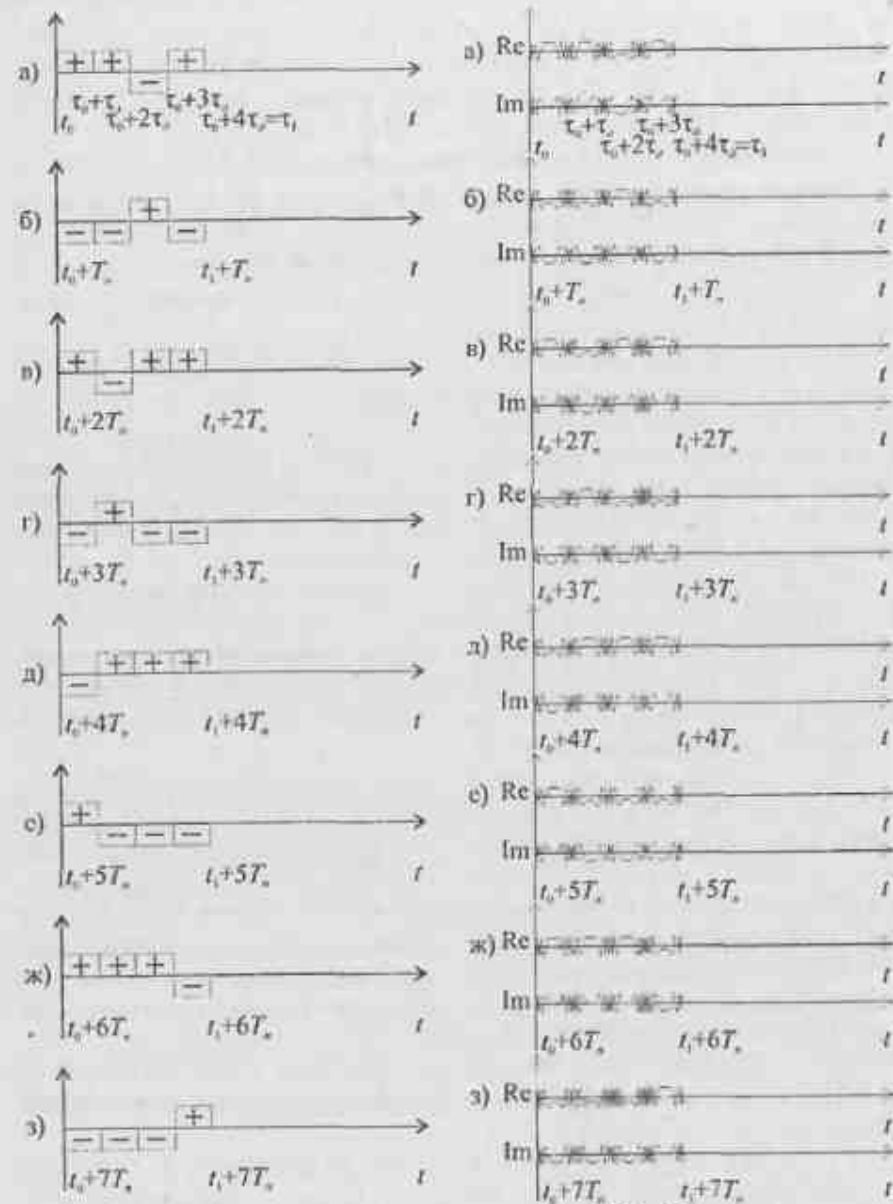


Рис. 20.2. Сигнал в виде четырехразрядного кода на выходе БЦФМНС

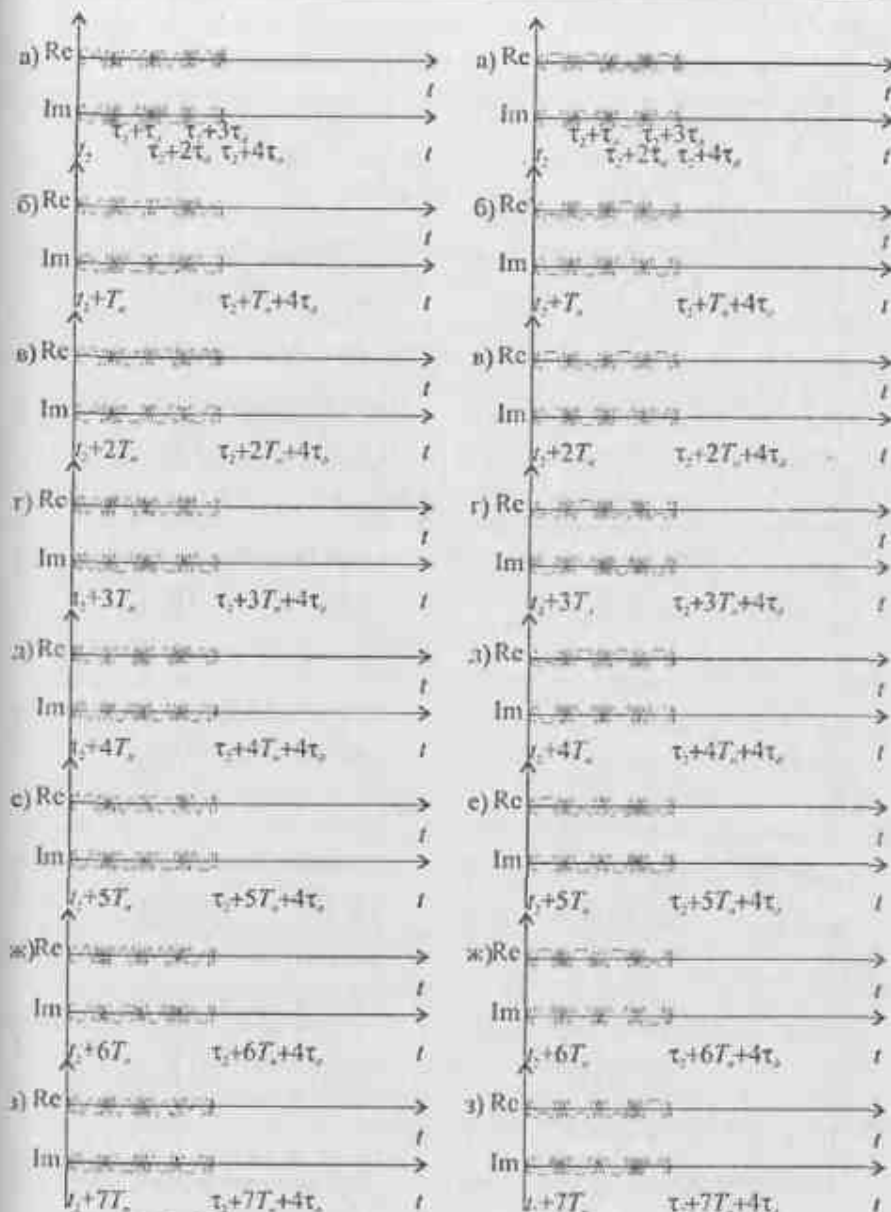


Рис. 20.3. Квадратурные составляющие комплексной огибающей излучаемого сигнала

Рис. 20.4. Квадратурные составляющие комплексной огибающей с доплеровским сдвигом

Рис. 20.5. Квадратурные составляющие комплексной огибающей без доплеровского сдвига

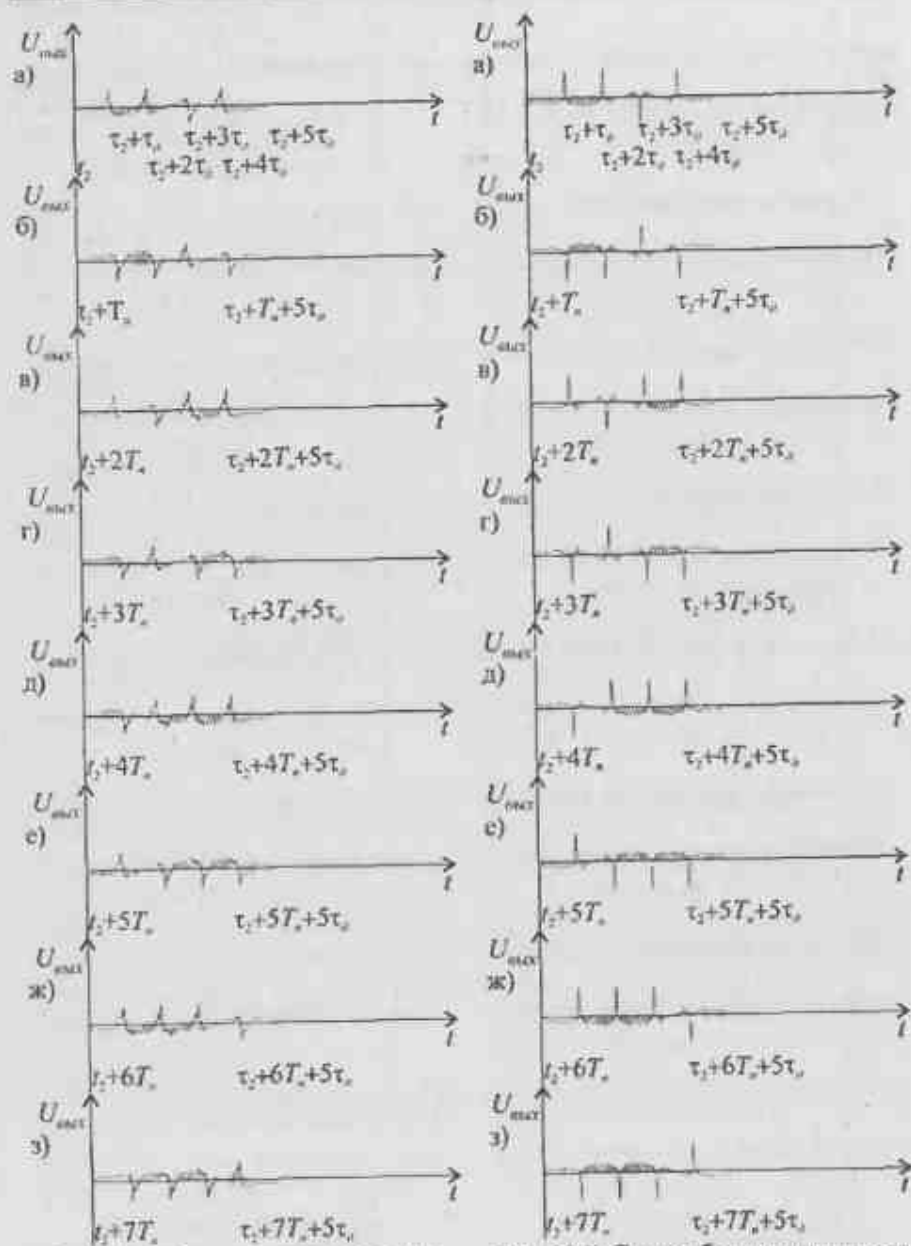


Рис. 20.6. Сигнал с доплеровским сдвигом на выходе вычитателя  $\Sigma 1$

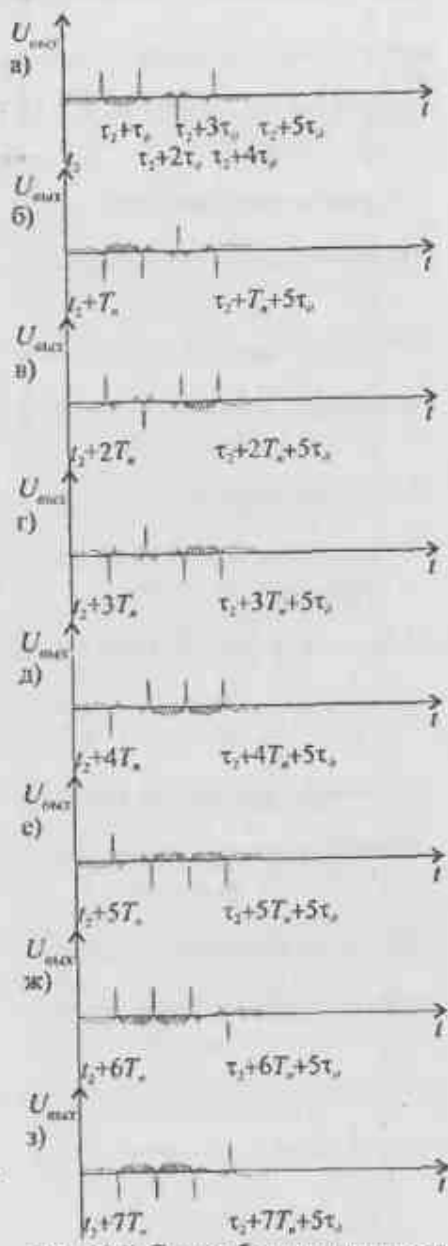


Рис. 20.7. Сигнал без доплеровского сдвига на выходе вычитателя  $\Sigma 1$

Обработанный указанным образом сигнал поступает на согласованный фильтр одиночного фазоманипулированного сигнала (СФФМНС) и записывается в цифровую линию задержки (ЦЛЗ 1) этого фильтра. Соответствующим образом обрабатываясь в этом фильтре, который является согласованным для одиночного ФМн сигнала, на выходе сумматора  $\Sigma 2$  этого фильтра появляется сжатый ФМн сигнал или с доплеровским сдвигом, который имеет вид изображенный на рис. 20.8,а, или, как на рис. 20.9,а – без доплеровского сдвига. Этот сигнал поступает на вход сумматора  $\Sigma 3$  и на вход ЦЛЗ 2, имеющей задержку равную восьми периодам повторения  $T_n$ , т.к. пачка импульсов для рассматриваемого случая состоит из восьми сигналов. Этот сигнал, пройдя через сумматор  $\Sigma 3$ , поступает на ЦЛЗ 2 с временем задержки равным  $T_n$  и на выход устройства для сравнения с порогом и индикации полученного результата.

Учтем следующее обстоятельство. Поскольку на конечный результат не оказывает влияние в какой последовательности во времени внутри пачки, аналогично первому, формируются, излучаются, принимаются и обрабатываются сложные сигналы, то положим, что код второго сигнала будет  $\{-1, -1, 1, -1\}$ , третьего  $\{1, -1, 1, 1\}$ , четвертого  $\{-1, 1, -1, -1\}$ , пятого  $\{-1, 1, 1, 1\}$ , шестого  $\{1, -1, -1, -1\}$ , седьмого  $\{1, 1, 1, -1\}$ , восьмого  $\{-1, -1, -1, 1\}$ .

Очевидно, что указанная последовательность кодов соответствует случаю когда строки матриц  $X_D$  и  $\bar{X}_D$ , описываемых (20.16) и (20.19), расположены соответственно на нечетных и четных позициях матрицы (20.1), описывающей рассматриваемый ансамбль сигналов. Аналогично столбцы матриц  $H_D$  и  $\bar{H}_D$ , описываемых (20.17) и (20.20), расположены соответственно на нечетных и четных позициях (20.2), описывающих набор импульсных характеристик СФ для этого ансамбля сигналов.

Результаты обработки этих сигналов из ансамбля изображены на рис. 20.2,б – 20.9,з соответственно.

Эти восемь сигналов синхронно суммируются в рекурсивном фильтре состоящем из сумматора  $\Sigma 3$  и ЦЛЗ 3. На рис. 20.10 изображен суммарный сигнал, получающийся при суммировании этих восьми сигналов на выходе всего устройства при наличии доплеровского сдвига. На рис. 20.11 изображен суммарный сигнал, получающийся при суммировании этих восьми сигналов на выходе всего устройства без доплеровского сдвига. Полученный суммарный сигнал подается на пороговое устройство для сравнения с порогом и далее производится индикация полученного результата.

С момента времени  $t = t_0 + 8T_n$  работа устройства повторяется аналогично тому, как она осуществлялась, начиная с момента времени  $t = t_0$ .

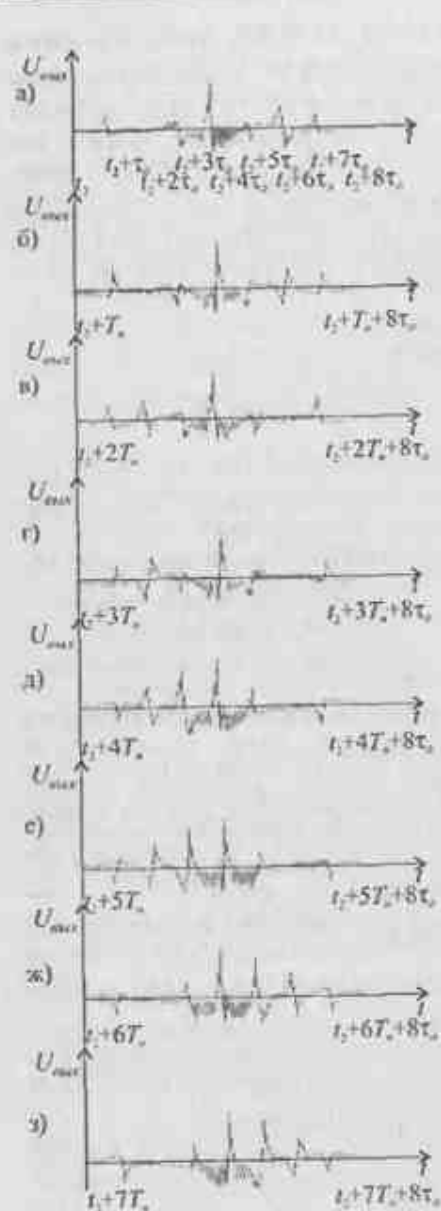


Рис. 20.8. Сигнал с доплеровским сдвигом на выходе сумматора  $\Sigma 2$

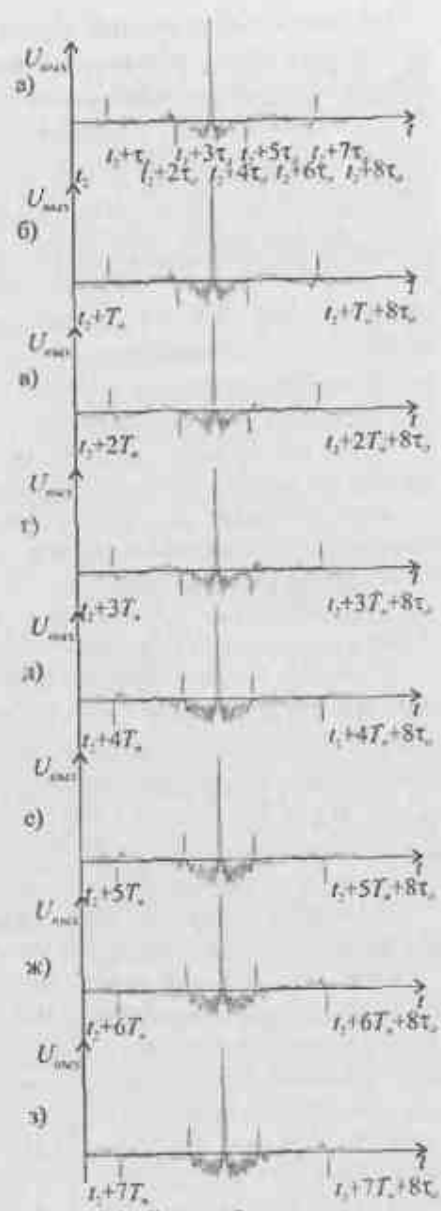


Рис. 20.9. Сигнал без доплеровского сдвига на выходе сумматора  $\Sigma 2$

При этом сигнал, который был записан в ЦЛЗ 2  $8T_0$  назад, поступит в противофазе на соответствующий вход сумматора  $\Sigma 3$  и этим самым вычитается из результирующего сигнала, находящегося в ЦЛЗ 3. В тот же самый момент времени сигнал, с аналогичным законом фазовой манипуляции, поступит на другой вход сумматора  $\Sigma 3$ , что обеспечит режим работы устройства «скользящее окно». При этом отклик сигнала на выходе устройства останется таким же, каким он изображен на рис. 20.10 или рис. 20.11. Далее работа устройства повторяется, т.е. каждый код повторяется через  $8T_0$ .

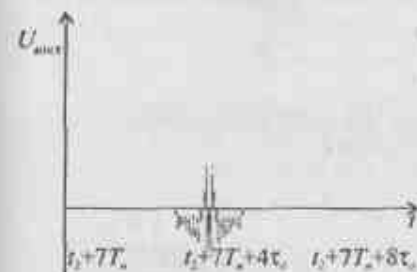


Рис. 20.10. Суммарный сигнал на выходе устройства при наличии доплеровского сдвига

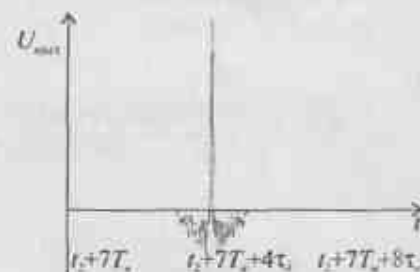


Рис. 20.11. Суммарный сигнал на выходе устройства при отсутствии доплеровского сдвига

На рис. 20.12,а и рис. 20.12,б изображены отклики исследуемой системы сигналов на выходе рассматриваемой структурной схемы в зависимости от направления доплеровского смещения частоты [187]. Из анализа рис. 20.12,а и рис. 20.12,б видно, что БЛ на плоскости  $(\tau, F)$  за исключением области, прилегающей к основному пику и равной  $2\tau_0$ , компенсируются, что подтверждает полученные в 20.3 результаты математического анализа. Также видно, что наблюдается раздвоение пика. Это связано с тем, что ФН отдельных дискретов соответствуют ФН сигналов с противоположными законами ЧМ относительно друг друга и ФН которых имеют «крестообразный» характер друг относительно друга.

На рис. 20.13,а и рис. 20.13,б изображены отклики системы сигналов с использованием весовой обработки дискретов с внутрдискретной КЧМ. В качестве весового окна использовалось окно Хэмминга.

Анализ рис. 20.13,а и рис. 20.13,б, показывает, что применение весовой обработки ухудшает разрешающую способность по дальности, но приводит к уменьшению боковых лепестков, расположенных около основного пика, а БЛ на плоскости  $(\tau, F)$  суммарного ФН по-прежнему подавляются, за исключением области  $\pm\tau_0$  относительно точки  $\tau=0$ , что подтверждает результаты, полученные в 20.4.

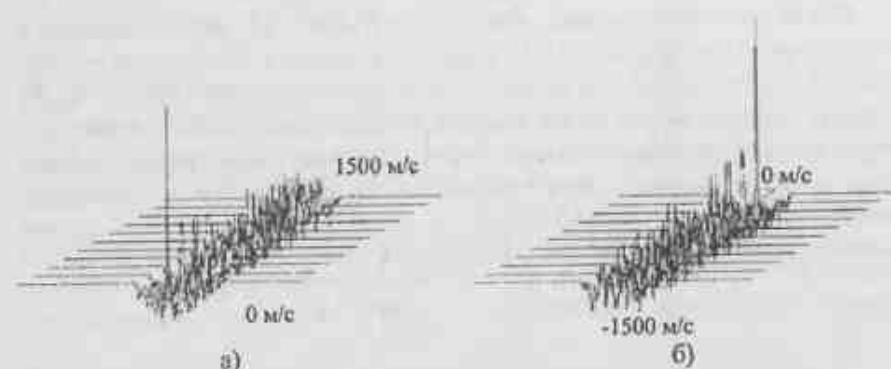


Рис. 20.12. Функция неопределенности суммарного сигнала на выходе устройства

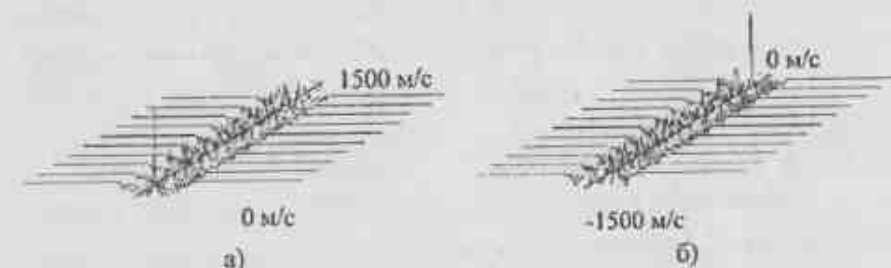


Рис. 20.13. Функция неопределенности сигнала на выходе устройства при использовании весового окна Хэмминга при обработке дискрета

### 20.6. Выводы

Синтезированы ансамбли ФМи сигналов, обладающие «квазиидеальной» формой суммарной ФН. Проведен анализ полученного ансамбля сигналов. Определены требования, которым должны удовлетворять модулирующие функции, описывающие законы внутридискретной модуляции, причем законы их изменения определяются знаком кода ФМи сигнала. Предложенный ансамбль сигналов позволяет получать суммарную ФН «квазиидеальной» формы и при этом не требуется иметь информацию о фазе каждого СС в их последовательности.

Рассмотрено применение ортогональных кодирующих последовательностей на основе использования D-кодов для модуляции по фазе СС. Использование этих кодов различной размерности позволяет получать «квазиидеальные» суммарные ФН. Очевидно, что область ФН, свободная от БЛ, тем больше, чем больше размерность используемого D-кода.

Рассмотрены особенности обработки ансамблей СС представленных в бипарно-квантованной форме. Подобное преобразование сигналов не приводит к появлению БЛ на плоскости  $(\tau, F)$  не принадлежащих области  $\pm\tau_0$  относительно точки  $\tau=0$ , а в указанной области происходит уменьшение максимального значения суммарной ФН. Последнее позволяет сделать вывод, что амплитудные характеристики АЦП не сказываются на «квазиидеальной» форме суммарной ФН.

Использование произвольной весовой обработки дискретов не оказывает влияния на «квазиидеальную» форму суммарной ФН, но приводит к расширению главного пика и уменьшению уровня БЛ сжатых дискретов в области  $\pm\tau_0$  относительно точки  $\tau=0$  на плоскости  $(\tau, F)$ .

Рассмотрена работа структурной схемы РЛС, использующей ансамбли сложных сигналов. Приведенные результаты имитационного моделирования ее работы показали отсутствие БЛ на плоскости  $(\tau, F)$  у суммарной ФН, за исключением области  $\pm\tau_0$  прилегающей к главному пику, который расположен в точке  $\tau=0$ , независимо от того используется или нет весовая обработка дискретов.

## 21. СЕЛЕКЦИЯ СИГНАЛОВ ДВИЖУЩИХСЯ ЦЕЛЕЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АНСАМБЛЕЙ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ

### 21.1. Вводные замечания

Радиолокационное обнаружение движущихся целей в различного вида когерентно-импульсных РЛС осуществляется за счет использования различий в сигналах, отраженных от неподвижных и движущихся целей, связанных с эффектом Доплера. Во всех этих случаях используется техника селекции движущихся целей (СДЦ) [72, 127, 142]. При этом все алгоритмы, осуществляющие селекцию полезных сигналов движущихся целей, принимаемых в аддитивной смеси с коррелированной помехой, работают при выполнении условия, что  $P_{кор,л} \gg P_c \gg P_{б.ш.}$ , где  $P_{кор,л}$  — мощность коррелированной помехи,  $P_c$  — мощность принимаемого полезного сигнала,  $P_{б.ш.}$  — мощность «белого» шума.

Как известно [72, 126, 127, 170, 173], оптимальная обработка в этом случае сводится к «обелению» коррелированной помехи и когерентному накоплению полезного сигнала, поступающего на обработку в аддитивной смеси с «белым» шумом. В реальных устройствах полное «обеление» коррелированной помехи не реализуемо. Технически решение задачи осуществляется путем построения такого режекторного фильтра, который осуществляет режекцию спектральных компонент коррелированной помехи, а дальнейшая обработка заключается в накоплении полезных сигналов совместно с «остатками» коррелированной помехи и сравнение результатов накопления с порогом, уровень которого выбирается исходя из выбранного критерия.

Среди когерентно-импульсных РЛС, предназначенных для задач обнаружения движущихся целей, наибольшее распространение получили РЛС, использующие периодическую последовательность простых когерентно-импульсных сигналов. В свою очередь, ограничения, накладываемые на

количество импульсов в пачках зондирующих сигналов, привели к тому, что реально такие системы используют подавители корреляционных помех в виде систем череспериодного вычитания относительно небольшой кратности (одно-, двух- и трехкратные системы).

Существенные ограничения по применению периодических последовательностей СС с одинаковыми законами внутримпульсной модуляции для задач СДЦ связаны со сложностями по использованию отличий, имеющихся в их фазовой структуре, при одновременном поступлении на вход устройства мощных сигналов, отраженных от неподвижных целей, и слабых сигналов, отраженных от движущихся целей.

В то же время, возможно применение набора СС, у которых законы внутримпульсной модуляции такие, что отклики на выходах соответствующих СФ, полученные при воздействии сигналов, отраженных от неподвижных объектов, имеют одинаковые параметры, а сигналы, отраженные от движущихся целей, имеют отличия друг от друга. Последнее позволяет подавить сигналы соответствующие отражениям от неподвижных целей и производить селекцию сигналов движущихся целей. К таким сигналам могут быть отнесены ЛЧМ-сигналы и противоположными законами внутримпульсной модуляции.

Поэтому представляет интерес рассмотрение возможностей применения синтезированных в предыдущей главе ансамблей ФМи сигналов с внутримпульсной модуляцией для селекции сигналов, отраженных от движущихся целей, принимаемых в аддитивной смеси с «белым» шумом и коррелированной помехой, мощность которой намного превышает мощность полезного сигнала.

### 21.2. Алгоритм селекции сигналов движущихся целей при использовании ансамблей радиолокационных фазоманипулированных сигналов с внутримпульсной модуляцией

21.2.1. Рассмотрим алгоритм селекции сигналов движущихся целей, принимаемых в аддитивной смеси с мощной коррелированной помехой с использованием ансамблей радиолокационных ФМи сигналов с внутримпульсной модуляцией, который имеет следующий вид [188]:

• формируется модифицированная  $H$ -матрица Алдамара размером  $2N \times N$ , состоящая из строк, принадлежащих модифицированным матрицам  $H_{N \times N}$  и  $\bar{H}_{N \times N}$ , где знак « $\bar{\cdot}$ » сверху означает инверсию элементов; в сформированной  $H_{2N \times N}$ -матрице размером  $2N \times N$ , строки располагаются таким образом, чтобы расстояние по Хэммингу между ее нечетными и четными строками было максимально, т.е. нечетные строки принадлежат матрице  $H_{N \times N}$ , а четные — матрице  $\bar{H}_{N \times N}$ ;

- сформированные на основе  $\mathbf{H}_{2N \times N}$ -матрицы радиолокационные ФМн сигналы с внутридискретной модуляцией проходят обработку в СФД, с выходов которых появляются сигналы, описываемые сигнальной матрицей  $\mathbf{X}_D$  размером  $2N \times (2N+1)$ ;

- сформированные сигналы поступают на соответствующим образом настроенные СФ ФМн сигналов, которые описываются матрицей импульсных характеристик  $\mathbf{H}_D$  размера  $(2N+1) \times 2N$ ; в результате прохождения ФМн сигналов через СФ ФМн формируется отклик, которые могут быть записаны в виде строк матрицы  $\mathbf{K}_D$  размером  $2N \times (4N+1)$ ;

- производится вычитание из элементов, расположенных на нечетных строках матрицы  $\mathbf{K}_D$ , элементов расположенных на четных строках матрицы  $\mathbf{K}_D$  и находящихся на одноименных столбцах; в результате получается матрица  $\Delta\mathbf{K}_D$  размером  $N \times (4N+1)$ ;

- определяются те строки в матрице  $\Delta\mathbf{K}_D$ , крайние элементы которых с обеих сторон имеют одинаковые знаки и в дальнейшем над этими строками никаких математических преобразований не осуществляется;

- определяются те строки матрицы  $\Delta\mathbf{K}_D$ , у которых крайние левые элементы, кроме нулевых, имеют противоположные знаки относительно знаков строк, которые были определены ранее и у которых одинаковые знаки с обеих сторон;

- все элементы строк матрицы  $\Delta\mathbf{K}_D$  с противоположными знаками крайних левых элементов умножаются на  $-1$  (инвертируются), что приводит к появлению матрицы  $\Delta\mathbf{K}_{DL}$  размером  $N \times (4N+1)$ ;

- производится поэлементное суммирование полученных разностей, расположенных на одноименных столбцах в матрице  $\Delta\mathbf{K}_{DL}$  размера  $N \times (4N+1)$ , в результате чего получается матрица-строка  $\Delta\mathbf{K}_{DLL}$  размером  $1 \times (4N+1)$ , у которой все правые элементы, кроме элемента расположенного рядом с центральным, равны нулю и которая переписывается в виде диагональной матрицы размером  $(4N+1) \times (4N+1)$ ;

- определяются те строки матрицы  $\Delta\mathbf{K}_D$ , у которых крайние правые элементы, кроме нулевых, имеют противоположные знаки относительно знаков строк, которые были определены ранее и у которых одинаковые знаки с обеих сторон;

- все элементы строк матрицы  $\Delta\mathbf{K}_D$  с противоположными знаками крайних правых элементов умножаются на  $-1$  (инвертируются), что приводит к появлению другой матрицы  $\Delta\mathbf{K}_{DR}$  размером  $N \times (4N+1)$ ;

- производится поэлементное суммирование полученных разностей, расположенных на одноименных столбцах в матрице  $\Delta\mathbf{K}_{DR}$  размером  $N \times (4N+1)$ , в результате чего получается матрица-строка  $\Delta\mathbf{K}_{DRL}$  размером  $1 \times (4N+1)$ , у которой все левые элементы, кроме элемента расположенного рядом с центральным, равны нулю и которая переписывается в виде диагональной матрицы размером  $(4N+1) \times (4N+1)$ ;

- полученные диагональные матрицы перемножаются друг на друга и получается диагональная матрица  $\Delta\mathbf{K}_{DS}$  размером  $(4N+1) \times (4N+1)$ , которая имеет все нулевые элементы кроме трех элементов на главной диагонали – центрального и двух расположенных рядом с ним и которые описывают результирующий отклик, соответствующий сигналам движущихся целей.

21.2.2. Рассмотрим алгоритм выделения сигналов движущихся целей на фоне отражений от земной поверхности на примере использования  $\mathbf{H}_4^{2nd3rd}$  - и  $\bar{\mathbf{H}}_4^{2nd3rd}$ -матриц, которую обозначим как  $\mathbf{H}_{8/4}$  [84, 85]

$$\mathbf{H}_{8/4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Пусть на вход блока СФ одиночных ФМн сигналов (соответствующим образом настроенных) поступает периодическая последовательность импульсов системы сигналов с выходов блока (СФД) [187] и которая, аналогично тому, как было показано в главе 20, может быть представлена в виде

$$\mathbf{X}_{orig} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_1 + \Delta_2 & \Delta_2 & \Delta_1 - \Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 + \Delta_1 & \Delta_1 & \Delta_1 \\ -\Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 - \Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 + \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_1 - \Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_1 - \Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 + \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_1 + \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_1 \\ -\Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 + \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_1 - \Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 - \Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 \\ -\Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 + \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_1 + \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_1 + \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_1 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_1 - \Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 - \Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 - \Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_1 + \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_1 + \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_1 - \Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 \\ -\Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 - \Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 - \Delta_2 & -\Delta_2 & -\Delta_2 + \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_1 \end{bmatrix} \quad (21.1)$$

где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  – главные пики сжатых дискретов, имеющие противополож-

ные направления частотно-временной зависимости на плоскости  $(\tau, F)$  и знаки которых соответствуют знакам исполкуемого ФМн кода;  $\Delta_1, -$  левые БЛ сжатых дискретов;  $\Delta_2 -$  правые БЛ сжатых дискретов. Знаки БЛ совпадают со знаками главных пиков  $\Delta_I$  и  $\Delta_{II}$  соответственно.

Матрица импульсных характеристик согласованных фильтров ФМн сигналов будет иметь вид

$$H_{D9/8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21.2)$$

Следовательно, матрица откликов будет иметь вид

$$K_{D9/17} = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & \Delta_I & w_1 & 0 & -w_2 \\ 0 & w_2 & \Delta_{II} & w_2 & 0 & -w_1 \\ 0 & w_1 & \Delta_I & w_1 + w_2 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 - w_2 \\ 0 & w_2 & \Delta_{II} & w_2 + w_2 - w_1 & \Delta_{II} - \Delta_I & -w_1 - w_1 + w_2 \\ 0 & -w_2 & -\Delta_{II} & -w_2 - w_2 + w_1 & -\Delta_{II} + \Delta_I & 2w_1 + w_1 - w_2 - w_2 \\ 0 & -w_1 & -\Delta_I & -w_1 - w_1 + w_2 & -\Delta_I + \Delta_{II} & -w_1 - w_1 + 2w_2 + w_2 \\ 0 & -w_1 & -\Delta_I & -w_1 & 0 & w_1 \\ 0 & -w_2 & -\Delta_{II} & -w_2 & 0 & w_2 \\ -\Delta_{II} & 3w_1 + w_2 - w_2 & 3\Delta_I + \Delta_{II} & 3w_1 - w_2 + w_2 & -\Delta_{II} & \\ -\Delta_I & w_1 - w_1 + 3w_2 & 3\Delta_{II} + \Delta_I & -w_1 + w_1 + 3w_2 & -\Delta_I & \\ -\Delta_{II} & 3w_1 + w_2 - w_2 & 3\Delta_I + \Delta_{II} & 3w_1 - w_2 + w_2 & -\Delta_{II} & \\ -\Delta_I & w_1 - w_1 + 3w_2 & 3\Delta_{II} + \Delta_I & -w_1 + w_1 + 3w_2 & -\Delta_I & \\ \Rightarrow 2\Delta_I - \Delta_{II} & 3w_1 + 2w_1 + w_2 - w_2 & 3\Delta_I + \Delta_{II} & w_1 + 3w_1 + w_2 & \Delta_I & \\ 2\Delta_{II} - \Delta_I & w_1 - w_1 + 3w_2 + 2w_2 & 3\Delta_{II} + \Delta_I & w_2 + w_1 + 3w_2 & \Delta_{II} & \\ \Delta_I & 3w_1 + w_1 + w_2 & 3\Delta_I + \Delta_{II} & 2w_1 + 3w_1 - w_2 + w_2 & 2\Delta_I - \Delta_{II} & \\ \Delta_{II} & w_1 + 3w_2 + w_2 & 3\Delta_{II} + \Delta_I & -w_1 + w_1 + 2w_2 + 3w_2 & 2\Delta_{II} - \Delta_I & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} w_1 - w_2 - w_2 & -\Delta_{II} + \Delta_I & -w_2 + w_1 + w_1 & \Delta_I & w_1 & 0 \\ -w_1 - w_1 + w_2 & -\Delta_I + \Delta_{II} & -w_1 + w_2 + w_2 & \Delta_{II} & w_2 & 0 \\ -w_2 & 0 & w_1 & \Delta_I & w_1 & 0 \\ -w_1 & 0 & w_2 & \Delta_{II} & w_2 & 0 \\ w_1 & 0 & -w_1 & -\Delta_I & -w_1 & 0 \\ w_2 & 0 & -w_2 & -\Delta_{II} & -w_2 & 0 \\ 2w_1 + w_1 - w_2 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 - w_2 & -\Delta_{II} & -w_2 & 0 \\ -w_1 - w_1 + w_2 + 2w_2 & \Delta_{II} - \Delta_I & -w_1 - w_1 + w_2 & -\Delta_I & -w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (21.3)$$

Произведем поэлементное вычитание из нечетных строк матрицы (21.3) тех ее четных строк, которые имеют максимальное кодовое расстояние по Хэммингу друг относительно друга. В результате получается разностная матрица  $\Delta K_D$ , которая будет иметь вид (далее опускаем цифры, характеризующие размер матрицы)

$$\Delta K_D = \begin{bmatrix} 0 & w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 0 \\ 0 & w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ 0 & w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ 0 & -w_1 + w_2 & -\Delta_I + \Delta_{II} & -w_1 + w_2 & 0 \\ w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ \Rightarrow w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ 3w_1 - 3w_2 + 2w_1 - 2w_2 & 3\Delta_I - 3\Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + 3w_1 - 3w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ \Rightarrow w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 0 \\ w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 0 \\ 3w_1 - 3w_2 + 2w_1 - 2w_2 & 3\Delta_I - 3\Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + 3w_1 - 3w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ \Rightarrow w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 0 \\ w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 0 \\ w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (21.4)$$

Выделяем разностные строки матрицы  $\Delta K_D$ , у которой знаки обоих крайних разностных элементов, кроме нулевых, в строках положительны. Данные, описываемые этими строками, в дальнейшей обработке используются без изменений.

На следующем этапе путем умножения всех элементов соответствующих строк на  $-1$  устанавливаются положительными знаки у тех элементов крайнего левого столбца матрицы (21.4), знаки которых были отрицательны. В результате получается матрица  $\Delta K_{DL}$  которая имеет одинаковые величины и знаки левых крайних элементов и имеет вид

$$\Delta K_{DL} = \begin{bmatrix} 0 & w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 0 \\ 0 & w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ 0 & w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ 0 & w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ 3w_1 - 3w_2 + 2w_1 - 2w_2 & 3\Delta_I - 3\Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + 3w_1 - 3w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ -w_1 + w_2 & -\Delta_I + \Delta_{II} & -2w_1 + 2w_2 - w_1 + w_2 & -2\Delta_I + 2\Delta_{II} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ -3w_1 + 3w_2 - 2w_1 + 2w_2 & -3\Delta_I + 3\Delta_{II} & -2w_1 + 2w_2 - 3w_1 + 3w_2 & -2\Delta_I + 2\Delta_{II} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2\Delta_I - 2\Delta_{II} & w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 0 \\ 0 & w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 0 \\ 0 & -w_1 + w_2 & -\Delta_I + \Delta_{II} & -w_1 + w_2 & 0 \\ -2\Delta_I + 2\Delta_{II} & -w_1 + w_2 - 2w_1 + 2w_2 & -\Delta_I + \Delta_{II} & -w_1 + w_2 & 0 \end{bmatrix}$$

После этого производится суммирование элементов столбцов матрицы  $\Delta K_{DL}$ , что соответствует накоплению результатов обработки всей пачки импульсов. В результате получаем матрицу-строку  $\Delta K_{DLL}$ , у которой левые элементы, кроме крайнего, относительно центрального, центральный элемент и элемент, описывающий БЛ, прилегающий к центральному эле-

менту справа, не равны нулю, а все элементы, расположенные далее справа, равны нулю, и которая имеет вид

$$\Delta K_{DLL} = [0 \quad 4w_1 - 4w_2 \quad 4\Delta_I - 4\Delta_{II} \quad 4w_1 + 4w_2 - 4w_2 - 4w_2 \quad 4\Delta_I - 4\Delta_{II} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4w_1 + 4w_2 - 4w_2 - 4w_2 \quad 4\Delta_I - 4\Delta_{II} \quad 4w_1 + 4w_2 - 4w_2 - 4w_2 \quad 4\Delta_I - 4\Delta_{II} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4w_1 - 4w_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (21.5)$$

На следующем этапе умножаем на величину  $-1$  те строки матрицы (21.4), у которых правые крайние элементы, кроме нулевых, имеют противоположные знаки относительно знаков элементов, которые расположены в тех ее строках, где они имеют одинаковые знаки с обоих сторон строк. В результате получается матрица  $\Delta K_{DR}$ , которая имеет одинаковые величины и знаки у правых крайних элементов, и имеет вид

$$\Delta K_{DR} = \begin{bmatrix} 0 & w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 0 \\ 0 & w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ 0 & -w_1 + w_2 & -\Delta_I + \Delta_{II} & 2w_2 - 2w_1 - w_1 + w_2 & -2\Delta_I + 2\Delta_{II} \\ 0 & -w_1 + w_2 & -\Delta_I + \Delta_{II} & -w_1 + w_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ -3w_1 + 3w_2 - 2w_1 + 2w_2 & 3\Delta_I - 3\Delta_{II} & -2w_1 + 2w_2 - 3w_1 + 3w_2 & -2\Delta_I + 2\Delta_{II} \\ w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ 3w_1 - 3w_2 + 2w_1 - 2w_2 & 3\Delta_I - 3\Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + 3w_1 - 3w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ -w_1 + w_2 - 2w_1 + 2w_2 & -\Delta_I + \Delta_{II} & -w_1 + w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \\ 3w_1 - 3w_2 + 2w_1 - 2w_2 & 3\Delta_I - 3\Delta_{II} & 2w_1 - 2w_2 + 3w_1 - 3w_2 & 2\Delta_I - 2\Delta_{II} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2\Delta_I - 2\Delta_{II} & w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 0 \\ 0 & w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 0 \\ 0 & w_1 - w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 0 \\ 2\Delta_I - 2\Delta_{II} & w_1 - w_2 + 2w_1 - 2w_2 & \Delta_I - \Delta_{II} & w_1 - w_2 & 0 \end{bmatrix}$$



Аналогично, проводя суммирование элементов столбцов матрицы  $\Delta K_{DR}$ , что также соответствует накоплению результатов обработки, получаем матрицу-строку  $\Delta K_{DRL}$ , у которой правые элементы, кроме крайнего, относительно центрального, центральный элемент и элемент, описывающий БЛ и прилегающий к центральному элементу слева, не равны нулю, а все элементы, расположенные левее, равны нулю, и которая в результате принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta K_{DRL} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4\Delta_1^* - 4\Delta_2^* \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4\Delta_1^* - 4\Delta_H \ 4\Delta_1^* + 4\Delta_1^* - 4\Delta_2^* - 4\Delta_2^* \ 4\Delta_1^* - 4\Delta_H \ 4\Delta_1^* + 4\Delta_1^* - 4\Delta_2^* - 4\Delta_2^* \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4\Delta_1^* - 4\Delta_H \ 4\Delta_1^* + 4\Delta_1^* - 4\Delta_2^* - 4\Delta_2^* \ 4\Delta_1^* - 4\Delta_H \ 4\Delta_1^* - 4\Delta_2^* \ 0]. \quad (21.6) \end{aligned}$$

Таким образом, сформированы две группы откликов, расположение которых на одноименных позициях на временной оси описывается выражениями (22.5) и (22.6). Переписывая (22.5) и (22.6) в виде диагональных матриц, главные диагонали которых являются элементами матриц-строк  $\Delta K_{DLL}$  и  $\Delta K_{DRL}$  соответственно, и перемножая эти диагональные матрицы друг на друга, получим диагональную матрицу имеющую вид

$$\begin{aligned} \Delta K_3 &= \text{diag} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 16(\Delta_1^* + \Delta_1^* - \Delta_2^* - \Delta_2^*) (\Delta_1^* - \Delta_2^*) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 16(\Delta_1^* - \Delta_H)^2 \ 16(\Delta_1^* - \Delta_2^*) (\Delta_1^* + \Delta_1^* - \Delta_2^* - \Delta_2^*) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (21.7) \end{aligned}$$

Из последнего выражения видно, что не равны нулю элементы расположенные на главной диагонали и описывающие местоположение центрального пика и БЛ, расположенных слева и справа относительно центрального.

Очевидно, что в случае отсутствия доплеровского сдвига у коррелированной помехи, коэффициент корреляции которой стремится к единице, происходит полное вычитание как главных пиков, так и соответствующих БЛ.

В случае наличия доплеровского сдвига, что соответствует сигналу движущейся цели, вследствие противоположного характера частотно-временных зависимостей ФН соответствующих дискретов, эти сигналы не вычитаются друг из друга и происходит их селекция.

Аналогичным образом могут быть получены результаты и для систем сигналов описываемых  $H$ -матрицами других размеров.

Отметим, что при больших размерах матриц, описывающих  $D$ -коды можно существенно упростить математический анализ предложенного алгоритма селекции сигналов движущихся целей за счет раздельного описания обработки главных пиков и БЛ сжатых дискретов. Это позволяет оперировать только с матрицами, описывающими главные пики сжатых дискретов и имеющими как меньшую размерность (меньшее количество записываемых элементов относительно общего случая).

### 21.3. РЛС с СДЦ, использующая ансамбли сложных сигналов

Рассмотрим когерентно-импульсную РЛС с СДЦ, использующую описанный алгоритм селекции сигналов отраженных от движущихся целей. Когерентно-импульсная РЛС с СДЦ, структурная схема которой изображена на рис. 21.1, работает следующим образом [189].

В момент времени  $t = t_0$ , АП, управляемый сигналом со второго выхода БС, подключает к выходу РПУ антенну. В тот же самый момент времени управляющий сигнал с первого выхода БС поступает на БЦФФМнС, который формирует соответствующий код ФМн сигнала, и например, пусть первый сигнал будет иметь код  $\{1, 1, -1, 1\}$ . Управляющие сигналы с выходов БЦФФМнС поступают на БПВК и устанавливают в них соответствующие весовые коэффициенты. Одновременно, с выхода БЦФФМнС, сформированный код последовательно во времени разряд за разрядом поступает на БМ. Длительность во времени каждого разряда кода равна  $\tau_d$ . За длительность этого временного интервала, равного  $\tau_d$ , в БМ вырабатывается сигнал с непрерывной фазовой функцией, закон изменения которой определяется параметрами кода ФМн сигнала, поступающего с выхода БЦФФМнС. Сформированный в БМ подобным образом сложный ФМн сигнал поступает на РПУ где модулирует соответствующим образом несущую частоту и через АП излучается антенной в пространство. На рис. 20.2,а изображен сигнал в виде четырехразрядного кода, поступающий с выхода БЦФФМнС, а на рис. 20.3,а изображены квадратурные составляющие комплексной огибающей этого излучаемого сигнала.

В момент времени  $t = t_1 = 4\tau_d$ , соответствующий моменту времени окончания излучения сформированного зондирующего сигнала, БС выдает управляющий сигнал, по которому АП подключает ко входу РПрУ антенну. Устройство начинает работать на прием.

Пусть в момент времени  $t = t_2 \geq t_1$  на вход устройства приходит отраженный сигнал. Этот сигнал, пройдя через антенну и АП, поступит на РПрУ, где произойдет его соответствующее усиление и перенос на промежуточную частоту. С выхода УПЧ принятый сигнал поступит на вход БОЦКС, на выходе которого появятся квадратурные составляющие комплексной огибающей принимаемого сигнала с доплеровским сдвигом (рис. 20.4,а) или без доплеровского сдвига (рис. 20.5,а).

Эти квадратурные составляющие представляют собой многоразрядные отсчеты, частота следования которых определяется условиями выполнения теоремы Котельникова. Отсчеты квадратурных составляющих комплексного сигнала поступают на СФД, где происходит согласованная фильтрация отдельных дискретов принимаемых сигналов.

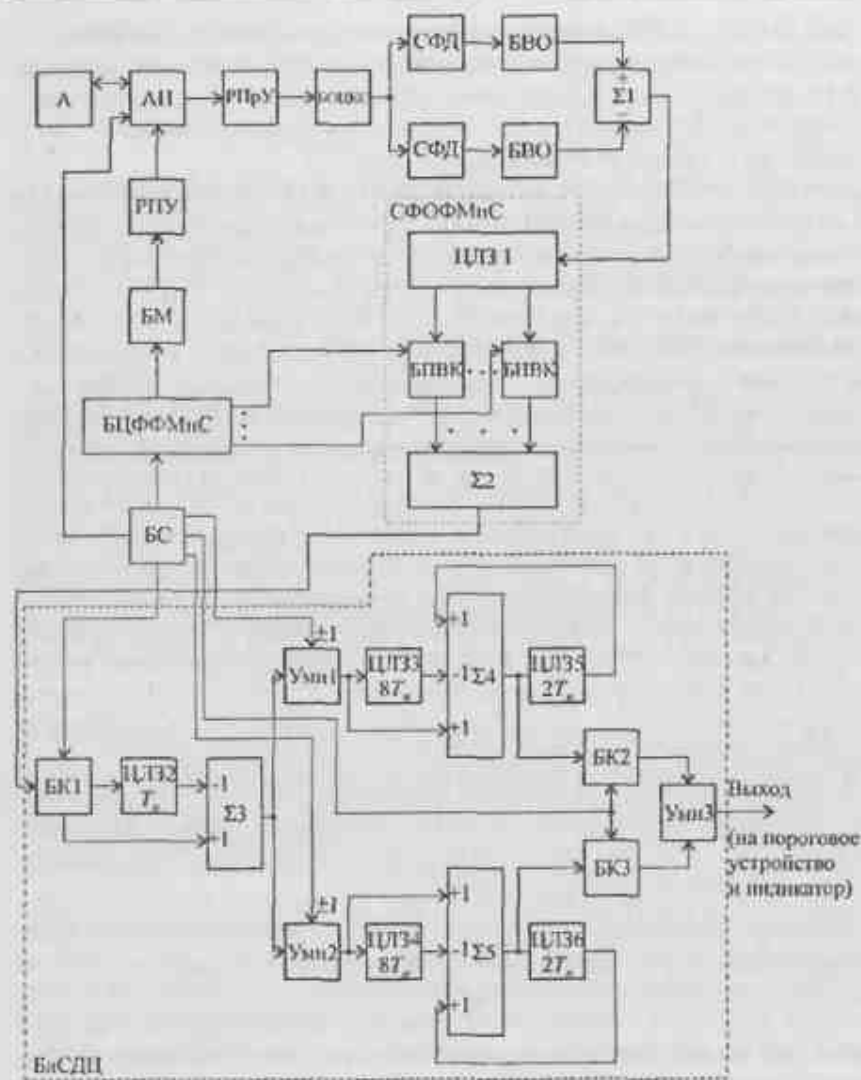


Рис. 21.1. Структурная схема когерентно-импульсной РЛС с СДЦ с использованием ансамбля сложных сигналов

В том случае, если используемые законы внутридискретной модуляции непрерывным ЧМ сигналом являются ортогональными, то к моменту окончания каждого дискрета на выходах СФД произойдет полное разделение этих сигналов. В том случае, если используются квазиортогональные зако-

ны внутридискретной модуляции непрерывным ЧМ сигналом, на выходах того СФД, который в данный момент времени не является согласованным для принимаемого сигнала, будет выходной отклик не равный нулю и пропорциональный значению интеграла свертки принимаемого дискрета с импульсной характеристикой этого фильтра.

Соответствующим образом обработанные дискреты в СФД поступают на БВО, на выходах которых выделяются отгибающие прошедших СФД сигналов.

С выходов БВО сжатые сигналы поступают на вычитатель  $\Sigma 1$ , на выходе которого образуется сигнал, местоположение и знаки пиков которого соответствуют ФМн коду, выработанному БЦФФМнС. На рис. 20.6,а показан сигнал, получающийся на выходе вычитателя  $\Sigma 1$  при наличии доплеровского сдвига, а на рис. 20.7,а – при отсутствии доплеровского сдвига.

Обработанный указанным образом сигнал поступает на СФФФМнС и записывается в ЦЛЗ 1, вход которой является входом этого фильтра. Соответствующим образом обрабатываясь в этом фильтре, который является согласованным для одиночного ФМн сигнала, на выходе сумматора  $\Sigma 2$ , являющегося выходом этого фильтра, появляется сжатый ФМн сигнал, который имеет вид, изображенный на рис. 20.8,а (с доплеровским сдвигом), или как на рис. 20.9,а (без доплеровского сдвига). Этот сигнал поступает на вход блока коммутации (БК 1), вход которого является входом блока селекции сигналов движущихся целей (БлСДЦ) и управляется БС. С выхода БК 1 сигнал поступает на ЦЛЗ 2 с временем задержки равным  $T_n$ .

В момент времени  $t = t_0 + T_n$ , аналогично описанному выше, осуществляется излучение второго сигнала. Для этого формируется код второго ФМн сигнала, имеющий максимальное расстояние по Хэммингу относительно первого, который будет  $(-1, -1, 1, -1)$ . На рис. 20.2,б изображен сигнал в виде четырехразрядного кода, поступающий с выхода БЦФФМнС, а на рис. 20.3,б изображены квадратурные составляющие комплексной отгибающей этого сигнала излучаемого аналогично описанному выше. В момент времени  $t = t_1 + T_n$  устройство начинает работать на прием.

Пусть в момент времени  $t = t_2 + T_n \geq t_1 + T_n$  на вход устройства приходит отраженный сигнал. Этот сигнал обрабатывается аналогично описанному выше, что иллюстрируется рис. 20.4,б – рис. 20.9,б. Этот сигнал с выхода сумматора  $\Sigma 2$ , поступает на БлСДЦ, вход которого является входом БК1, и который управляется БС. С выхода БК 1 сигнал поступает на вычитатель  $\Sigma 3$ , где из него вычитается задержанный на  $T_n$  первый сигнал. Затем полученная разность подается на два управляемых БС перемножителя Умн 1 и Умн 2, где она перемножается с +1. Последнее обстоятельство связано с тем, что как показано в (21.4), в полученной разности знаки у обоих крайних разностных элементов, кроме нулевых, одинаковые.

С выходов Умн 1 и Умн 2 результат перемножения поступает в первом канале на ЦЛЗ 3 с временем задержки равным  $nT_n = 8T_n$  и на сумматор  $\Sigma 4$ , а во втором канале поступает на ЦЛЗ 4 с временем задержки  $nT_n = 8T_n$  и на сумматор  $\Sigma 5$ . Эти разностные сигналы, пройдя через сумматор  $\Sigma 4$  и сумматор  $\Sigma 5$ , поступают на ЦЛЗ 5 и ЦЛЗ 6 с временем задержки  $2T_n$  и в этот же момент времени поступают на блок коммутации 2 (БК2) и блок коммутации 3 (БК3) в первом и втором каналах соответственно.

На выход сигналы первого и второго каналов не проходит, т. к. это связано с тем, что БК 2 и БК 3, управляемые БС, выключены, поскольку не закончен процесс обработки всей формируемой и принимаемой пачки импульсов и который можно назвать переходным.

Очевидно, что все ФМн сигналы ансамбля, в частности третий с кодом  $\{1, -1, 1, 1\}$ , четвертый с кодом  $\{-1, 1, -1, -1\}$ , пятый с кодом  $\{-1, 1, 1, 1\}$ , шестой с кодом  $\{1, -1, -1, -1\}$ , седьмой с кодом  $\{1, 1, 1, -1\}$  и восьмой с кодом  $\{-1, -1, -1, 1\}$  будут формироваться и излучаться в моменты времени  $t = t_0 + 2T_n$ ,  $t = t_0 + 3T_n$ ,  $t = t_0 + 4T_n$ ,  $t = t_0 + 5T_n$ ,  $t = t_0 + 6T_n$ ,  $t = t_0 + 7T_n$  соответственно. Эти коды изображены на рис. 20.2в – рис. 20.2з. Видно, что все эти коды имеют максимальное расстояние по Хэммингу. При этом каждый раз будет осуществляться соответствующая настройка БПВК.

Соответствующим образом в моменты времени  $t = t_1 + 2T_n$ ,  $t = t_1 + 3T_n$ ,  $t = t_1 + 4T_n$ ,  $t = t_1 + 5T_n$ ,  $t = t_1 + 6T_n$ ,  $t = t_1 + 7T_n$  устройство начинает работать на прием.

Будем также полагать, что при этом прием отраженных сигналов осуществляется в моменты времени  $t = t_2 + 2T_n \geq t_1 + 2T_n$ ,  $t = t_2 + 3T_n \geq t_1 + 3T_n$ ,  $t = t_2 + 4T_n \geq t_1 + 4T_n$ ,  $t = t_2 + 5T_n \geq t_1 + 5T_n$ ,  $t = t_2 + 6T_n \geq t_1 + 6T_n$ ,  $t = t_2 + 7T_n \geq t_1 + 7T_n$  соответственно.

Обработка принятых сигналов осуществляется аналогично обработке первого и второго сигналов вплоть до их поступления на БлСДЦ. Режим обработки в БлСДЦ зависит от номера принимаемого сигнала.

Сигналы, которые имеют нечетные номера в последовательности, обрабатываются в БлСДЦ аналогично первому сигналу из пачки, а те сигналы которые имеют четный номер в последовательности, обрабатываются в БлСДЦ аналогично второму сигналу. При этом разность между третьим и четвертым обработанными сигналами перемножается в Умн 1 и Умн 2 в обоих каналах на +1 в силу того обстоятельства, что знаки у крайних элементов полученной разности одинаковы. Полученные разности между пятым и шестым сигналами и седьмым и восьмым сигналами перемножаются в Умн 1 и Умн 2 на +1 и -1 и -1 и +1 соответственно в силу того обстоятельства, что знаки крайних элементов разностей различны.

В начале восьмого периода зондирования, т.е. в начале завершения переходного процесса по накоплению результатов обработки всего ансамбля сигналов, открываются БК 2 и БК 3 управляемые БС. Результаты накопления разностей в двух каналах последовательно во времени будут перемножаться друг на друга в перемножителе Умн 3.

На выходе Умн 3 появляется отклик либо в виде изображенном на рис. 21.2 (в принимаемых сигналах есть доплеровский сдвиг), либо в виде изображенном на рис. 21.3 (нет доплеровского сдвига).

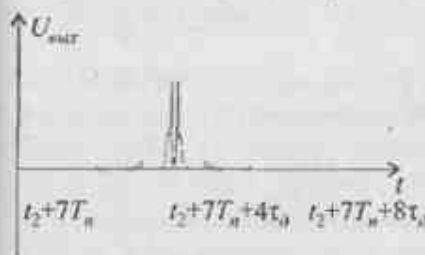


Рис. 21.2. Сигнал на выходе устройства при наличии доплеровского сдвига

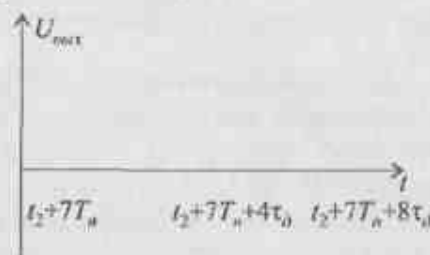


Рис. 21.3. Сигнал на выходе устройства при отсутствии доплеровского сдвига

В дальнейшем БК 2 и БК 3 открываются БС в четных периодах зондирования на интервал времени равный  $T_n$  и закрываются в нечетные.

Режим работы «скользящее» окно обеспечивается следующим образом. В моменты времени  $t = t_0 + 8T_n$  и  $t = t_0 + 9T_n$  формируются и излучаются девятый и десятый сигналы, аналогично первому и второму соответственно, т.е. имеющие коды  $\{1, 1, -1, 1\}$  и  $\{-1, -1, 1, -1\}$ . Аналогичным образом настраиваются БПВК и в моменты времени  $t = t_1 + 8T_n$  и  $t = t_1 + 9T_n$  устройство начинает работать на прием.

Будем также полагать, что отраженные сигналы поступают на обработку в моменты времени  $t = t_2 + 8T_n \geq t_1 + 8T_n$  и  $t = t_2 + 9T_n \geq t_1 + 9T_n$  соответственно и которые обрабатываются аналогично первому и второму.

В тот момент времени, когда с выходов Умн 1 и Умн 2 поступает на входы сумматора  $\Sigma 4$  и сумматора  $\Sigma 5$  разность между девятым и десятим сигналами, умноженная в обоих каналах на +1, на другие входы сумматора  $\Sigma 4$  и сумматора  $\Sigma 5$  с выходов ЦЛЗ 3 и ЦЛЗ 4 с задержкой на  $nT_n = 8T_n$  в обоих каналах, поступают разности между первым и вторым сигналами со знаками противоположными знакам этих разностей и поступившими на сумматор  $\Sigma 4$  и сумматор  $\Sigma 5$  восемь периодов назад. Разность между первым и вторым сигналами устраняется из дальнейшего процесса обработки и

этим самым осуществляется режим работы «скользящее» окно. Далее работа устройства повторяется.

В случае работы с другими кодами (например, восьмиразрядными), значения соответствующих кодов будут повторяться через  $16T_n$ , а СФОФММ должен быть согласован с восьмиразрядным кодом. Аналогичным образом требуется изменить характеристики устройства при смене видов кодов. Вне зависимости от знака доплеровского сдвига частоты сигнала, отраженного от движущейся цели, отклики на выходе устройства будут одинаковыми при одинаковых скоростях движения цели, что иллюстрируется рис. 21.4 и рис. 21.5.

Из этих рисунков видно, что БЛ сжатых сложных сигналов, независимо от величины и знака доплеровского сдвига, компенсируются на значительной части плоскости  $(\tau, F)$  за исключением области  $\pm \tau_0$  относительно точки  $\tau = 0$ . Отметим, что по оси  $\tau$  при  $F = 0$  отсутствуют БЛ соответствующие сигналам, отраженным от неподвижных целей. Все представленные рисунки были получены путем имитационного моделирования на ЦВМ описанного алгоритма обработки с соответствующими сигналами.

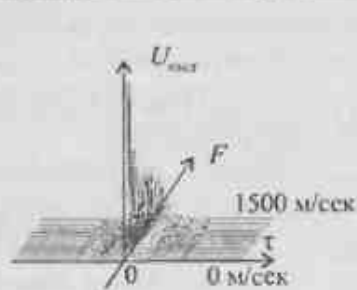


Рис. 21.4. Форма сигнала на выходе устройства на плоскости  $(\tau, F)$  (положительный доплеровский сдвиг)

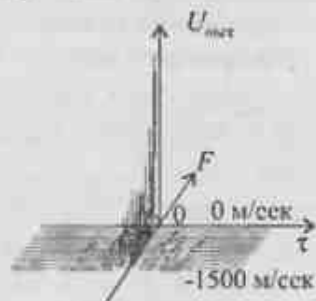


Рис. 21.5. Форма сигнала на выходе устройства на плоскости  $(\tau, F)$  (отрицательный доплеровский сдвиг)

## 21.4. Виды и особенности внутридискретных модулирующих функций

21.4.1. Рассмотрим представление сложных сигналов с внутримпульсной непрерывной частотной модуляцией в цифровой форме. В настоящее время наиболее полно исследован сигнал с внутримпульсной квадратичной фазовой функцией, более известный как ЛЧМ-сигнал.

В работе [128] проведен теоретический анализ свойств сигнала с внутримпульсной кубической фазовой функцией, известный как сигнал с квадратичной частотной модуляцией (КЧМ) и сигналов с нелинейной ЧМ четвертого и более высокого порядков. Для получения аналитических результатов в этой работе кубическая полная фазовая функция при значениях аргументов близких к нулю была аппроксимирована параболой. Для сигналов с нелинейной ЧМ четвертого и более высокого порядков были получены выражения, которые позволяют получать только приближенные, качественные оценки поведения корреляционных и спектральных характеристик этих сигналов.

Поскольку для сигналов как с КЧМ, так и с нелинейной ЧМ четвертого и более высоких порядков отсутствуют точные аналитические выражения, дающие полное описание их ФН на плоскости  $(\tau, F)$ , то поэтому представляет интерес использование численных методов расчета для получения характеристик этих сигналов с целью проведения их сравнительного анализа между собой.

В соответствии с изложенными в 20.2 требованиями, предъявленными к законам внутридискретной модуляции, а также с учетом условий, которым должны удовлетворять сигналы для решения задач в которых они используются (обнаружения и селекции сигналов движущихся целей), представляет интерес рассмотрение свойств импульсных сигналов с непрерывной фазовой функцией, используемых в качестве отдельных дискретов в ансамблях.

В цифровой форме эти импульсные сигналы могут быть записаны в виде

$$\Psi_1^{(m)}(n) = \exp \left[ j \left( \left( \frac{\pi}{N} \left( n-1 - \frac{M-1}{2} \right)^m \right) \pm \varphi_0 n \right) \right], \quad (21.8)$$

$$\Psi_2^{(m)}(n) = \exp \left[ j \left( \left( \frac{\pi}{N} \left( \left( \frac{M-1}{2} \right)^m - \left| n-1 - \frac{M-1}{2} \right|^m \right) \right) \pm \varphi_0 n \right) \right], \quad (21.9)$$

где число  $M = M$  если  $M$  нечетное и  $M = M+1$  если  $M$  четное и которое определяет общее количество отсчетов квадратурных составляющих комплексной огибающей на одном дискрете (в одном импульсном сигнале);  $N$  – число, определяющее величину бина сигнала;  $n = 1, 2, \dots, M$  – номер текущего отсчета;  $m$  – степень полинома, описывающего полную фазовую функцию;  $\pm \varphi_0 = \pm \frac{2V_r}{c} \pi$  – нормированный доплеровский сдвиг;  $V_r$  – радиальная скорость цели,  $c = 3 \times 10^8$  м/сек – скорость света,  $\pm \pi$  – максимальный набег по фазе от отсчета к отсчету соответствующий максимальной частоте  $\pm F_{\max}$  в спектре анализируемого сигнала. Обычно  $M \leq N$ .

Выражения (21.8) и (21.9) описывают в дискретном виде комплексную огибающую одиночных импульсных сигналов с «взрастающими» и «падающими» законами внутримпульсной (внутридискретной) частотной модуляции.

21.4.2. Нетрудно показать [190], что база  $B_i^{(m)}$  сигналов, описываемых выражениями (21.8) и (21.9) в цифровой форме записи, может быть определена из условия

$$B_i^{(m)} = \frac{2MK_B}{\pi} [\arg \Psi_i^{(m)}(n_x) - \arg \Psi_i^{(m)}(n_x - 1)] = \frac{2MK_B}{\pi} \Delta \Psi_{i \max}^{(m)},$$

где  $n_x$  – значение, при котором  $\arg \Psi_i^{(m)}(n_x)$  принимает максимальную величину;  $i = 1, 2$ ;  $\pi$  – нормирующая величина, определяющая максимальный набег по фазе от отсчета к отсчету;  $\Delta \Psi_{i \max}^{(m)} \leq \pi$  – максимальная разница аргументов от отсчета к отсчету, соответствующая моделируемому сигналу с максимальным значением базы  $B_{\max}$ ;  $K_B = B/B_{\max}$  – коэффициент показывающий во сколько раз база моделируемого сигнала  $B$  меньше максимальной базы  $B_{\max}$ .

Подставляя в последнее выражение значения аргументов из выражений (21.8) и (21.9) и учитывая требования, предъявляемые к законом внутридискретной модуляции, изложенные в п. 20.2, получим

$$B^{(m)} = B_1^{(m)} = B_2^{(m)} = \frac{2MK_B}{N} \left[ \left| n_x - 1 - \frac{M-1}{2} \right|^m - \left| n_x - 2 - \frac{M-1}{2} \right|^m \right]. \quad (21.10)$$

При этом, по определению, величина

$$\left| n_x - 1 - \frac{M-1}{2} \right|^m - \left| n_x - 2 - \frac{M-1}{2} \right|^m \leq \pi. \quad (21.11)$$

Для проведения анализа одиночных импульсных сигналов с различными законами внутримпульсной модуляции при одинаковых условиях, целесообразно принимать одинаковые значения их длительностей и баз. Тогда при одинаковых значениях длительностей, определяемых  $M$ , и баз, определяемых  $B^{(m)}$ , можно определить величину  $N = N^{(m)}$ , в виде

$$N^{(m)} = \frac{2MK_B}{B^{(m)}} \left[ \left| n_x - 1 - \frac{M-1}{2} \right|^m - \left| n_x - 2 - \frac{M-1}{2} \right|^m \right]. \quad (21.12)$$

Сравнительный анализ рассматриваемых сигналов проводится путем сравнения форм их тел неопределенности (ТН), которые представляют собой двумерную автокорреляционную функцию (АКФ) по координатам  $\tau$  и  $F$ . Другой важной характеристикой указанных видов импульсных сигналов (21.8) и (21.9) являются их амплитудно-частотные спектры.

Для анализа форм ТН импульсных сигналов использовались модули  $|\dot{X}(\tau, F)|$  откликов соответствующих СФ, импульсные характеристики которых описываются выражениями

$$H_1^{(m)}(n) = \exp \left[ -j \left( \frac{\pi}{N^{(m)}} \left| n - 1 - \frac{M-1}{2} \right|^m \right) \right], \quad (21.13)$$

$$H_2^{(m)}(n) = \exp \left[ -j \left( \frac{\pi}{N^{(m)}} \left( \left( \frac{M-1}{2} \right)^m - \left| n - 1 - \frac{M-1}{2} \right|^m \right) \right) \right]. \quad (21.14)$$

При исследовании влияния весовой обработки на характеристики ТН исследуемых сигналов в качестве весовой функции использовалось окно Хэмминга, которое в дискретной форме имеет вид

$$W(n) = 0,54 + 0,46 \cos \left[ 2\pi \left( \frac{n-1-0,5(M-1)}{M-1} \right) \right] \quad (21.15)$$

и на которое умножаются квадратурные компоненты сигнальных отсчетов, описываемые выражениями (21.8) и (21.9) соответственно.

Для анализа амплитудных спектров рассматриваемых сигналов (21.8) и (21.9) воспользуемся дискретным преобразованием Фурье (ДПФ), которое для нашего случая имеет вид

$$\dot{X}_i(k2\pi/N_f) = \dot{X}_i(k\Omega) = \sum_{n=0}^{M-1} \Psi_i(n) \exp \left( -j \frac{2\pi}{N_f} kn \right), \quad (21.16)$$

где  $\Psi_i(n)$  – последовательность из временных отсчетов описываемых выражениями (21.8) или (21.9);  $\dot{X}_i(k2\pi/N_f)$  – последовательность состоящая из  $N_f$  частотных отсчетов;  $n = (n-1) = 0, 1, 2, \dots, M-1$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots, N_f-1$ ;  $M \leq N_f$ ;  $\Omega = 2\pi/N_f$  – величина бина, определяющая разрешающую способность ДПФ.

Приведенные выражения (21.8) – (21.16) позволяют полностью проанализировать численными методами сигналы с ЛЧМ, КЧМ и нелинейной ЧМ четвертого и более высокого порядков и получить их точные значения. Общие свойства данных сигналов можно определить, проводя многократные расчеты при различных значениях баз сигналов. В дальнейшем ограничимся рассмотрением и сравнением между собой сигналов со значениями  $m = 2, 3$  и 4.

Отметим, что каждый ФМн сигнал в ансамбле, состоящим из  $N$  дискретов с единичной амплитудой на заданном интервале времени, можно запи-

сать в виде [191, 192]

$$z(t) = \sum_{k=1}^N \text{rect}[n - (k-1)\tau_d] \exp j\Psi_i(m),$$

где  $\text{rect}[\cdot]$  – импульс единичной амплитуды и фиксированной длительности равной длительности дискрета  $\tau_d$ ,  $n$  – дискретные отсчеты текущего времени,  $N$  – число дискретов в ФМи сигнале,  $k$  – номер текущего дискрета,  $\Psi_i(m)$  – закон модуляции частоты внутри дискрета,  $i = 1, 2$ .

Законы внутридискретной модуляции  $\Psi_i(m)$  могут быть различны и определяются, как уже указывалось, условиями той или иной задачи, решаемой РЛС.

21.4.3. Цифровое формирование СС с различными законами внутримпульсной модуляции реализуется следующим образом. Вследствие того, что из всех СС с непрерывной полной фазовой функцией, ЛЧМ-сигнал является наиболее исследованным, то целесообразно его взять в качестве «эталонного» объекта. В этом случае, полные фазовые функции, описанные выражениями (21.8) и (21.9) при  $m = 2$ , будут иметь вид

$$\Psi_1^{(2)}(n) = \exp \left[ j \left( \left( \frac{\pi}{N} \left| n-1 - \frac{M-1}{2} \right|^2 \right) \pm \varphi_d n \right) \right], \quad (21.17)$$

$$\Psi_2^{(2)}(n) = \exp \left[ j \left( \left( \frac{\pi}{N} \left( \left( \frac{M-1}{2} \right)^2 - \left| n-1 - \frac{M-1}{2} \right|^2 \right) \right) \pm \varphi_d n \right) \right]. \quad (21.18)$$

В дальнейшем будем рассматривать сигналы с противоположными законами внутримпульсной частотной модуляции со значениями баз  $B = B^{(m)} = 8, 32, 64$  поскольку подобные значения могут быть легко реализованы на современных цифровых микропроцессорах. Выбор количества импульсов в пачках должен производиться из тех соображений, что в современных РЛС стремятся использовать минимально возможное их количество.

Учитывая, что минимальная величина кода ФМи сигнала (число дискретов) равна  $N = 4$ , то количество сигналов в пачке равно  $2N = 8$ . Если же будет использован восьмиразрядный D-код ( $N = 8$ ), то количество сигналов в пачке будет равно  $2N = 16$ .

Очевидно, что база пачки  $B_n^{(m)}$  будет зависеть от количества импульсов  $2N$  в пачке, числа дискретов  $N$  в каждом импульсе и базы  $B^{(m)}$  каждого дискрета и может быть определена по формуле  $B_n^{(m)} = 2N^2 B^{(m)}$ .

В табл. 21.1 приведены величины баз пачек  $B_n^{(m)}$  в зависимости от баз дискретов  $B^{(m)}$  для количества импульсов в пачке 8 ( $N = 4$ ) и 16 ( $N = 8$ ).

Таблица 21.1

Величины баз пачек  $B_n^{(m)}$  в зависимости от величины баз дискретов  $B^{(m)}$

$B^{(m)}$	8	16	32	48	64	96	128
$B_n^{(m)} (N=4)$	256	512	1024	1536	2048	3072	4096
$B_n^{(m)} (N=8)$	1024	2048	4096	6144	8192	12288	16384

Исходя из выбранной величины максимального значения базы дискрета  $B^{(m)} = 128$  и необходимости выполнения условия  $\Delta\varphi_{\text{max}}^{(m)} < \pi$  минимальное количество комплексных объектов на интервале времени  $\tau_d$ , будет равно  $M = 65$ .

Учитывая результаты, приведенные в табл. 21.1 и требования минимального количества сигналов в пачке, целесообразно принять количество сигналов в ансамбле  $2N = 8$ , что соответствует применению для формирования ФМи сигнала D-кода с  $N = 4$ .

Для этого случая, как следует из (21.11), величина  $n$ , будет равна 1 или 65, т.к. только при этих величинах значения полной фазовой функции будут максимальны.

Поскольку требуемая величина базы дискрета  $B^{(m)}$  зависит от величины бина, то, далее, в соответствии с выражением (21.12), определим значения  $N^{(m)}$ , которые будут равны величинам, приводимым в табл. 21.2.

Таблица 21.2

Величины  $N^{(m)}$  в зависимости от величины дискрета  $B^{(m)}$

$B^{(m)}$	$N^{(2)}$	$N^{(3)}$	$N^{(4)}$
8	16900	823940	35709700
16	4225	205985	8927425
32	1056	51496	2231856
48	528	25748	1115928
64	264	12874	557964
96	132	6437	278982
128	66	3218	139491

Определим соотношения между параметрами зондирующего сигнала и величиной  $\varphi_d$ , определяемой доплеровской частотой  $F_d$ , равной линейному набегу по фазе от отчета к отчету, входящей в выражения (21.8) и (21.9) и зависящей от радиальной скорости цели.

Известно, что доплеровская частота  $F_d$  связана с несущей частотой сиг-

нала соотношением

$$F_d = \frac{2V_r}{c} f_0, \quad (21.19)$$

где  $f_0$  (Гц) – несущая частота сигнала;  $V_r$  (м/с) – радиальная скорость цели;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света.

Из выражения (21.11) следует, что максимальный набег по фазе сложного сигнала от отчета к отчету в двух квадратурных каналах равен  $\pm \varphi_{\max} = \pm \pi$ . Однако, учитывая, что при таком фазовом сдвиге четные и нечетные последовательности в алгоритме селекции сигналов движущихся целей «меняются» местами, то, следовательно, диапазон однозначности в данном случае будет ограничен величиной  $\pm \varphi_{\max} = \pm \pi/2$ . Как следует из теоремы Котельникова, этой величине  $\varphi_{\max}$  соответствует полоса сигнала  $\Delta F$  в каждом квадратурном канале.

Тогда нетрудно показать, что  $\pm \varphi_d = \frac{\pm \pi F_d}{2\Delta F}$  (рад).

Подставляя в последнее выражение значение  $F_d$  из (21.19) получаем

$$\pm \varphi_d = \pm \frac{f_0 V_r}{\Delta F c} \pi \text{ (рад)}.$$

С другой стороны, значения  $V_r$  в зависимости от  $\varphi_d$  рассчитываются по формуле

$$\pm V_r = \pm \frac{\Delta F c \varphi_d}{f_0 \pi} \text{ (м/с)}.$$

Задаваясь величиной  $V_r$  (м/с) получаем линейный доплеровский сдвиг по фазе  $\varphi_d$  (рад) от отчета к отчету или, задаваясь величиной линейного доплеровского сдвига  $\varphi_d$  (рад), получаем радиальную скорость  $V_r$  (м/с). При моделировании полагалось, что  $f_0 = 10^{10}$  (Гц),  $\Delta F = 10^6$  (Гц) и  $\pm F_d = \pm 2 \cdot 10^5$  (Гц).

Результаты расчетов в графическом виде приведены на рис. 21.6, на которых изображены ТН ЛЧМ-сигнала (выражение (21.17)), сигнала с КЧМ и кубической ЧМ с «нарастающим» законом изменения ЧМ, описываемые выражением (21.8). На рис. 21.7 изображены ТН ЛЧМ-сигнала (выражение (21.18)), сигнала с КЧМ и кубической ЧМ с «падающим» законом изменения ЧМ (выражение (21.9)) в диапазоне от  $-F_d$  до 0 и от 0 до  $F_d$  соответственно при базах сигналов  $B^{(m)} = 8, 32, \text{ и } 64$  при которых выполняется условие  $\pm \varphi_{\max} = \pm \pi/2$ . Для большей наглядности ТН сигналов на обоих рисунках «разрезаны» вдоль плоскости проходящей по осям  $|\chi(\tau, F)|$  и  $\tau$ .

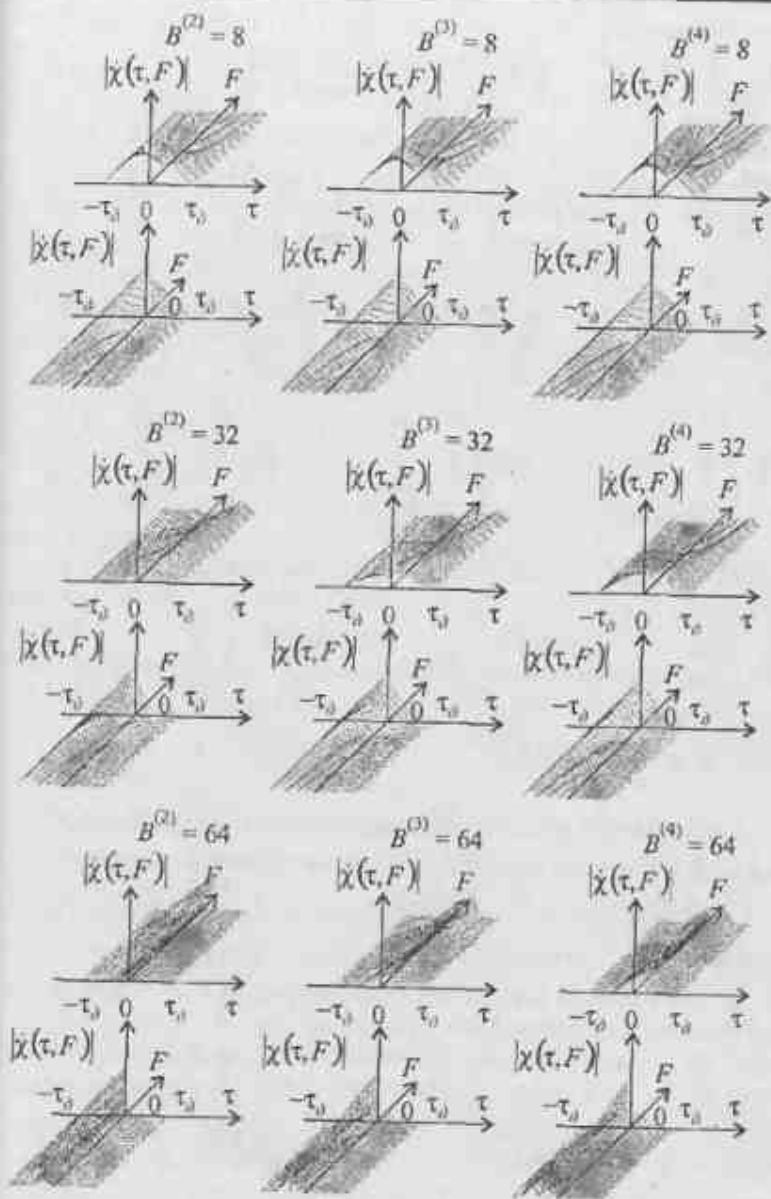


Рис. 21.6. Тела неопределенности сигналов с «нарастающей» ЧМ

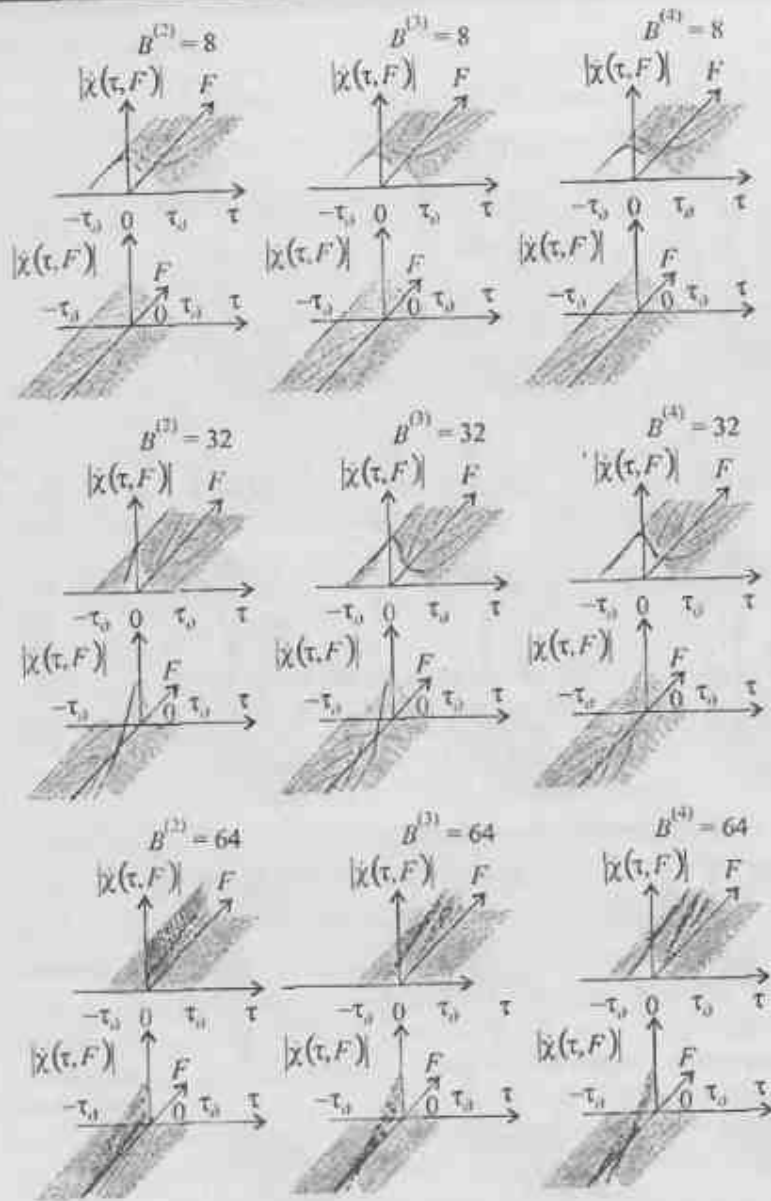


Рис. 21.7. Тела неопределенности сигналов с «падающей» ЧМ

Из рис. 21.6 и рис. 21.7 также видно, что чем больше величина  $m$ , тем сильнее влияние доплеровского сдвига на максимальную величину  $|\chi(\tau, F)|$ . Чем больше величина доплеровского сдвига  $F_D$  и чем больше величина  $m$ , тем сильнее уменьшается максимальное значение  $|\chi(\tau, F)|$ .

Также видно, что чем больше величина  $m$ , тем больше уровень БЛ прилегающих к главному пику сжатых сигналов. Особенно ярко это свойство проявляется при малых базисах ( $B^{(m)} = 8$ ). Это связано с тем, что чем больше величина  $m$ , тем больше время частота сигнала изменяется незначительно в течение его длительности. Это приводит к тому, что при малых базисах  $B^{(m)}$  и больших величинах  $m$  сигнал большую часть своей длительности может рассматриваться как простой и функция  $|\chi(\tau, 0)|$  приближается по форме к треугольной (рис. 21.6 и рис. 21.7,  $B^{(4)} = 8$ ).

Из анализа рис. 21.6 и рис. 21.7 видно, что ТН сигналов для «растающей» и «падающей» ЧМ носят «крестообразный» характер друг относительно друга.

На рис. 21.8 изображены ТН ЛЧМ-сигнала, сигнала с КЧМ и сигнала с кубической ЧМ с «растающим» законом изменения ЧМ с весовой обработкой, а на рис. 21.9 изображены ТН ЛЧМ-сигнала, сигнала с КЧМ и сигнала с кубической ЧМ с «падающим» законом изменения ЧМ с весовой обработкой в частотном диапазоне от  $-F_D$  до 0 и от 0 до  $F_D$  соответственно при базисах сигналов  $B^{(m)} = 8, 32$ , и 64. Здесь также ТН «разрезаны» вдоль плоскости проходящей по осям  $|\chi(\tau, F)|$  и  $\tau$ .

Из сравнительного анализа рис. 21.8 и рис. 21.9 с рис. 21.6 и рис. 21.7 видно, что применение весовой обработки приводит к уменьшению уровня БЛ, прилегающих к главному пику, и расширению главного пика. Также видно, что применение весовой обработки снизило уровень главных пиков ТН, причем особенно сильная чувствительность наблюдается у сигналов с большими значениями  $B^{(m)}$  и  $m$ . Последнее обстоятельство связано с тем, что уменьшение «весов» в одном из краев сигналов, в котором в основном сосредоточена вся та часть сигнала, в которой изменяется частота, приводит к значительному большому эффекту рассогласования сигнала с СФ по сравнению со случаем, когда величина  $m$  мала даже при больших значениях  $B^{(m)}$ .

При расчете спектров сложных сигналов по выражению (21.16) полагалось, что  $N_f = 1040$ ,  $M = 65$ . На рис. 21.10 и рис. 21.11 изображены спектры исследуемых сигналов соответственно для «растающей» и «падающей» ЧМ для значений базиса 8, 32 и 64.



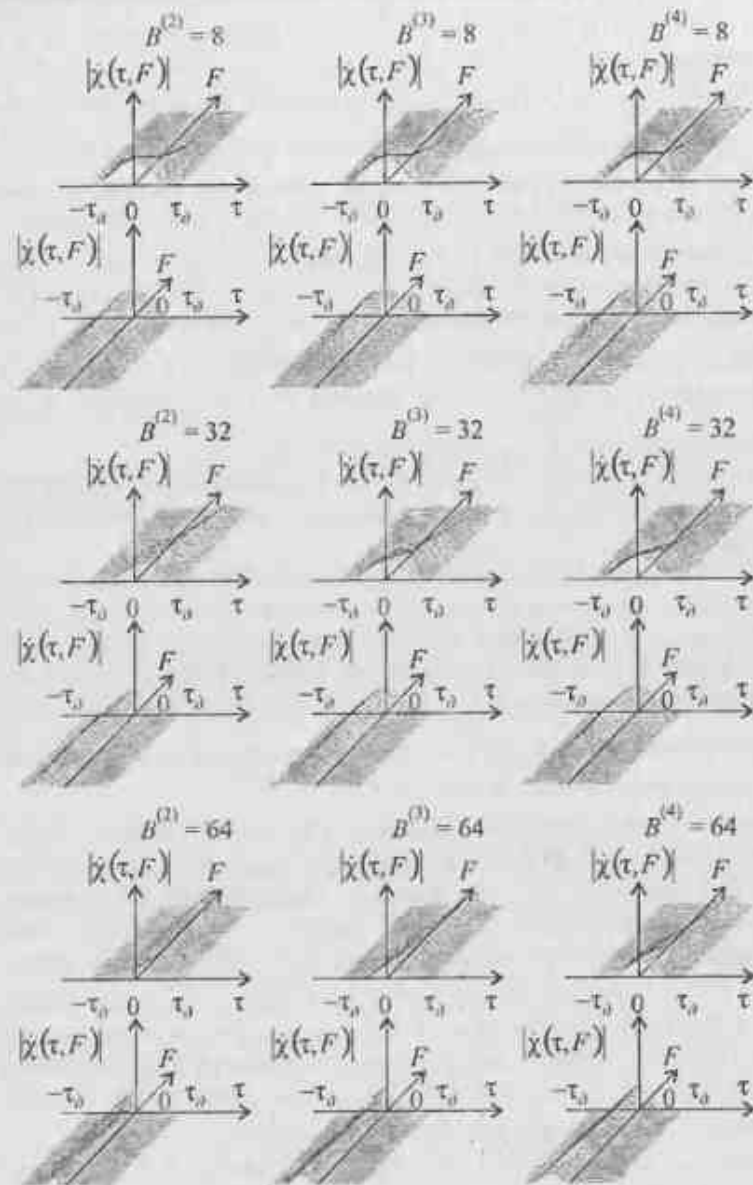


Рис. 21.8. Тела неопределенности сигналов с «растущей» ЧМ с весовой обработкой

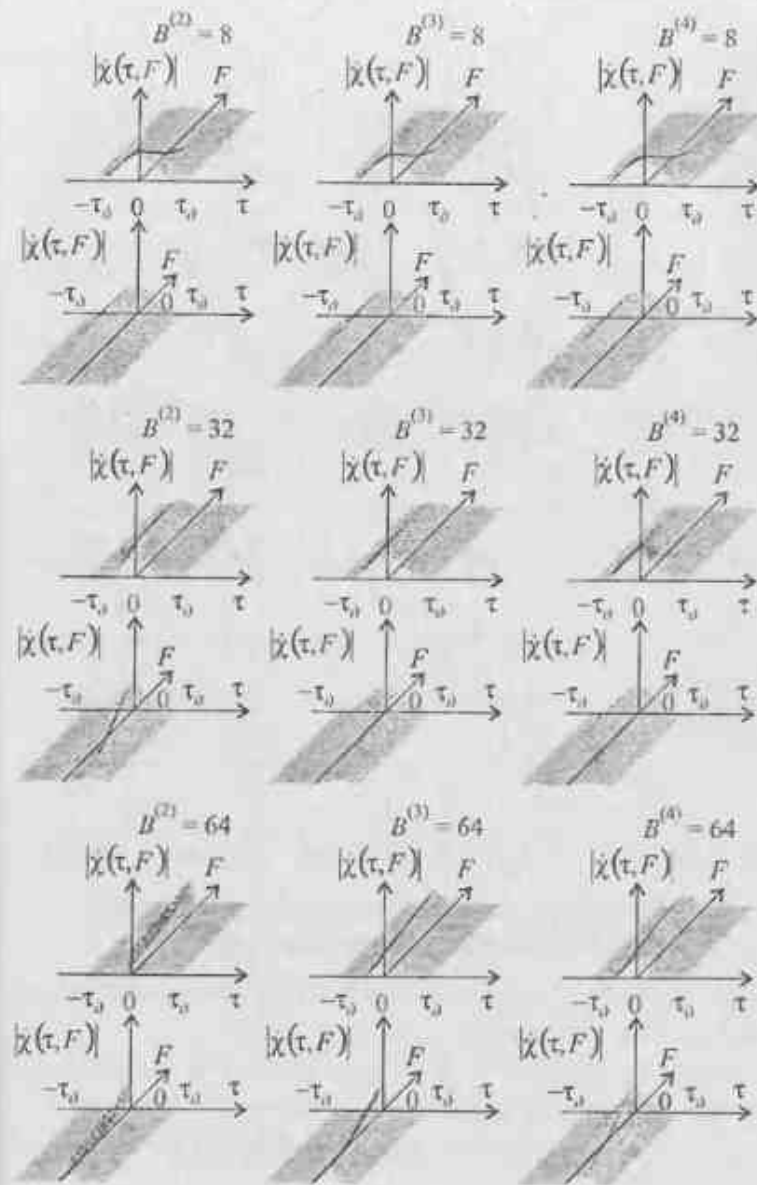


Рис. 21.9. Тела неопределенности сигналов с «падающей» ЧМ с весовой обработкой

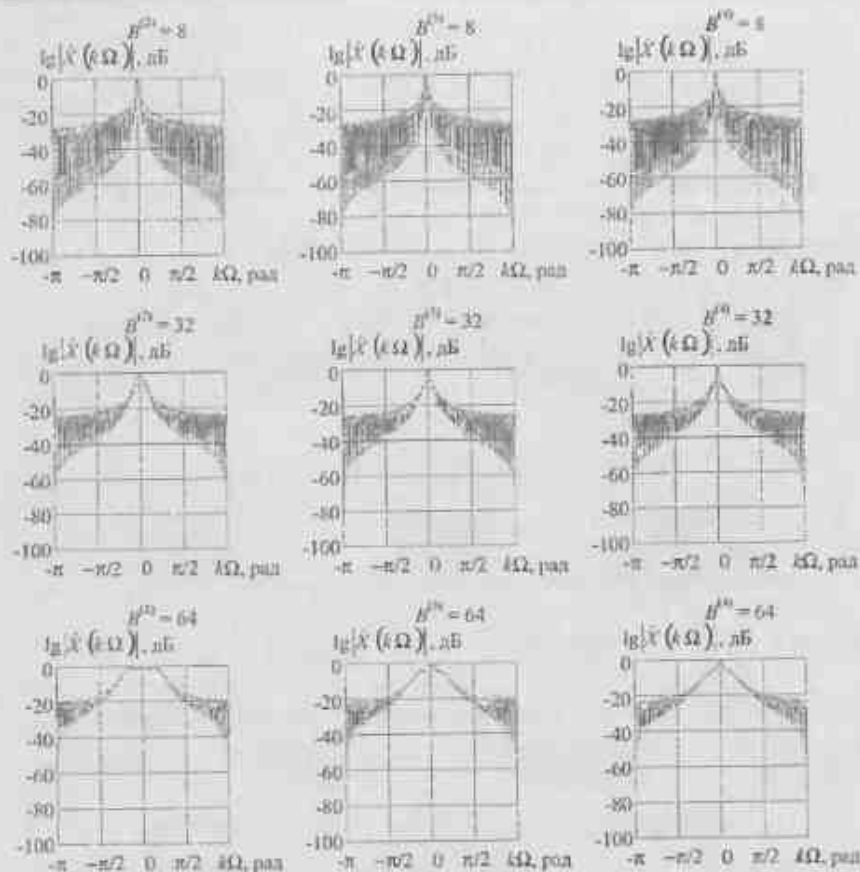


Рис. 21.10. Спектры сложных сигналов для «растающего» закона изменения частоты модуляции

Из анализа полученных графических изображений спектров видно, что:

- чем больше база  $B^{(m)}$ , тем шире спектр;
- при одинаковых базах  $B^{(m)}$  чем больше величина  $m$  тем уже ширина спектра на обусловленном уровне;
- при одинаковых базах  $B^{(m)}$  чем больше величина  $m$  тем менее равномерен спектр сигналов;
  - в случаях, когда  $m = 3, 4$  (за исключением случая  $m = 2$ ), всегда имеется явно выраженный пик в спектре сигнала независимо от величины  $m$ ;
  - чем больше величина  $m$  (за исключением случая  $m = 2$ ), тем сильнее выражен пик в спектре;

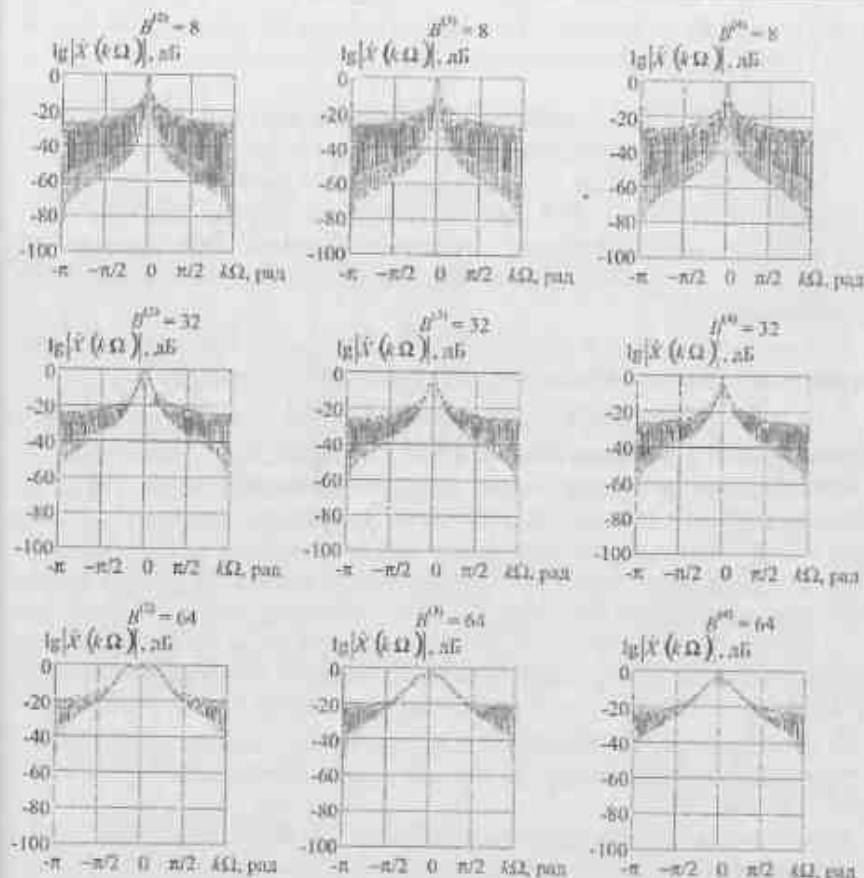


Рис. 21.11. Спектры сложных сигналов для «падающего» закона изменения частоты модуляции

• наличие пика в спектре сигнала для случаев когда  $m = 3, 4$  связано с тем, что имеет место большая относительная длительность во времени колебаний, частота которого изменяется незначительно в пределах длительности дискрета.

• при одинаковых базах  $B^{(m)}$  уровень боковых лепестков падает тем быстрее, чем больше величина  $m$ .

Очевидно, что изменение несущей частоты сигнала приведет к смещению спектра вдоль оси частот в соответствующем направлении, но не приведет к его изменениям.

Свойство сигналов, связанное с ярко выраженным пиком в спектрах сигналов для больших значений  $B^{(m)}$  и  $m$ , может быть использовано для

оценки неизвестной частоты принимаемого сигнала и позволит осуществлять более эффективную селекцию сигналов движущихся целей.

### 21.5. Анализ особенностей формы режекторной амплитудно-частотной характеристики устройства селекции сигналов движущихся целей

Анализ выражения (21.7) показывает, что форма получающейся АЧХ режекторного устройства совпадает с формой АЧХ рекурсивного фильтра второго порядка, обладающего конечной импульсной характеристикой.

Как показано в [1, 12, 26, 37, 72, 85, 126, 127, 170, 173], подобный фильтр имеет нормированную АЧХ, описываемую выражением

$$K(\omega T) = \sin^2(\omega T/2). \quad (21.20)$$

Очевидно, что в случае линейной частотно-временной зависимости откликов сигналов на выходе блоков СФД, изображенных на рис. 21.1, результирующий отклик рассматриваемого устройства должен повторять форму АЧХ, описываемую выражением (21.8). Однако трудности аналитического определения зависимости амплитуды откликов на выходе блоков СФД от доплеровского смещения при использовании ЧМ, законы изменения которой описываются сложными математическими выражениями, затрудняет решение задачи аналитическими методами по определению формы режекторной АЧХ устройства. Поэтому отыскание формы режекторной АЧХ в зависимости от базы одиночного дискрета и используемых законов внутридискретной модуляции можно проводить путем моделирования на ЦВМ [188, 190].

Результаты имитационного моделирования на ЦВМ скоростных характеристик приведены на рис. 21.12 и рис. 21.13 для модулирующих функций дискретов в виде ЛЧМ, квадратичной ЧМ и кубической ЧМ соответственно в виде всей скоростной характеристики и ее начального участка для значений баз  $B^{(m)} = 8, 32$  и  $64$ . Здесь обозначено  $V_{c\text{огр}}$  — максимальная величина скоростной характеристики, соответствующая доплеровской частоте  $F_{D\text{огр}}$ .

Сравнительный анализ полученных результатов имитационного моделирования позволяет сделать выводы:

- вне зависимости от используемой базы дискрета участок режекторной характеристики от 0 до  $V_{c\text{огр}}$  может быть аппроксимирован зависимостью  $K(\omega T) = \sin^2(k\omega T/2)$ , где величина  $k$  зависит от базы дискрета и закона внутридискретной модуляции;

- при малых базах  $B^{(m)}$  формы скоростной характеристики:

### 21. Селекция сигналов движущихся целей

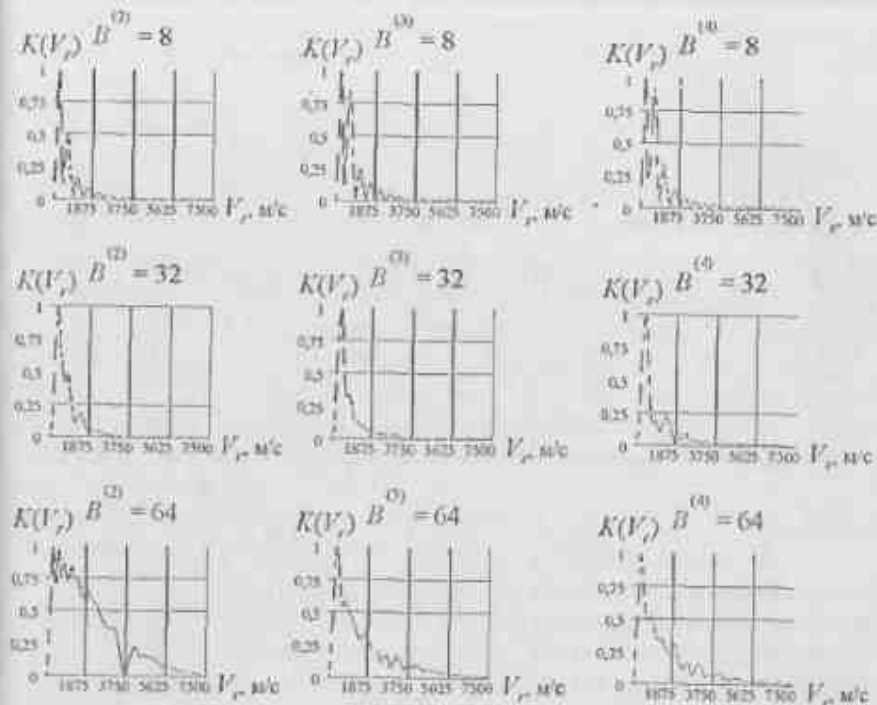


Рис. 21.12. Скоростная характеристика устройства селекции сигналов движущихся целей (ЛЧМ-сигнал, квадратичная ЧМ, кубическая ЧМ)

- для ЛЧМ сигнала ( $m = 2$  — степень полинома, описывающего закон изменения частотной модуляции) уровень пульсаций низок и имеет относительно небольшой диапазон однозначности;

- для сигнала с квадратичной ЧМ ( $m = 3$ ) уровень пульсаций еще ниже, но наблюдается существенный спад коэффициента передачи в анализируемом диапазоне;

- для сигнала с кубической ЧМ ( $m = 4$ ) наблюдается некоторое увеличение пульсаций;

- увеличение базы дискретов  $B^{(m)}$  сохраняет описанные выше свойства, но увеличивает диапазон однозначности определяемый на заранее заданном уровне;

- увеличение базы дискретов  $B^{(m)}$  приближает формы начальных участков «обратных скатов» скоростных характеристик к виду, описываемому выражением (21.20).

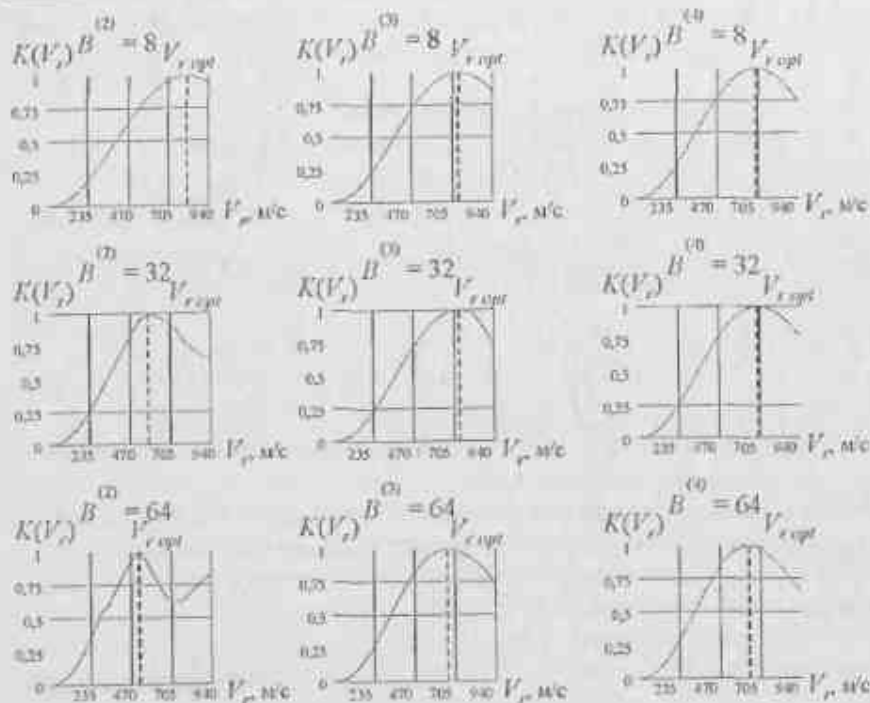


Рис. 21.13. Начальный участок скоростной характеристики устройства селекции сигналов движущихся целей (ЛЧМ-сигнал, квадратичная ЧМ, кубическая ЧМ)

Проведенный анализ режекторных свойств АЧХ устройства, которые были получены путем имитационного моделирования на ЦВМ, показывает, что для анализа характеристик подавления пассивных помех этим устройством аналитическим путем может быть применена методика, разработанная для систем двукратного череспериодного вычитания для случая, когда сигнал движущейся цели имеет доплеровский сдвиг в диапазоне значений от «слепой» до «оптимальной» скорости. Участок АЧХ «обратных скатов» при больших базисах  $B$  имеет форму близкую к прямоугольной. Кроме того, рассмотренное устройство обладает АЧХ, в которых отсутствуют «слепые» скорости в диапазоне частот во много раз превышающем период повторения сигналов.

### 21.6. Выводы

Рассмотрен алгоритм селекции сигналов движущихся целей на основе использования систем ФМн сигналов с внутридискретной модуляцией. Данный алгоритм основан на использовании частотно-временных зависи-

мостей ФН сигналов, используемых в качестве дискретов и законы модуляции которых определяются знаком используемого D-кода ФМн сигнала. При этом производится вычитание тех сигналов друг из друга, у которых кодовое расстояние по Хэммингу максимально.

Показано, что для сложных сигналов, имеющих доплеровский сдвиг, для обеспечения подавления БЛ на большинстве позиций в плоскости  $(\tau, F)$  за исключением области  $\pm \tau_0$  относительно точки  $\tau = 0$  и полученных разностях, необходимо масштабировать две группы разностей таким образом, чтобы у одной из них полностью были компенсированы БЛ находящиеся слева, а у другой – справа относительно указанной области. Полученные результаты суммирования этих двух групп разностей поэлементно перемножаются, что обеспечивает подавление БЛ в указанных областях. При отсутствии доплеровского сдвига и при коэффициенте корреляции помехи, стремящимся к единице, вдоль оси  $\tau$  при  $F = 0$  происходит полное вычитание как главных пиков, так и БЛ.

Рассмотрена работа когерентно-импульсной РЛС с СДЦ, использующей рассмотренный алгоритм обработки ансамблей сложных сигналов.

Определены виды и характерные особенности внутридискретных модулирующих функций с различными законами внутридискретной модуляции.

Рассмотрено влияние вида законов внутридискретной модуляции и их параметров на форму АЧХ режекторного фильтра. Результирующие скоростные характеристики, описывающие соответствующие АЧХ, аппроксимируются функцией  $\sin^2(k\omega T/2)$  на участке от 0 до  $F_{opt}$  и не имеет «слепых» скоростей в диапазоне от 0 до  $V_{r,opt}$ , где  $k$  – коэффициент зависящий от параметров модулирующей функции дискретов. При этом диапазон однозначности по частоте намного превышает частоту повторения зондирующих сигналов, используемой в рассмотренной системе СДЦ.

## 22. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

### 22.1. Вводные замечания

Эффективность РЛС различного назначения может быть определена на основе использования различных критериев, к которым можно отнести: точность воспроизведения сообщений, помехозащищенность, пропускная способность радиосистем, электромагнитная совместимость, надежность, стоимость, масса и объем аппаратуры [193 – 196]. При этом оптимизацию обнаружителя можно провести по ряду показателей качества, к которым относятся вероятность пропуска сигнала, вероятность ложной тревоги (ЛТ), требуемая чувствительность системы и пороговые сигналы, определяемые через характеристики обнаружения.

Поскольку заданная чувствительность характеризует реальную систему, то для оценки ее эффективности наиболее часто используют характеристики обнаружения. В общем случае характеристики обнаружения определяются функциональной зависимостью вида

$$\tilde{D} = f(F, n, q, m, B_n),$$

где  $\tilde{D}$  – вероятность правильного обнаружения;  $F$  – вероятность ЛТ;  $n$  – число импульсов в пачке;  $q$  – отношение мощностей сигнала и помехи или сигнала и собственного шума;  $m$  – параметр, характеризующий закон внутрискретной модуляции;  $B_n = nB$  – база пачки из  $n$  импульсов, каждый из которых имеет базу  $B = kB^{(m)}$ ,  $k$  – количество дискретов в импульсе,  $B^{(m)}$  – база дискрета. Отсюда видно, что  $B_n = nkB^{(m)}$ .

Для полностью известных сигналов такой расчет производится по формулам [1, 173]

$$F = \int_c^{\infty} W(u/H_0) du,$$

$$\tilde{D} = \int_c^{\infty} W(u/H_1) du,$$

где  $W(u/H_0)$  и  $W(u/H_1)$  – одномерные плотности распределения реализации  $u$  на выходе СФ при условии, что сигнала в аддитивной смеси сигнала и шума нет ( $H_0$ ) и он присутствует ( $H_1$ );  $c$  – пороговый уровень выбираемый по критерию Неймана-Пирсона;  $F$  и  $\tilde{D}$  – вероятности ЛТ и правильного обнаружения соответственно.

В ряде случаев в виду больших математических трудностей аналитическое решение указанной задачи оказывается невозможным. С другой стороны, не всегда возможно провести весь комплекс натурных испытаний при вводе в строй тех или иных РЛС. Поэтому одним из наиболее эффективных методов получения требуемых результатов является статистическое моделирование исследуемых РЛС.

Для проведения статистического моделирования необходимо предварительно рассмотреть статистические модели сигналов, отраженных от подстилающей поверхности в зависимости от их отражающих свойств. Последнее обстоятельство определяет особенности моделей коррелированных помех при решении задач селекции движущихся целей. Очевидно, что также необходимо иметь статистические модели сигналов, отраженных от движущихся целей.

С другой стороны, основной особенностью статистического моделирования является проведение большого числа испытаний. Это требует при малых величинах вероятностей ЛТ и достаточно сложных алгоритмах обработки имитируемых РЛС неприемлемо больших временных затрат. Поэтому представляет интерес рассмотрение подхода, называемого методом экстремальных статистик, позволяющего сократить количество испытаний для достоверного определения величин, имеющих малые значения вероятностей [1].

На основе полученных моделей сигналов, помех и шумов проводится имитационное моделирование алгоритмов работы РЛС, рассмотренных в главах 20 и 21 при различных значениях вероятностей ЛТ, законов модуляции и баз используемых ансамблей сложных сигналов.

### 22.2. Статистические модели отраженных сигналов

22.2.1. Как показано в работах [1, 126, 173], реализация на выходе линейного тракта радиолокационного приемника является узкополосным случайным процессом и может быть представлена в виде

$$\dot{U}(t) = \dot{S}(t) + \dot{n}(t) = E_x(t) \exp[-j(\omega_0 \pm \Omega_{DS})t + \Theta(t) + \varphi] +$$

$$+ E_n(t) \exp[-j(\omega_0 t + \varphi_n(t))],$$

где  $S(t)$  – полезный сигнал;  $E_S(t)$  – функция, описывающая закон амплитудной модуляции сигнала;  $\omega_0 = 2\pi f_0$  – центральная частота узкополосного колебания;  $\Omega_{DS}$  – доплеровское смещение частоты отраженного сигнала;  $\Theta(t)$  – закон фазовой модуляции излучаемого сигнала;  $\varphi$  – начальная фаза отраженного сигнала;  $\dot{n}(t)$  – узкополосная помеха;  $E_n(t)$  – огибающая помехи;  $\varphi_n(t)$  – фазовая модуляция помехи.

Огибающая смеси и узкополосной помехи имеет вид

$$\dot{X}(t) = E(t) \exp[-j(\pm \Omega_{DS} t + \Psi(t) + \varphi_0)] = A(t) + jC(t),$$

где  $A(t) = E(t) \cos(\pm \Omega_{DS} t + \Psi(t) + \varphi_0)$  и  $C(t) = E(t) \sin(\pm \Omega_{DS} t + \Psi(t) + \varphi_0)$  – квадратурные составляющие аддитивной смеси сигнала и помехи;  $E(t)$  – огибающая смеси;  $\Psi(t)$  – закон фазовой модуляции смеси;  $\varphi_0$  – начальная фаза смеси.

Как показано в работах [1, 126, 173], эффективная отражающая поверхность облучаемого объекта есть случайная величина. Для пачки отраженных сигналов из  $n$  импульсов следующих друг за другом через период повторения  $T_n$ , плотность распределения вероятностей этой случайной величины описывается  $2n$ -мерной нормальной плотностью распределения вероятностей, которая имеет вид

$$W_{2n}(\vec{x}_S) = (2\pi)^{-n} \det_{nS}^{-1/2} M_{2nS} \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{2} (\vec{x}_S^T - \vec{m}_S^T) M_{2nS}^{-1} (\vec{x}_S - \vec{m}_S) \right] \right\},$$

где  $\vec{x}_S = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{2n})^T = (\dot{u}_1, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_n, \dot{u}_n)^T$  –  $2n$ -мерный вектор-столбец с компонентами  $\dot{u}_k$  и  $\dot{u}_k$ , соответствующие квадратурным составляющим аддитивной смеси сигнала, помехи и шума, получаемых с выходов блока образования квадратурных составляющих  $A(t)$  и  $C(t)$  для  $k$ -го импульса;  $M_{2nS}$  – корреляционная матрица порядка  $(2n \times 2n)$  с элементами

$$\begin{aligned} r_{2k-1, 2l-1} &= \overline{\dot{x}_{2k-1} \dot{x}_{2l-1}} = \overline{\dot{u}_k \dot{u}_l}, \quad r_{2k, 2l} = \overline{\dot{x}_{2k} \dot{x}_{2l}} = \overline{\dot{u}_k \dot{u}_l}, \\ r_{2k-1, 2l} &= \overline{\dot{x}_{2k-1} \dot{x}_{2l}} = \overline{\dot{u}_k \dot{u}_l}, \quad r_{2k, 2l-1} = \overline{\dot{x}_{2k} \dot{x}_{2l-1}} = \overline{\dot{u}_k \dot{u}_l}, \end{aligned} \quad (22.1)$$

$k, l = \overline{1, n};$

$\vec{m}_S^T = (m_{s1}, m_{s2}, \dots, m_{s2n})^T$  – вектор, равный математическому ожиданию вектора  $\vec{x}_S$ ;  $\det M_{2nS}$  – определитель матрицы  $M_{2nS}$ .

Показатель экспоненты – положительно определенная квадратичная форма

$$(\vec{x}_S^T - \vec{m}_S^T) M_{2nS}^{-1} (\vec{x}_S - \vec{m}_S) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \tilde{r}_{ij} (\tilde{x}_{Si} - m_{sSi}) (\tilde{x}_{Sj} - m_{sSj}) > 0, \quad (22.2)$$

где  $M_{2nS}$  – невырожденная матрица ( $\det M_{2nS} \neq 0$ ), имеющая обратную

$$M_{2nS}^{-1} = [\tilde{r}_{ij}], \quad M_{2nS} M_{2nS}^{-1} = \mathbf{I}; \quad (22.3)$$

$\mathbf{I}$  – единичная матрица размера  $(2n \times 2n)$ .

Конкретный вид матрицы  $M_{2nS}$  определяется энергетическим спектром сигнала и величиной доплеровского смещения средней частоты зондирующего сигнала.

Можно показать [1], что элементы матрицы определяются из соотношений

$$\begin{aligned} r_{S(2k-1, 2l-1)} &= r_{S(2k, 2l)} = \\ &= \cos[\varphi_{DS}(k-l)] \int_0^\infty F_S(f) \cos[2\pi(f-f_0)(k-l)T_n] df, \end{aligned} \quad (22.4)$$

$$\begin{aligned} r_{S(2k-1, 2l)} &= -r_{S(2k, 2l-1)} = \\ &= \sin[\varphi_{DS}(k-l)] \int_0^\infty F_S(f) \cos[2\pi(f-f_0)(k-l)T_n] df, \end{aligned} \quad (22.5)$$

где  $\varphi_{DS} = \Omega_{DS} T_n = 4\pi \frac{V_r}{\lambda} T_n$  – доплеровский сдвиг фазы за период повторения  $T_n$ ;  $V_r$  – радиальная составляющая скорости цели;  $\lambda$  – длина волны;  $F_S(f)$  – энергетический спектр сигнала, симметричный относительно промежуточной частоты  $f_0$ ;  $k, l$  – номера импульсов в пачке.

Часто на практике ширина каждой спектральной компоненты энергетического спектра эхо-сигналов составляет единицы герц. Поэтому за время облучения цели пачка эхо-сигналов практически постоянна, т. е. полезный сигнал является неслучайной функцией времени (нефлуктуирующая цель) [1].

Будем в дальнейшем полагать, что полезный сигнал может быть двух видов:

- при решении задачи обзора земной поверхности полезным является сигнал, отраженный от земной поверхности и принимаемый на фоне собственного шума приемного устройства, причем полагается, что  $\sigma_s^2 \ll \sigma^2$ , где  $\sigma_s^2 = P_c$  – мощность полезного сигнала;  $\sigma^2 = P_{c.ш.}$  – мощность собственного шума приемного устройства, который полагается «белым»;

- при решении задачи селекции сигнала движущейся цели та часть сиг-

нала, которая отражается от земной поверхности, представляет собой коррелированную помеху, а полезной является та часть сигнала, которая отражается от движущейся цели, является полезной, причем полагается, что выполняется условие  $\sigma_p^2 \gg \sigma_s^2 \gg \sigma^2$ , где  $\sigma_p^2 = P_{\text{ксп.н}}$  — мощность коррелированной помехи.

Пассивная (коррелированная) помеха представляет собой суперпозицию большого числа независимых слагаемых, т. е. является случайным гауссовым процессом. В теоретических исследованиях обычно предполагают, что она стационарна [1, 127, 197 – 199]. Многомерная плотность вероятности помехи  $w_{2n}(\bar{x}_p)$ , а также элементы корреляционной матрицы, описываются соотношениями, аналогичными (22.1), (22.4), (22.5).

В радиолокационном приемнике на помеху накладываются его собственные шумы, поэтому корреляционная матрица смеси помехи и собственного шума равна  $M_{2npN} = M_{2np} + M_{2nN}$ , а элементы матрицы собственного шума

$$r_{N(2k-1, 2l-1)} = r_{N(2k, 2l)} = \begin{cases} \sigma^2 & \text{при } k = l, \\ 0 & \text{при } k \neq l, \end{cases}$$

$$r_{N(2k-1, 2l)} = -r_{N(2k, 2l-1)} = 0.$$

В дальнейшем под помехой будем понимать сумму пассивной помехи и собственных шумов приемника.

При аппроксимациях энергетических спектров сигнала и помехи, как правило, используются следующие соотношения [1, 126, 127, 197 – 199]:

• резонансный спектр

$$F(f)_p = \left[ 1 + 2 \left( \frac{f - f_0}{\Delta f} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (22.6)$$

• гауссов спектр

$$F(f)_p = \exp \left[ -2,8 \left( \frac{f - f_0}{\Delta f} \right)^2 \right]. \quad (22.7)$$

Соответствующие коэффициенты корреляции имеют вид

$$R(\tau)_p = \exp[-\pi \Delta f^2 |\tau|], \quad (22.8)$$

$$R(\tau)_p = \exp \left[ -\frac{\pi^2}{2,8} (\Delta f \tau)^2 \right]. \quad (22.9)$$

В нашем случае будем полагать, что  $\tau = T_n$ .

При этом элементы корреляционных матриц помехи и сигнала с шумом с учетом (22.4), (22.5) имеют вид:

$$\begin{aligned} & \text{• для резонансного спектра} \\ r_{2k-1, 2l-1} &= r_{2k, 2l} = \cos[\varphi_D(k-l)] \exp\{-\pi \Delta f T_n |k-l|\}, \\ r_{2k-1, 2l} &= -r_{2k, 2l-1} = \sin[\varphi_D(k-l)] \exp\{-\pi \Delta f T_n |k-l|\}; \end{aligned} \quad (22.10)$$

• для гауссова спектра

$$\begin{aligned} r_{2k-1, 2l-1} &= r_{2k, 2l} = \cos[\varphi_D(k-l)] \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{2,8} [\Delta f T_n (k-l)]^2 \right\}, \\ r_{2k-1, 2l} &= -r_{2k, 2l-1} = \sin[\varphi_D(k-l)] \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{2,8} [\Delta f T_n (k-l)]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (22.11)$$

В дальнейшем, учитывая то обстоятельство, что моделируемые процессы, имеющие экспоненциальные функции корреляции, имеют резонансный спектр, обладающий более «пологими» склонами по сравнению с гауссовым спектром, то подобные модели и будут использоваться. Это позволит получать результаты, соответствующие наиболее неблагоприятным условиям функционирования исследуемых алгоритмов.

Тогда последовательности коррелированных нормальных чисел  $\bar{s}_i$  и  $\bar{p}_i$  в векторной форме получаются с помощью рекуррентных соотношений [1, 191, 192, 197 – 199]

$$\bar{s}_i = R_s(T_n) \bar{s}_{i-1} + \sigma_s \sqrt{1 - R_s^2(T_n)} \bar{n}_{si}, \quad (22.12)$$

$$\bar{p}_i = R_p(T_n) \bar{p}_{i-1} + \sigma_p \sqrt{1 - R_p^2(T_n)} \bar{n}_{pi}. \quad (22.13)$$

где  $R_s(T_n)$  — коэффициент межпериодной корреляции сигнала;  $R_p(T_n)$  — коэффициент межпериодной корреляции коррелированной (пассивной) помехи;  $\sigma_s$  — среднеквадратическое отклонение сигнала;  $\sigma_p$  — среднеквадратическое отклонение коррелированной помехи;  $\bar{n}_{si} = (n_{si}^1, n_{si}^2)$  и  $\bar{n}_{pi} = (n_{pi}^1, n_{pi}^2)$  — отсчеты некоррелированных нормальных чисел с параметрами (0, 1).

В квадратурной форме выражения (22.12) и (22.13) принимают вид

$$s_{iRc} = R_s(T_n) s_{(i-1)Rc} + \sigma_s \sqrt{1 - R_s^2(T_n)} n_{si}^1, \quad (22.14)$$

$$s_{iIn} = R_s(T_n) s_{(i-1)In} + \sigma_s \sqrt{1 - R_s^2(T_n)} n_{si}^2.$$

$$p_{iRc} = R_p(T_n) p_{(i-1)Rc} + \sigma_p \sqrt{1 - R_p^2(T_n)} n_{pi}^1, \quad (22.15)$$

$$P_{l_{\text{об}}} = R_p(T_n)P_{(l-1)_{\text{об}}} + \sigma_p \sqrt{1 - R_p^2(T_n)} n_{pl}$$

22.2.2. В зависимости от решаемых задач моделирования (обзора земной поверхности или селекции сигналов движущихся целей), учет их особенностей может позволить упростить процедуры моделирования и сократить количество операций без потери качества результатов моделирования.

Очевидно, что добавление собственного шума к сигналу  $x(t)$  (который является либо отражением от подстилающей поверхности, либо аддитивной смесью отражений от подстилающей поверхности и от движущейся цели) увеличивает мощность случайного процесса и уменьшает коэффициент корреляции  $R_x(T_n)$ , который становится равным [1]

$$R_{N_x}(T_n) = \frac{q^2 R_x(T_n) + R_N(T_n)}{q^2 + 1}, \quad (22.16)$$

где  $q^2 = \sigma_x^2 / \sigma^2$ ;  $R_N(T_n)$  – межпериодный коэффициент корреляции собственного шума и который равен нулю.

Тогда выражение (22.16) преобразуется к виду [199]

$$R_{N_x}(T_n) = \frac{q^2}{q^2 + 1} R_x(T_n). \quad (22.17)$$

Проведем анализ этого выражения для задач обзора земной поверхности и выделения сигналов движущихся целей.

Для задач обзора земной поверхности полезным сигналом является сигнал, отраженный от подстилающей поверхности и имеющий коэффициент корреляции  $R_x(T_n) = R_s(T_n)$ . Поскольку применяется система широкополосных сигналов, мощность которых на входе соответствующего СФ меньше мощности собственного шума, то выполняется условие  $\sigma_s^2 = \sigma_x^2 \ll \sigma^2$ , а, следовательно,  $q^2 \ll 1$ , то выражение (22.17) может быть преобразовано к виду

$$R_{N_x}(T_n) = R_{N_s}(T_n) \approx q^2 R_s(T_n). \quad (22.18)$$

По условиям приема коэффициент корреляции  $R_x(T_n)$  сигнала, отраженного от подстилающей поверхности, стремится к единице.

Существенного сокращения количества операций при моделировании можно получить, если положить в этом случае в выражении (22.18) величину  $R_x(T_n) = 1$ . Тогда величина  $R_{N_x}(T_n) = q^2$ .

Оценим погрешность, сопровождающую указанную замену, и определим ее в виде  $\xi = \frac{R_{N_x}(T_n = 1) - R_{N_x}(T_n < 1)}{q^2 + 1} 100\%$  при различных значениях

$R_x(T_n)$  и отношениях сигнал/шум  $q$ .

На рис. 22.1 приведены кривые погрешности  $\xi$  в зависимости от  $R_x(T_n)$  при различных  $q$ , вычисленных по последнему выражению.

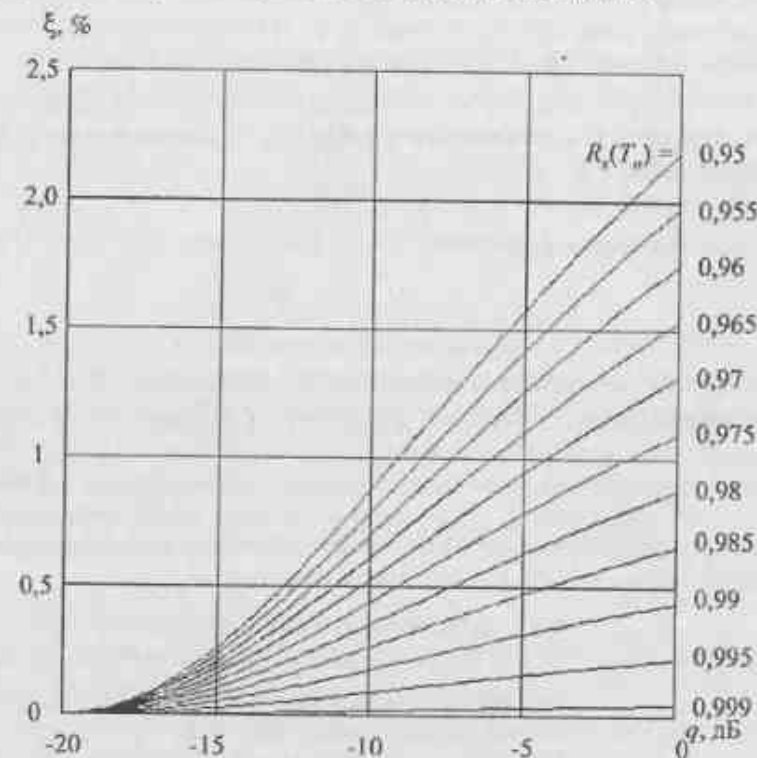


Рис. 22.1. Зависимость погрешности аппроксимации коэффициента корреляции  $R_x(T_n)$  величиной равной единице от отношения сигнал/шум

Из рис. 22.1 видно, что чем меньше отношение сигнал/шум  $q$  и чем больше коэффициент межпериодной корреляции  $R_x(T_n)$ , тем меньше погрешность  $\xi$ . Из полученных зависимостей следует, что для упрощения алгоритма моделирования в задачах обзора земной поверхности и сокращения затрат машинного времени целесообразно заменить коэффициент межпериодной корреляции  $R_x(T_n)$  из единицу.

В задаче выделения сигналов движущихся целей величина  $q^2 \gg 1$ , а, следовательно,  $\xi$  резко возрастает. Соответственно выражение (22.17) пре-



образуется к виду  $R_{N_i}(T_n) \approx R_p(T_n)$ . В этом случае, при формировании пачек импульсов, необходимо пользоваться рекуррентными соотношениями (22.12), (22.14) или (22.13), (22.15).

22.2.3. Будем полагать, что в моделируемых РЛС используются фазированные антенные решетки, что соответствует скачкообразному характеру перемещения антенного луча по азимуту при сканировании пространства.

Тогда каждый принимаемый  $i$ -й импульс из пачки эхо-сигналов может быть представлен в виде двумерного вектора  $\vec{x}_i$  с компонентами  $(x_i^1, x_i^2)$  и представляет собой векторную сумму

$$\vec{x}_i = \vec{s}_i + \vec{p}_i + \vec{n}_i,$$

или в виде квадратурных компонент

$$x_i^1 = s_i^1 + p_i^1 + n_i^1,$$

$$x_i^2 = s_i^2 + p_i^2 + n_i^2.$$

Здесь  $\vec{s}_i = (s_i^1, s_i^2)$  – вектор, описывающий полезный сигнал и соответствующий либо отражению от земной поверхности для задачи обзора земной поверхности, либо движущейся цели в задаче селекции сигналов движущихся целей, причем этот сигнал имеет либо нулевой доплеровский сдвиг («слепая» скорость), либо доплеровский сдвиг, соответствующий такой скорости цели, которой соответствует максимальный отклик амплитудно-частотной характеристики (т.е. соответствует «оптимальной» скорости цели  $V_{\text{эфф}}$ );

$$\vec{p}_i = (p_i^1, p_i^2) = \begin{cases} 0 & \text{– в задаче обзора земной поверхности;} \\ p_i & \text{– в задаче выделения сигнала движущейся цели} \\ & \text{соответствующей коррелированной помехи имеющей} \\ & \text{нулевой доплеровский сдвиг;} \\ \vec{n}_i = (n_i^1, n_i^2) & \text{– соответствует отсчетам квадратурных компонент собственного шума.} \end{cases}$$

При постоянной скорости цели сигнальные векторы  $\vec{x}_i$  имеют доплеровский сдвиг от периода к периоду на угол  $\pm\varphi_{DS} \leq \pm\pi$ . Знак зависит от направления доплеровского сдвига.

В общем случае, как показано в [1], амплитуды векторов  $\vec{x}_i$  модулируются диаграммой направленности

$$\vec{x}_i^T = G_i \mathbf{V}_i \vec{x}_i^T, \quad (22.19)$$

где  $G_i$  – ордината нормированной диаграммы направленности антенны, соответствующая  $i$ -му импульсу пачки и в нашем случае, с учетом сделанных выше замечаний,  $G_i = 1$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

$\mathbf{V}_i$  – матрица двумерного поворота вектора  $\vec{x}_i$  на угол  $i\varphi_{DS}$  [61 – 64]

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} \cos i\varphi_{DS} & -\sin i\varphi_{DS} \\ \sin i\varphi_{DS} & \cos i\varphi_{DS} \end{bmatrix};$$

$\vec{X}_1 = (x_1^1, x_1^2)$  – двумерный вектор сигнального напряжения находящийся на первой позиции в пачке.

Тогда, квадратурные составляющие соотношения (22.19) будут иметь вид

$$X_i^1 = X_1^1 \cos i\varphi_{DS} - X_1^2 \sin i\varphi_{DS}, \quad (22.20)$$

$$X_i^2 = X_1^1 \sin i\varphi_{DS} + X_1^2 \cos i\varphi_{DS}.$$

При этом величины  $X_i^1, X_i^2$  рассчитываются из условия, что  $R_i(T_n) = 1$ , при  $q^2 \ll 1$ , либо из выражений (22.14) и (22.15) для случая  $q^2 \gg 1$ .

### 22.3. Метод экстремальных статистик и генерирование «белого» шума на ЦВМ

22.3.1. При статистическом моделировании событий имеющих малую вероятность, например, определение вероятностей ЛТ, имеющих величины порядка  $F = 10^{-3} - 10^{-5}$ , методика их вычисления путем непосредственного применения метода Монте-Карло приводит к значительным затратам машинного времени.

Как показано в [1], минимально необходимое число повторений опыта  $N_{\text{min}} = 10/F$ , что при малых значениях  $F$  приводит к чрезвычайно большим затратам машинного времени.

Выходом из этого положения является применение метода экстремальных статистик. Сущность этого метода состоит в следующем. Пусть  $W(v)$  и  $F(v)$  – плотность вероятности и интегральная функция распределения случайной величины  $v$ , а  $W'(v)$  – производная от  $W(v)$ . Если для больших положительных значений  $v$  справедливо соотношение [1]

$$\frac{W(v)}{1-F(v)} = -\frac{W'(v)}{W(v)},$$

то правый «хвост» распределения принадлежит к экспоненциальному классу и представляется в виде

$$F(v) = 1 - \frac{1}{n} \exp[-\alpha_n(v - \mu_n)].$$

Если же для больших отрицательных значений  $v$  справедливо соотношение

$$\frac{W(v)}{F(v)} = \frac{W'(v)}{W(v)},$$

то к экспоненциальному классу принадлежит левый «хвост» распределения. В этом случае он представим в виде

$$F(v) = \frac{1}{n} \exp[\alpha_1(v - \mu_1)].$$

Вероятность ложной тревоги  $F = F(c)$  можно определить из формулы

$$F(c) = \frac{1}{n} \exp[-\alpha_n(c - \mu_n)], \quad (22.21)$$

где  $n$  – число выборочных значений случайной величины  $v$  на входе порогового устройства, использованных для вычисления параметров  $\alpha_n$  и  $\mu_n$ ;  $c$  – величина, определяющая уровень порога, при котором обеспечивается заданная вероятность ложной тревоги  $F$ .

22.3.2. Метод оценки параметров  $\alpha_n$  и  $\mu_n$  основан на первом предельном распределении Гумбеля. Процедура определения этих величин состоит в следующем. Вырабатывается  $N = mn$  значений случайной величины  $v$  на выходе устройства обнаружения (на входе порогового устройства). Числовая последовательность  $\{v\}$  разбивается на  $m$  групп по  $n$  чисел в каждой группе. Во всех группах определяются максимальные значения

$$\frac{v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1}{v_{\max}^1}, \quad \frac{v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2}{v_{\max}^2}, \quad \dots, \quad \frac{v_1^m, v_2^m, \dots, v_n^m}{v_{\max}^m}.$$

Далее находятся среднее и дисперсия максимальных значений

$$m_1[v_{\max}] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_{\max}^i, \quad m_2[v_{\max}] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_{\max}^2,$$

$$\sigma^2[v_{\max}] = \sigma_{\max}^2 = m_2[v_{\max}] - m_1^2[v_{\max}].$$

И, наконец, определяются оценки экстремальных параметров

$$\hat{\alpha}_n = \pi / \sqrt{6} \sigma_{\max}, \quad \hat{\mu}_n = m_1[v_{\max}] - 0,5772 / \hat{\alpha}_n. \quad (22.22)$$

Тогда расчет уровня порога  $c$  для заданных вероятностей ЛТ  $F$  с учетом (22.21) и (22.22) производится согласно выражения

$$c = \hat{\mu}_n - \frac{\ln[nF(c)]}{\hat{\alpha}_n}.$$

Как показано в [1], процедура, основанная на экстремальных статистиках, дает возможность достаточно точно получить величины порогов  $c$  для вероятностей ЛТ  $F = 10^{-4}, 10^{-5}$  при  $N = 10^4$ , что принципиально невоз-

можно при прямом использовании метода Монте-Карло. Тем самым удается сократить число повторений опыта в 10 – 100 раз.

Теоретический выбор значений  $m$  и  $n$ , обеспечивающих при заданном  $N = mn$  наибольшую точность получаемых результатов, затруднителен. Поэтому на практике указанные величины определяются эмпирически.

В нашем случае было взято  $N = 10^4$ ,  $m = 20$ ,  $n = 500$ , что, как показано в [1], обеспечивает приемлемую точность вычислений уровней порогов  $c$  для заданных вероятностей ЛТ  $F$ .

22.3.3. Для генерирования шумов на ЦВМ обычно используется в качестве задающего генератора датчик случайных чисел  $X$ , распределенных по равномерному закону в пределах  $[0, 1]$ . Плотность распределения случайных чисел на этом интервале будет  $W(x) = 1$ . Тогда математическое ожидание этих случайных величин

$$m_x = \int_0^1 xW(x)dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 0,5, \quad (22.23)$$

а, дисперсия равна

$$D_x = \int_0^1 (x - m_x)^2 W(x) dx = \int_0^1 (x - 0,5)^2 dx = \\ = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx + 0,25 \int_0^1 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + 0,25x \Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Генерирование «белого» шума может осуществляться либо по способу обратной функции, либо путем использования сходимости сумм независимых величин к нормальному распределению в силу центральной предельной теоремы [13, 24, 26, 37, 191, 192].

Пусть требуется получить реализацию «белого» шума с параметрами  $[0, 1]$  и пусть используется способ основанный на сходимости сумм независимых величин. Тогда каждое независимое число, принадлежащее гауссовскому распределению, может быть получено путем суммирования двенадцати независимых чисел, имеющих равномерный закон распределения, т.е.

$$v_j = \sum_{f=1}^{12} x_{jf}.$$

Поскольку  $m_v = \sum_{j=1}^{12} m_x$ ,  $D_v = \sum_{j=1}^{12} D_x$ , то с учетом (22.23) и (22.24) полу-

чаем нормальный закон распределения с параметрами [6, 1]. Для получения нормального распределения с параметрами  $[0, 1]$  из каждого полученного

числа  $v_j$  вужно вычесть число шесть

$$v_j = v'_j - 6 = \sum_{j=1}^{12} x_j - 6.$$

При использовании метода комплексной огибающей требуется генерация двух квадратурных реализаций «белого» шума с параметрами [0, 1] которые независимы друг от друга

$$n_i = v_{\text{Re}i} = \sum_{j=1}^{12} x_{\text{Re}j} - 6,$$

$$n_i = v_{\text{Im}i} = \sum_{j=1}^{12} x_{\text{Im}j} - 6$$

и которые могут в дальнейшем использоваться либо непосредственно, либо для формирования коррелированной помехи с заданной функцией корреляции.

#### 22.4. Качественные показатели обнаружения когерентно-импульсной радиолокационной станции обзора земной поверхности

К качественным показателям обнаружения радиолокационных систем относят пороговые сигналы, определяемые по характеристикам обнаружения. Пороговые сигналы это такие сигналы, при которых обеспечивается при заданной величине ЛТ  $F$  заданная вероятность правильного обнаружения на обусловленном уровне, как правило  $0,5\bar{D}$  [1]. Пороговые сигналы, построенные по полученным характеристикам обнаружения, приведены на рис. 22.2 – рис. 22.4. Пороговые сигналы определяются методом статистического моделирования на ЦВМ следующим образом.

На первом этапе генерируется «белый» шум, который пропускается через исследуемую систему, изображенную на рис. 20.1. По выходным отчетам результатов его прохождения через систему, методом экстремальных статистик определяются уровни порогов для вероятностей ЛТ  $F$ , которые равны  $10^{-3}$  (рис. 22.2,а – рис. 22.4,а),  $10^{-4}$  (рис. 22.2,б – рис. 22.4,б),  $10^{-5}$  (рис. 22.2,в – рис. 22.4,в) соответственно.

На втором этапе генерируются ансамбли сложных сигналов, которые в аддитивной смеси с «белым» шумом подаются на вход анализируемой системы. Для заданного отношения сигнал/шум  $q$  на входе системы, в диапазоне значений  $q$  от  $-20$  дБ до  $20$  дБ с шагом равным  $2$  дБ, определяется количество превышений  $n$  уровней порогов с относительно числа испытаний  $N$  в каждой точке  $q$ . Полагается, что величина  $N = 100$  пачек.

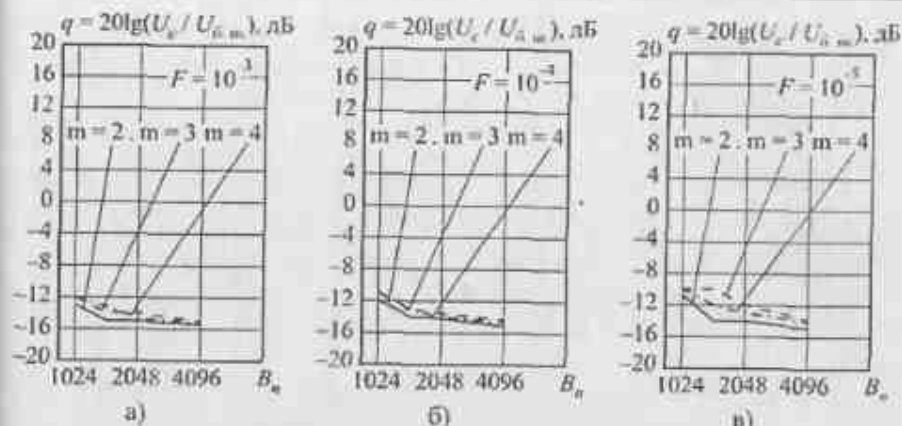


Рис. 22.2. Пороговые сигналы при многократном представлении входной смеси

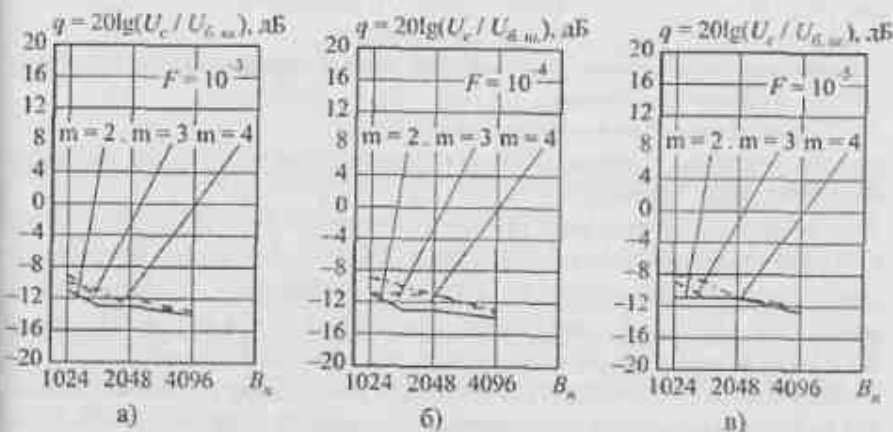


Рис. 22.3. Пороговые сигналы при бинарном представлении входной смеси

Таким образом, оценочные значения характеристик правильного обнаружения  $\bar{D}$  определяются отношением  $\bar{D} = n/N$  для различных значений ЛТ  $F$ , отношением сигнал/шум  $q$  и величиной  $m$ , определяющей закон внутрисдискретной модуляции.

В качестве примера при моделировании, из тех же соображений о которых упоминалось ранее, для сокращения затрат машинного времени был взят четырехкратный D-код, описанный в п. 16.3, а, следовательно, база пачки  $B_n = 32B^{(n)}$ . При этом, как было показано в 22.2.2, коэффициент межпериодной корреляции следует принять равным единице.

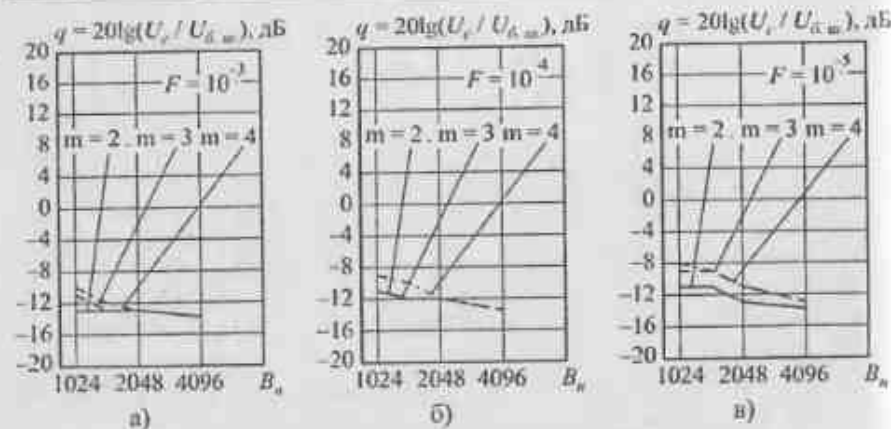


Рис. 22.4. Пороговые сигналы при наличии внутридискретной весовой обработки

Пороговые сигналы построены для случаев:

- при многозарядном представлении обрабатываемой смеси полезного сигнала и собственного шума;
- при использовании бинарного квантования;
- при наличии внутридискретной весовой обработки с использованием «весового» окна Хэмминга.

В результате проведения статистических испытаний получается семейство характеристик обнаружения, отражающих эффективность когерентно-импульсной РЛС при различных значениях баз пачек  $B_n$ , законов внутридискретной модуляции, определяемых величиной  $m$ , различных величинах ЛП  $F$  и для перечисленных выше случаев представления входной смеси.

Очевидно, что количество таких характеристик будет достаточно велико и, как следствие, не позволяет провести наглядный сравнительный анализ их друг с другом. Более информативными являются пороговые сигналы, которые строятся по полученным характеристикам обнаружения.

Из анализа рис. 22.2 – рис. 22.4 видно, что имеются некоторые изменения величин  $q$  пороговых сигналов в зависимости от величин баз пачек  $B_n$ . В то же время характер этих изменений одинаков для рассмотренных законов внутридискретной модуляции. Изменение уровней величин  $q$  пороговых сигналов связано с тем, что для определения уровней порогов  $\epsilon$  для различных вероятностей ЛП  $F$  использовался метод экстремальных статистик.

Особенностью этого метода, как указывалось, является то, что уровни порогов  $\epsilon$  находятся с определенной точностью по результатам проведенного числа статистических испытаний. Характеристики обнаружения для каждого случая находились исходя из полученных с заданной точностью поро-

гов  $\epsilon$ . Соответственно, уровень пороговых сигналов зависит от этих полученных значений порогов  $\epsilon$ , диапазон изменений величин которых находится в пределах точности используемого метода. Уменьшение влияния значений порогов  $\epsilon$  на уровень пороговых сигналов можно добиться путем проведения статистических испытаний при использовании сложных сигналов с различными значениями баз пачек  $B_n$ .

Анализ также показывает, что пороговые сигналы смеси сигнала и шума, подвергшихся бинарному квантованию, проигрывают 3–4 дБ в отношении сигнал/шум  $q$  относительно случая многозарядного квантования этой смеси, а введение весовой обработки приводит к проигрышу 2–3 дБ.

Из анализа также следует, что уровень пороговых сигналов для ЛП  $F = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$  достигает значений  $-17$  дБ +  $-15$  дБ.

Таким образом, проведенное статистическое моделирование работы РЛС обзора земной поверхности, изображенной на рис. 20.1, позволяет сделать вывод, что можно производить эффективный обзор земной поверхности предложенной системой СС с высокой вероятностью правильного обнаружения  $\bar{D}$  при отношениях сигнал/шум  $q \ll 1$ .

### 22.5. Качественные показатели обнаружения когерентно-импульсной радиолокационной станции селекции движущихся целей

Пороговые сигналы для рассматриваемой РЛС также определяются методом статистического моделирования на ЦВМ.

На первом этапе генерируется коррелированная помеха с коэффициентом корреляции равным  $R_p(T_n) = 0,999$ , доплеровское смещение которой отсутствует, и которая пропускается через исследуемую систему, изображенную на рис. 21.1.

При этом, вследствие выполнения условия  $P_{\text{корр.п.}} \gg P_{\text{б.ш.}}$ , влияние шума не учитывается. По выходным отсчетам результатов прохождения коррелированной помехи через систему, методом экстремальных статистик определяются уровни порогов  $\epsilon$  для вероятностей ложной тревоги  $F$  равных  $10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$  соответственно.

На втором этапе генерируются ансамбли сложных сигналов для двух случаев:

- при наличии доплеровского смещения полезного сигнала (коэффициент корреляции которого был принят равным  $R_p(T_n) = 0,995$ ), принимаемого в аддитивной смеси с коррелированной помехой («оптимальная» скорость);

• при отсутствии доплеровского сдвига полезного сигнала (коэффициент корреляции которого был принят равным  $R_p(T_n) = 0,995$ ), принимаемого в аддитивной смеси с коррелированной помехой («слепая» скорость).

Полученная аддитивная смесь подается на вход системы. Для заданного отношения сигнал/коррелированная помеха  $q$  на входе в диапазоне значений от  $-20$  дБ до  $20$  дБ с шагом равным  $2$  дБ, определяется на выходе системы количество превышений  $n$  уровней порогов  $c$  относительно числа испытаний  $N$  в каждой точке  $q$ . Полагается, что величина  $N = 100$  пачек.

Таким образом, оценочные значения характеристик правильного обнаружения  $\bar{D}$  определяются отношением  $\bar{D} = n/N$  для различных значений ЛП  $F$ , отношения сигнал/коррелированная помеха  $q$  и величины  $m$ , определяющей закон внутридискретной модуляции.

Пороговые сигналы построены для случаев:

- при многоразрядном представлении обрабатываемой смеси полезного сигнала и коррелированной помехи;
- при наличии внутридискретной весовой обработки с использованием «весового» окна Хэмминга.

Пороговые сигналы не определялись для случая бинарного квантования потому, что как показано в [72, 170], при этом резко ухудшается вероятность правильного обнаружения полезного сигнала, огражденного от движущейся цели, принимаемого в аддитивной смеси с коррелированной помехой и подобный режим обработки в РЛС селекции движущихся целей не применяется.

Аналогично описанному в 22.4, в результате проведения статистических испытаний получается семейство характеристик обнаружения, отражающих эффективность когерентно-импульсной РЛС с селекцией движущихся целей при различных значениях баз пачек  $B_n$ , законов внутридискретной модуляции, определяемых величиной  $m$ , различных величин ЛП  $F$  и для двух перечисленных выше случаев представления входной смеси.

Количество таких характеристик обнаружения будет достаточно велико и, следовательно, целесообразно построить по ним пороговые сигналы, что позволит провести более наглядный сравнительный анализ. Эти пороговые сигналы, построены по полученным характеристикам обнаружения и приведены на рис. 22.5 и рис. 22.6.

Из анализа рис. 22.5 и рис. 22.6 видно, что уровень пороговых сигналов как для «слепой» скорости цели, так и для «оптимальной» зависит от величины ЛП  $F = 10^{-3}$  (рис. 22.5,а и рис. 22.6,а),  $F = 10^{-4}$  (рис. 22.5,б и рис. 22.6,б),  $F = 10^{-5}$  (рис. 22.5,в и рис. 22.6,в). Уровень пороговых сигналов зависит от величины баз пачек  $B_n$  из-за влияния уровней порогов  $c$  при

построении характеристик обнаружения, которые определяются методом экстремальных статистик. При этом уровень изменения пороговых сигналов находится в пределах погрешности метода.

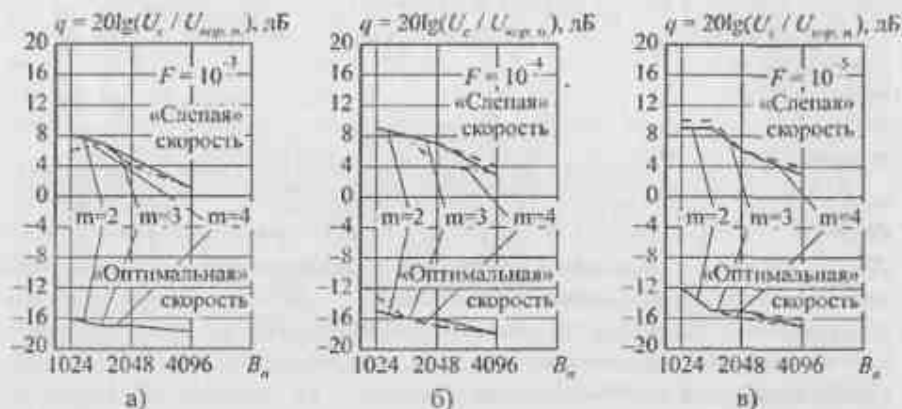


Рис. 22.5. Пороговые сигналы при многоразрядном представлении входной смеси

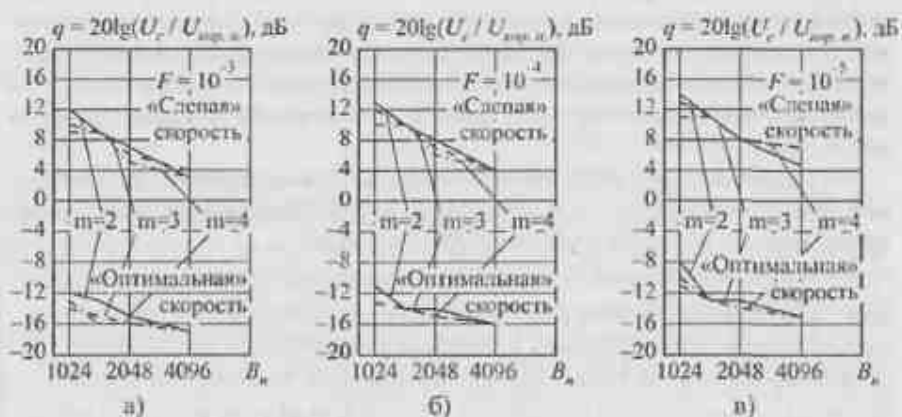


Рис. 22.6. Пороговые сигналы при наличии внутридискретной весовой обработки

Анализ также показывает, что движущаяся с «оптимальной» скоростью цель может быть обнаружена при меньшем отношении сигнал/коррелированная помеха относительно случая, когда используется весовая обработка.

Выигрыш в пороговых сигналах достигает своего наибольшего значения на «оптимальной» скорости движения цели, по сравнению со случаем ее

движения на «слепой».

Следует отметить, что несколько более высокие параметры пороговых сигналов обеспечивают сигналы с большими значениями величины  $m$ . Это связано с тем, что такие сигналы имеют большой «участок» во времени, где частота изменяется относительно незначительно и сильнее проявляется эффект Доплера.

## 22.6. Выводы

Используемая для задач статистического моделирования радиолокационных систем модель реализации случайного процесса на выходе линейного тракта радиолокационного приемника в виде последовательности случайных величин, описываемых  $2n$ -мерной нормальной плотностью распределения вероятностей, позволяет обеспечить требуемые характеристики моделируемых процессов задаваясь только их корреляционными или спектральными характеристиками.

Процедуру определения уровней порогов  $\epsilon$  для заданных вероятностей ЛТ  $F$  целесообразно осуществлять путем применения метода экстремальных статистик позволяющих сократить количество производимых испытаний в  $10 - 100$  раз.

Приведенные результаты имитационного моделирования в виде пороговых сигналов, полученных по характеристикам обнаружения для РЛС обзор земной поверхности и РЛС селекции движущихся целей, показали, что в зависимости от решаемых задач следует использовать различные законы внутридискретной модуляции.

Для решения задач обнаружения сигналов принимаемых на фоне «белого» шума, более высокая эффективность достигается в случае применения для внутридискретной модуляции ЛЧМ-сигналов.

В случае решения задачи селекции движущихся целей следует применять для внутридискретной модуляции сигналы с кубической ЧМ.

Если необходимо решать эти задачи одновременно, целесообразно применение для внутридискретной модуляции сигналов с квадратичной ЧМ.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

«Начни сначала и продолжай, пока не дойдешь до конца, после этого остановись» – так Король Сердец объяснял Белому Кролику, как читать стихотворение [51]. Следует сказать, что если прочесть эту книгу, то не следует думать, что можно остановиться и уже известно все, что сделано в области ЦОС. Это далеко не так. Достаточно большое число вопросов в ней не было рассмотрено, например таких, как цифровая голография.

Тем не менее, в книге изложены основополагающие сведения по ЦОС, ориентированных на выполнение обработки радиосигналов на многопроцессорных системах, поступающих с выхода ЛТП. Очевидно, что если полученных первоначальных сведений по тем или иным изложенным вопросам окажется недостаточно, целесообразно обратиться к тому списку использованной литературы, который приведен в ее конце.

Ибо, как сказал Норберт Винер «жить по-настоящему – это жить, получая адекватную информацию».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лихарев В.А. Цифровые методы и устройства в радиолокации. М.: Сов. радио, 1973. 456 с.
2. Побережский Е.С. Цифровые радиоприемные устройства. М.: Радио и связь, 1987. 184 с.
3. Радиоприемные устройства. / В.Н. Банков, Л.Г. Барулина, М.И. Жолзинский и др.; Под ред. Л.Г. Барулина. М.: Радио и связь, 1984. 272 с.
4. Каляев А.В. Многопроцессорные системы с программируемой архитектурой. М.: Радио и связь, 1984. 240 с.
5. Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов. / Под ред. С. Гуна, Х. Уайтхауса, Т. Кайлата. Пер. с англ.; Под ред. В.А. Лексаченко. М.: Радио и связь, 1989. 472 с.
6. Системные структуры. / Под ред. У. Мура, Э. Маккейба, Р. Урюкарта. Пер. с англ.; Под ред. Е.Н. Туруты. М.: Радио и связь, 1993. 416 с.
7. Стручев В.Ф. Архитектура системы адаптивной пространственно-частотно-временной обработки сигналов. // Радиотехника, 1984, № 3. С. 15-20.
8. Марков С. Цифровые сигнальные процессоры. Кн. 1. М.: МИКРОАРТ, 1996. 144 с.
9. Цифровая обработка информации на основе быстродействующих БИС. / С.А. Гамкрелидзе, А.В. Завьялов, П.П. Мальцев, В.Г. Соколов. М.: Энергоатомиздат, 1988. 135 с.
10. Микропроцессоры и микропроцессорные комплекты интегральных микросхем: Справочник. В 2-х т. / Под ред. В.А. Шахнова. М.: Радио и связь, 1988. Т. 1. 368 с.; Т. 2. 368 с.
11. Белоус А.И., Подрубный О.В., Журба В.М. Микропроцессорный комплект БИС серии K1815 для цифровой обработки сигналов: Справочник. М.: Радио и связь, 1992. 256 с.
12. Литюк В.И. Методы расчета и проектирование цифровых многопроцессорных устройств обработки радиосигналов: Учебное пособие. Таганрог: ТРТУ, Ч.1., 1994. 87 с.; Ч.2., 1995. 86 с.; Ч.3., 1995. 81 с.; Ч.4., 1998. 94 с.

13. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.
14. Френке Л. Теория сигналов. / Пер. с англ.; Под ред. Д.Е. Вакмана. М.: Сов. радио, 1974. 344 с.
15. Литюк В.И. Автоматизированное проектирование цифровых фильтров на базе микропроцессорной техники: Учебное пособие. Таганрог: ТРТИ, 1987. 79 с.
16. Цифровые фильтры и устройства обработки сигналов на интегральных микросхемах: Справочное пособие. / Ф.Б. Высоцкий, В.И. Алексеев, В.Н. Пачин и др.; Под ред. Б.Ф. Высоцкого. М.: Радио и связь, 1987. 184 с.
17. Фаленчев Е.В., Литюк В.И. Цифровой формирователь квадратурных составляющих. // Региональная научно-техническая конференция «Системы и устройства радиолокации, связи и управления». Свердловск: Полиграфист, 1990. С. 18-19.
18. Фаленчев Е.В., Литюк В.И. Компенсация методической погрешности при формировании цифровых квадратурных составляющих. // Всесоюзная научно-техническая конференция «Цифровые методы обработки сигналов и изображений»: Тезисы докладов. М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1990. С. 63-64.
19. Реджалия Ф.Э., Митра С.К., Вадьянатхан П.П. Цифровые фазовые фильтры как универсальные элементы систем обработки сигналов. // ТИИЭР, 1988, т. 76, № 1.
20. Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Сов. радио, 1972. 352 с.
21. Бахтиаров Г.Д., Малнин В.В., Школин В.П. Аналого-цифровые преобразователи. / Под ред. Г.Д. Бахтиарова. М.: Сов. радио, 1980. 280 с.
22. Литюк В.И. О выборе вида преобразования аналогового сигнала, представленного в линейном пространстве, в цифровую форму. // Материалы Всесоюзного научно-технического семинара «Интегральная схемотехника и избирательные устройства». Москва. 3-7 июля 1989. / Ред. ж. «Радиотехника». М.: 1990. Деп. в ЦНТИ «Информсвязь», № 1727-св.90. С. 12-15.
23. Адаптивные фильтры. / Под ред. К.Ф. Н. Коузена и П.М. Гранта. Пер. с англ.; Под ред. С.М. Ряковского. М.: Мир, 1988. 392 с.
24. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. В 3-х кн. М.: Сов. радио, Кн. 1., 1974. 752 с.; Кн.2., 1975. 392 с.; Кн. 3., 1976. 288 с.
25. Быстродействующие интегральные микросхемы ЦАП и АЦП и измерение их параметров. / А.-И.К. Марцинявичус, Э.-А.К. Богданскис, Р.Л.Потшокас и др.; Под ред. А.-И.К. Марцинявичуса, Э.-А.К. Богданскиса. М.: Радио и связь, 1988. 224 с.
26. Голд Б., Рейдлер Ч. Цифровая обработка сигналов. / Пер. с англ.; Под ред. А.М. Трахтмана. М.: Сов. радио, 1973. 368 с.

27. Люстерник Л.А., Червоненкис О.А., Ямпольский А.Р. Математический анализ. Вычисление элементарных функций. М.: Физматгиз, 1963. 248 с.
28. Антонио А. Цифровые фильтры: анализ и проектирование. / Пер. с англ.; Под ред. С.А. Поньрко. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.
29. Мизин И.А., Матвеев А.А. Цифровые фильтры. М.: Связь, 1979. 240 с.
30. Бессежерский В.А. Цифровые автоматические системы. М.: Наука, 1976. 576 с.
31. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975. 208 с.
32. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. М.: Радио и связь, 1985. 312 с.
33. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1990. 256 с.
34. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. / Пер. с англ.; Под ред. С.Я. Шаца. М.: Связь, 1979. 416 с.
35. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. / Пер. с англ.; Под ред. И.С. Рыжак. М.: Мир, 1990. 584 с.
36. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. / Пер. с англ.; Под ред. И.Г. Арамановича. М.: Наука, 1973. 832 с.
37. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. / Пер. с англ.; Под ред. Ю.Н. Александрова. М.: Мир, 1978. 848 с.
38. Верешкин А.Е., Катковник В.Я. Линейные цифровые фильтры и методы их реализации. М.: Сов. радио, 1973. 152 с.
39. Финкельштейн М.И. Гребенчатые фильтры. М.: Сов. радио, 1969. 320 с.
40. Литюк В.И., Фаденчев Е.В. Анализ свойств и синтез цифровых фильтров на основе комплексной квазитангенной ячейки. // Известия ВУЗов СССР. Радиоэлектроника, 1990, т. 33, № 3. С. 84-87.
41. Crystal T.H., Ehrman L. The Design and Application of Digital Filter with Complex Coefficients. // IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, vol. AU-16, No.3, September, 1968. P. 315-320.
42. Фаденчев Е.В., Литюк В.И., Цыганков В.Н. Метод расчета цифровых синусных фильтров. // Известия ВУЗов СССР. Радиоэлектроника, 1990, т. 33, № 1. С. 72-74.
43. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. / Пер. с англ.; Под ред. И.Г. Журбенко. М.: Мир, 1982. 428 с.
44. Литюк В.И., Цыганков В.Н., Цыганкова А.В. Автоматизированное проектирование цифровых фильтров и цифровых анализаторов спектра. // В кн. «Элементы пассивно-усилительных устройств». Таганрог: ТРТИ, вып. 3, 1986. С. 78-79.
45. Капеллини В., Константинович А.Дж., Эмиониани П. Цифровые фильтры и их применение. / Пер. с англ.; Под ред. Н.Н. Слепова. М.: Энергоатомиздат 1983. 360 с.

46. Введение в цифровую фильтрацию. / Под ред. Р. Бюгнера и А. Константиновича. Пер. с англ.; Под ред. Л.И. Филиппова. М.: Мир, 1976. 216 с.
47. Юфряков Б.А. Синтез цифровых фильтров по заданной амплитудно-частотной характеристике. // В кн. «Вопросы обработки радиолокационных сигналов в присутствии помех». М.: МАИ, вып. 431, 1978. С. 26-29.
48. Юфряков Б.А. Анализ и синтез канонических схем гребенчатых фильтров второго порядка. // Радиотехника и электроника, т. XVIII, № 2, 1973. С. 265-268.
49. Юфряков Б.А. Полулогарифмические амплитудно-частотные характеристики гребенчатых фильтров. // Радиотехника, 1973, т. 28, № 4. С. 31-33.
50. Литюк В.И., Юфряков Б.А. Анализ и синтез полосовых дискретных фильтров на основе канонических схем второго порядка. // В кн. «Теория и техника радиолокации. IV серия. Вопросы обнаружения и измерения параметров радиолокационных сигналов». М.: МАИ, вып. 324, 1975. С. 105-109.
51. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы. В 2-х ч. / Пер. с англ.; Под ред. И.С. Рыжак. М.: Мир, Ч. 1., 1988. 336 с.; Ч. 2., 1988. 360 с.
52. Станишевский О.Б., Литюк В.И., Полянский В.И. Метод параллельной обработки сложных сигналов и его реализация на БИС. // В кн. «Многопроцессорные вычислительные структуры»: Междоуниверситетский тематический научный сборник. Таганрог: ТРТИ, вып. 10 (XIX), 1988. С. 31-34.
53. Хохлюк В.И. Параллельные алгоритмы целочисленной оптимизации. М.: Радио и связь, 1987. 224 с.
54. Литюк В.И. Алгоритмы и структуры распараллеленных многопроцессорных цифровых фильтров с конвейерной обработкой информации. / «Методы и микроэлектронные средства цифрового преобразования и обработки сигналов (SIAP-89)»: Тезисы докладов конференции. В 2-х т. Рига: Институт электроники и вычислительной техники АН Латвийской ССР. Т. 1., 1989. С. 254-256.
55. А.С. №1128264 (СССР). Цифровой рекурсивный фильтр. / А.И. Гречишников, А.В. Каляев, В.И. Литюк, О.Б. Станишевский. Оpubл. в Б.И. № 45, 1984.
56. Lityuk V.I. Characteristic Properties of Signal Processing by Multiprocessor Computer Systems. // «Proc. MELECON-87; Mediterranean Electrotechn. Conf. and 34-th Congr. Electron. Rome, March, 1987.» New York, N.Y., 1987. P. 489-492.
57. Литюк В.И., Цыганков В.Н. О некоторых особенностях реализации многопроцессорных цифровых фильтров. // «Методы и микроэлектронные средства цифрового преобразования и обработки сигналов»: Тезисы докладов конференции. В 2-х т. Рига: Институт электроники и вычислительной техники АН Латвийской ССР. Т. 2., 1986. С. 442-444.



58. Литюк В.И. Особенности синтеза цифровых многопроцессорных фильтров. // «Многопроцессорные вычислительные системы»: Тезисы докладов Всесоюзного научно-технического семинара. Таганрог, радиотехн. ин-т. Ростов/Дон, 1991. С. 51–52.
59. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры. Расчет и реализация. / Пер. с англ.; Под ред. И.Н. Теплоука. М.: Мир, 1982. 592 с.
60. Литюк В.И., Загородский В.А. Метод расчета полосовых, режекторных и фильтров верхних частот. // Известия ВУЗов СССР. Радиоэлектроника, 1984, т. 27, № 8. С. 92–95.
61. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. / Пер. с франц.; Под ред. К.С. Шифрина. М.: Наука, 1964. 772 с.
62. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1974. 432 с.
63. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
64. Бронштейн И.Н., Семендяев К.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.
65. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. Киев: Наукова Думка, 1984. 600 с.
66. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 432 с.
67. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. М.А. Абрамовица и И. Стиган. Пер. с англ.; Под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной. М.: Наука, 1979. 832 с.
68. Constantinides A.G. Frequency Transformation for Digital Filters. // Electronics Letters, 1967, vol. 3, No. 11. P. 487–489.
69. Литюк В.И., Цыганков В.Н. Метод синтеза цифровых режекторных, полосовых и фильтров верхних частот. / В кн. «Элементы приемно-усилительных устройств». Таганрог: ТРТИ, вып. 2, 1984. С. 110–113.
70. Хэмминг Р.В. Цифровые фильтры. / Пер. с англ.; Под ред. А.М. Трахтмана. М.: Сов. радио, 1980. 224 с.
71. Срагович В.Г. Теория адаптивных систем. М.: Наука, 1976. 220 с.
72. Бакулев П.А., Степин В.М. Методы и устройства селекции движущихся целей. М.: Радио и связь, 1986. 288 с.
73. Уидроу Б., Стирз С. Адаптивная обработка сигналов. / Пер. с англ.; Под ред. В.В. Шахгильдяна. М.: Радио и связь, 1989. 440 с.
74. Литюк В.И. Оценка эффективности адаптивных систем СДЦ при микропроцессорной реализации. // Всесоюзная конференция «Теория адаптивных систем и ее применения»: Тезисы докладов и сообщений. М.-Л.: ВИНТИ, 1983. С. 342–343.
75. Кук Ч., Берифельд Б. Радиолокационные сигналы. Теория и применение. / Пер. с англ.; Под ред. В.С. Кельзова. М.: Сов. радио, 1971. 568 с.

76. Djurich B.M., Petkovich R.A., Djurdjanovich C.D. Chebeshev Phase Networks for Pulse Compressing and Stretching. // IEE Proc. G., vol. 137, Part G, No. 6, December, 1990. P. 424–426.
77. Gregorian R., Temes C.G. Design Techniques for Digital and Analog All-Pass Circuits. // IEEE Trans. on Circuits and Syst., vol. CAS-25, No. 12, December, 1978. P. 981–988.
78. Литюк В.И. Применение неминимально-фазовых цифровых фильтров для сжатия радиолокационных ЧМ сигналов. // «Статистические методы обработки сигналов и изображений»: Тезисы докладов. Новороссийск, 1991. С. 67.
79. Mitra S.K., Hirano K. Digital All-Pass Networks. // IEEE Trans on Circuits and Syst., vol. CAS-21, No. 5, September, 1974. P. 688–700.
80. Reddy P.S., Satyanarayana P., Swamy M.N.S. Minimal Multiplier Realization of 1-D All-Pass Digital Filters. // IEEE Trans on Circuits and Syst., vol. CAS-37, No. 2, February, 1990. P. 299–302.
81. Литюк В.И. Цифровой последовательный анализ спектра. // Известия ВУЗов СССР. Радиоэлектроника, 1985, т. 28, № 8. С. 78–83.
82. Патент РФ № 1078348. Цифровой анализатор спектра. / В.И. Литюк, Т.А. Литюк. Опубл. в Б.И. № 9, 1984.
83. Применение цифровой обработки сигналов. / Под ред. Э. Опенгейма. Пер. с англ.; Под ред. А.М. Рязанцева. М.: Мир, 1980. 552 с.
84. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. / Пер. с англ.; Под ред. Х.Д. Икрамова. М.: Мир, 1989. 655 с.
85. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Пер. с англ.; Под ред. И.Б. Лидского. М.: Наука, 1976. 352 с.
86. Литюк В.И. Метод уменьшения смещения дискретной оценки энергетического спектра. // Радиотехника, 1995, № 1-2. С. 48–50.
87. Грибанов Ю.И., Мальков В.Л. Спектральный анализ случайных процессов. М.: Энергия, 1974. 240 с.
88. Фудзисава Е., Касами Е. Математика для радиоинженеров: Теория дискретных структур. / Пер. с япон. М.: Радио и связь, 1984. 240 с.
89. Бакулев П.А., Литюк В.И. Двухкаскадный цифровой анализатор спектра. // Известия ВУЗов СССР. Радиоэлектроника, 1980, т. 23, № 8. С. 49–54.
90. А.С. №653575 (СССР). Цифровой анализатор спектра. / П.А. Бакулев, В.И. Литюк, Б.А. Юфряков. Опубл. в Б.И. № 11, 1979.
91. Поиск, обнаружение и измерение параметров сигналов в радионавигационных системах. / В.В. Ипатов, Ю.М. Казаринов, В.А. Коломенский и др.; Под ред. Ю.М. Казаринова. М.: Сов. радио, 1975. 296 с.
92. Афоненко Г.П., Бритин С.Н., Трофимов А.Т. Модульные методы оценки амплитуд отчетов дискретного преобразования Фурье. // Радиотехника, 1985, № 9. С. 66–70.

93. Литюк В.И., Фаденчев Е.В. Обобщенный модульный метод вычисления амплитуды комплексного сигнала по квадратурным составляющим. // Известия ВУЗов СССР. Радиоэлектроника, 1989, т. 32, № 12. С. 42-45.
94. Митяшев Б.Н. Определение временного положения импульсов при наличии помех. М.: Сов. радио, 1962. 198 с.
95. Литюк В.И., Фаденчев Е.В. Применение кепстрального анализа для оценки параметров сложных сигналов. // Материалы Всесоюзного научно-технического семинара «Интегральные избирательные устройства». М.: 1987. Деп. в ЦНТИ «Информсвязь», № 1174-св.787. С. 20-23.
96. Фалькович С.Е., Хомяков Э.Н. Статистическая теория измерительных радиосистем. М.: Радио и связь, 1981. 288 с.
97. Литюк В.И. Метод определения параметров процессов, подвергшихся битарному квантованию. // Известия ВУЗов СССР. Радиоэлектроника, 1987, т. 30, № 11. С. 79-81.
98. Литюк В.И. Цифровой фазометр с марковской последовательностью циклических отсчетов. // Известия ВУЗов СССР. Радиоэлектроника, 1981, т. 24, № 12. С. 62-64.
99. Пестряков В.Б. Фазовые радиотехнические системы. М.: Сов. радио, 1968. 468 с.
100. Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. М.: Сов. радио, 1973. 232 с.
101. Патент РФ № 756310. Цифровой фазометр. / В.И. Литюк, А.М. Макеев, А.С. Лыга, В.Г. Аргемьев. Оpubл. в Б.И. № 30, 1980.
102. Бакулев П.А. Измерение параметров радиолокационных и радионавигационных сигналов: Тексты лекций. М.: МАИ, 1989. 28 с.
103. Джавадов Г.Г. Основы проектирования радиолокационных систем. Часть 2. М.: МАИ, 1976. 86 с.
104. Коростелев А.А. Пространственно-временная теория радиосистем. М.: Радио и связь, 1987. 320 с.
105. Теоретические основы радиолокации: Учебное пособие для вузов. / А.А. Коростелев, Н.Ф. Клюев, Ю.А. Мельник и др.; Под ред. В.Е. Дулевича. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Сов. радио, 1978. 608 с.
106. Патент РФ № 2040852. Цифровой частотный дискриминатор. / В.И. Литюк, В.Н. Паклев. Оpubл. в Б.И. № 21, 1995.
107. Литюк В.И., Казакевич А.А. Цифровой частотный дискриминатор с переменной крутизной дискриминационной характеристики. // Известия ТРТУ. «Материалы XI научно-технической конференции». Таганрог: ТРТУ, 1997, № 1, С. 33-35.
108. Литюк В.И. Влияние коррелированных помех на характеристики частотного дискриминатора. // В кн. «Элементы приемно-усилительных устройств». Таганрог: ТРТИ, вып. 2, 1984. С. 53-55.

109. Винницкий А.С. Автономные радиосистемы. М.: Радио и связь, 1986. 336 с.
110. Патент РФ № 2166773. Адаптивный цифровой частотный дискриминатор. / В.И. Литюк, А.А. Ярошенко. Оpubл. в Б.И. № 13, 2001.
111. Литюк В.И., Ярошенко А.А. Адаптивный цифровой частотный дискриминатор. // Радиосистемы. Радиоэлектронные устройства и системы управления, локации и связи. 2002, вып. 62, № 2. С. 23-26.
112. Патент РФ № 2010243. Измеритель скорости линейного изменения частоты внутри импульса. / В.И. Литюк. Оpubл. в Б.И. № 6, 1994.
113. Патент РФ № 2099719. Измеритель параметров сигналов с линейной частотной модуляцией. / В.И. Литюк. Оpubл. в Б.И. № 35, 1997.
114. Литюк В.И., Коваленко В.М., Литюк Т.А. Автоматическая регулировка коэффициента передачи в устройстве с марковским управлением. // В кн. «Вопросы формирования и обработки сигналов в радиотехнических системах». Таганрог: ТРТИ, вып. 5, 1981. С. 70-74.
115. Литюк В.И. О некоторых экспериментальных характеристиках системы цифровой автоматической регулировки усиления. // Известия ТРТУ. Специальный выпуск. «Материалы XLVIII научно-технической конференции ТРТУ». Таганрог: ТРТУ, 2003, № 1, С. 30-31.
116. Даламон Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. / Пер. с англ.; Под ред. Л.П. Ярославского. М.: Мир, 1988. 488 с.
117. Обработка изображений и цифровая фильтрация. / Под ред. Т. Хуанга. Пер. с англ.; М.: Мир, 1979. 318 с.
118. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений. Преобразование и медианные фильтры. / Т.С. Хуанг, Дж.-О. Эклунд, Г. Дж. Нуссбаумер и др.; Под ред. Т.С. Хуанга. Пер. с англ.; Под ред. Л.П. Ярославского. М.: Радио и связь, 1984. 224 с.
119. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. / Пер. с англ.; Под ред. В.Н. Амербаева и Т.Э. Кренкеля. М.: Радио и связь, 1985. 248 с.
120. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. / Пер. с англ.; Под ред. И.Б. Фоменко. М.: Связь, 1980. 248 с.
121. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. В 2-х кн. / Пер. с англ.; Под ред. Д.С. Лебелева. М.: Мир, Кн. 1., 1982. 312 с.; Кн. 2., 1982. 480 с.
122. Ярославский Л.П., Мерзляков Н.С. Цифровая голография. М.: Наука, 1982. 219 с.
123. Загородский В.А., Литюк В.И. Синтез двумерных полосовых и режекторных фильтров по заданным областям прозрачности и режекции. // В кн. «Методы и устройства обработки сигналов в радиотехнических системах». Горький: Горьков. политехн. ин-т, 1987. С. 82-86.

124. Литюк В.И. Некоторые особенности двумерной фильтрации данных, представленных в виде бесконечной ленты. // В кн. «Рассеяние электромагнитных волн». Межведомственный тематический научный сборник. Таганрог: ТРТУ, вып. 11, 1999. С. 154–158.
125. Литюк В.И. Цифровая обработка изображений в режиме работы «скользящее» окно. // В кн. «Компьютерные технологии в инженерной и управленческой деятельности». Часть II. «Моделирование и обработка информации в технических и человеко-машинных системах». Материалы Всероссийской научно-технической конференции с международным участием. 20–23 октября 1997. Таганрог: ТРТУ, 1998. С. 203–205.
126. Вопросы статистической теории радиолокации. В 2-х т. / П.А. Бакут, И.А. Большаков, В.М. Герасименко и др.; Под ред. Г.П. Тартаковского. М.: Сов. радио, Т. 1., 1963. 424 с.; Т. 2., 1964. 1080 с.
127. Бакулев П.А. Радиолокация движущихся целей. М.: Сов. радио, 1964. 376 с.
128. Варакин Л.Е. Теория сложных сигналов. М.: Сов. радио, 1970. 376 с.
129. Варакин Л.Е. Теория систем сигналов. М.: Сов. радио, 1978. 304 с.
130. Варакин Л.Е. Системы связи с широкополосными сигналами. М.: Радио и связь, 1985. 384 с.
131. Хелл М. Комбинаторика. / Пер. с англ.; Под ред. А.О. Гельфонда и В.Е. Тараканова. М.: Мир, 1970. 454 с.
132. Литюк В.И. Синтез систем радиолокационных ФМ сигналов. // Всесоюзная научно-техническая конференция «Цифровые методы обработки сигналов и изображений»: Тезисы докладов. М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1990. С. 18–21.
133. Welch G.R. Quaternary Codes for Pulsed Radar. // Trans. IRE, vol. IT-6, June, 1960. P. 400–408.
134. Левинштейн В.И. Применение матриц Адамара к одной задаче кодирования. // Проблемы кибернетики, 1961, № 5. С. 123–126.
135. Литюк В.И., Плекин В.Я., Овсенко А.В. Системы радиолокационных фазоманипулированных сигналов. // Известия ВУЗов СССР. Радиоэлектроника, 1990, № 4. С. 37–42.
136. Литюк В.И., Плекин В.Я., Овсенко А.В. Системы фазоманипулированных сигналов с квазидельной формой суммарной функции неопределенности. // В кн. «Методы и устройства обработки сигналов в радиолокационных системах»: Межвузовский сборник. Рязань: РРТИ, 1990. С. 33–37.
137. Budisin S.Z. Supercomplementary Sets of Sequences. // Electronics Letters, 1988, vol. 23, 7-th May, No. 10. P. 504–506.
138. Golay M.Y.E. Complementary Series. // Trans. IRE, vol. IT-7, April, 1961. P. 82–87.

139. Звездный А.М., Окунов Ю.Б., Рахович Л.М. Фазоразностная модуляция и ее применение для передачи дискретной информации. М.: Связь, 1967. 304 с.
140. Зюко А.Г., Коробов В.Ю. Теория передачи сигналов. М.: Связь, 1972. 282 с.
141. Системы радиосвязи: Учебник для вузов. / Н.И. Калашников, Э.И. Крутицкий, И.А. Дороднов, В.И. Носов; Под ред. Н.И. Калашникова. М.: Радио и связь, 1988. 352 с.
142. Бакулев П.А., Сосновский А.А. Радиолокационные и радионавигационные системы. М.: Радио и связь, 1994. 296 с.
143. Литюк Л.В. Синтез и анализ систем сложных сигналов с квазидельным телом неопределенности. // Известия ВУЗов России. Радиоэлектроника, 1998, № 2. С. 44–51.
144. Литюк В.И. Синтез и обработка ансамбля простых некогерентных импульсных сигналов. // Радиотехника, 2004, № 4. С. 70–73.
145. Дядюнов Н.Г., Сеинт А.И. Ортогональные и квазиортогональные сигналы. М.: Связь, 1977. 204 с.
146. Zou W.Y., Wu Y. COFDM: An Overview. // IEEE Trans. on Broadcasting, vol. 41, No. 1, March, 1995. P. 1–8.
147. Литюк В.И. О некоторых особенностях синтеза и обработки сложных фазоманипулированных сигналов в цифровых системах радиосвязи. // «Теория цепей и сигналов (ТЦиС-96)»: Тезисы докладов. Третья Всероссийская научно-техническая конференция с международным участием. Таганрог. 11–15 сентября 1996. Новочеркасск: Известия ВУЗов России. Электромеханика, 1996. С. 17–18.
148. Венедиктов М.Д., Марков В.В., Эйдус Г.С. Асинхронные адресные системы связи. М.: Связь, 1968. 271 с.
149. Агеев Д.В. Основы теории линейной селекции. // Научно-технический сборник. ЛЭИС, 1935, № 10.
150. Литюк В.И. Пути повышения эффективности передачи информации в системах радиосвязи с двухкратной ФРМ. // В кн. «Компьютерные технологии в инженерной и управленческой деятельности». Сборник трудов. Материалы Всероссийской научно-технической конференции с международным участием. 1998. Таганрог: ТРТУ, 1999. С. 114–115.
151. Lityuk V.I. Ensembles Synthesis of the Complementary Code Sequences for the Asynchronous Address Communication Systems. // «World Wireless Congress». San Francisco (Silicon Valley). U.S.A., Delson Group Inc., May 28–31, 2002. P. 732–737.
152. Литюк В.И. Особенности применения ансамблей дополнительных кодовых последовательностей в адресных системах связи. // Телекоммуникации, 2000, № 4. С. 31–35.

153. Литюк В.И. Выбор ансамблей сложных сигналов для асинхронных адресных систем связи. // Радиотехника, 2001, № 1. С. 73-75. (Радиоэлектронные устройства и системы управления локации и связи. 2001, № 1. С. 21-23).
154. Литюк В.И. Обработка ансамблей сложных сигналов в цифровых системах радиосвязи. // Известия ВУЗов России. Радиоэлектроника, 1998, вып. 2, С. 35-43.
155. Литюк В.И. Некоторые особенности применения  $L$ -кодов в цифровых системах связи. // Телекоммуникации, 2002, № 2. С. 22-25.
156. Патент РФ №2182403. Способ асинхронной адресной связи. / В.И. Литюк. Опубл. в Б.И. № 13. 2002.
157. Литюк В.И., Жуков В.М., Жуков А.В. Выбор структуры частотно-временного сигнала подвижной радиосвязи. // В кн. «Цифровая обработка сигналов и ее применение». 5-я Международная конференция и выставка. М.: 12-14 марта, 2003, Москва, Россия. С. 377-379.
158. Литюк В.И. Особенности и перспективы применения сложных сигналов  $k$ -го порядка. // В кн. «Динамика процессов в природе, обществе и технике: информационные аспекты». Материалы Международной научно-технической конференции. Часть 3. Таганрог: Антон, 2003. С. 30-31.
159. Овощако А.А. Робастные локационные устройства. Л.: Ленинградский университет, 1981. 184 с.
160. Васильев В.И., Буркин А.П., Свириденко В.А. Системы связи: Учебное пособие для вузов. М.: Высш. шк., 1987. 270 с.
161. Гитлиц М.В., Лев Ю.А. Теоретические основы многоканальной связи. М.: Радио и связь, 1985. 248 с.
162. Теория передачи сигналов. / А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, М.В. Назаров, Л.М. Финк. М.: Радио и связь, 1986. 304 с.
163. Литюк В.И., Станишевский О.Б. Метод реализации быстродействующих цифровых устройств обработки радиолокационной информации. // «Применение методов теории информации для повышения эффективности и качества сложных радиоэлектронных систем»: Тезисы докладов. Всесоюзная научно-техническая конференция. М.: Радио и связь, 1984. С. 17.
164. Литюк В.И. Общие особенности цифровой обработки радиосигналов на многопроцессорных вычислительных системах. // «Проблемы современной аналоговой схемотехники». Сборник материалов Международного научно-практического семинара. В 2-х ч., Ч. 2, Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2003. С. 161-164.
165. Белоус А.И., Бобков В.А., Каляев А.В., Литюк В.И., Станишевский О.Б., Гречишников А.И. Применение микропроцессора K1815ВФ3 в устройствах цифровой обработки сигналов. // Электронная техника. Серия 10. Микроэлектронные устройства. Вып. 1, 1987, С. 14-21.

166. Литюк В.И. Методы цифровой обработки сигналов на многопроцессорных вычислительных системах. // «Радиотехнические и телевизионные средства сбора и обработки информации». Сборник научных статей. Таганрог: ТРТУ, 1998. С. 83-100.
167. Никамин В.А. Форматы цифровой звукозаписи. СПб.: Элби, 1988. 263 с.
168. Рабинер Л.Р., Шафер Р.В. Цифровая обработка речевых сигналов. / Пер. с англ.; Под ред. М.В. Назарова и Ю.Н. Прохорова. М.: Радио и связь, 1981. 495 с.
169. Литюк В.И. О выделении звуков в изолированных словах речи. // Известия ТРТУ. Специальный выпуск «Материалы XLVI научно-технической конференции ТРТУ». Таганрог: ТРТУ, 2001, № 1. С. 25-26.
170. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981. 416 с.
171. Скольник М. Справочник по радиолокации. В 4-х т. / Пер. с англ.; Под ред. К.Н. Трофимова. М.: Сов. радио, 1976 - 1979.
172. Shekhar R., Zagrodsky V. Mutual Information-Based Rigid and Nonrigid Registration of Ultrasonic Volumes. // IEEE Trans. on Medical Imaging, vol. 21, No. 1, January, 2002. P. 9-22.
173. Теоретические основы радиолокации / Я.Д. Ширман, В.Н. Голыков, И.Н. Бусыгин и др.; Под ред. Я.Д. Ширмана. М.: Сов. радио, 1970. 560 с.
174. Вакман Д.Е., Селлецкий Р.М. Вопросы синтеза радиолокационных сигналов. М.: Сов. радио, 1973. 312 с.
175. Sarvate D.V. Sets of Complementary Sequences. // Electronic Letters, 1984, vol. 19, 1-st September, No. 18. P. 711-712.
176. Popovic B.M., Budishin S.Z. Generalized Subcomplementary Sets of Sequences. // Electronic Letters, 1988, vol. 23, 9-th April, No. 8. P. 422-424.
177. Dieter D.H. Sets of One and Higher Dimensional Welch Codes and Complementary Codes. // IEEE Trans. on Audio and Electronic Syst., vol. AES-21, No. 2, February, 1985. P. 170-179.
178. Сарвате Д.В., Перели М.Б. Взаимокорреляционные свойства псевдослучайных последовательностей. // ТИИЭР, 1990, т. 68, № 5, С. 59-90.
179. Литюк Л.В. О некоторых особенностях импульсных сложных сигналов  $(l, k)$  порядка // Известия ТРТУ. «Материалы XLIX научно-технической конференции ТРТУ». Таганрог: ТРТУ, 2004, № 1. С. 36-37.
180. Литюк Л.В. Синтез и анализ ансамбля фазоманипулированных сигналов с внутридискретной модуляцией. // Всероссийская научная конференция студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, микроэлектроника, системы связи и управления», Тезисы докладов. Таганрог: ТРТУ, 1997. С. 23-24.
181. Литюк Л.В. Компенсационный метод подавления боковых лепестков. // Всероссийская научная конференция студентов и аспирантов. «Новые ин-

- формационные технологии. Информационное, программное и аппаратное обеспечение». Тезисы докладов. Таганрог: ТРТУ, 1995. С. 194–195.
182. Примеры и задачи по статистической радиотехнике. / В.Т. Горяинов, А.Г. Журавлев, В.И. Тихонов. Под ред. В.И. Тихонова. М.: Сов. радио, 1970. 600 с.
183. Грибанов Ю.И., Веселова Г.П., Андреев В.И. Автоматические цифровые корреляторы. М.: Энергия, 1971. 240 с.
184. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
185. Литюк Л.В. Некоторые особенности обработки систем сложных сигналов, представленных в бинарно-квантованной форме. // «Компьютерные технологии в инженерной и управленческой деятельности». Сборник трудов. Ч. II. «Моделирование, управление и обработка информации в технических и человеко-машинных системах». Таганрог: ТРТУ, 1998. С. 166–167.
186. Черняк Ю.Б. О линейных свойствах системы широкополосный ограничитель-фильтр. // Радиотехника и электроника, 1962, т. 7, № 7. С. 1073–1076.
187. Патент РФ № 2107926. Способ импульсной радиолокации системой фазоманипулированных сигналов. / Л.В. Литюк. Оpubл. в Б.И. 1998, № 9. С. 377.
188. Литюк Л.В. Выделение сигналов движущихся целей при использовании систем фазоманипулированных сигналов с внутридискретной модуляцией. // Радиотехнические цепи, сигналы и устройства. Таганрог: ТРТУ, 1998. С. 37–42.
189. Патент РФ № 2143709. Способ селекции движущихся целей. / Л.В. Литюк. Оpubл. в Б.И. 1999, № 36. С. 235.
190. Литюк Л.В. Сравнительный анализ эффективности применения внутридискретных модулирующих функций систем сложных сигналов. // Четвертая Всероссийская научная конференция студентов и аспирантов «Техническая кибернетика, радиоэлектроника и системы управления». Тезисы докладов. Таганрог: ТРТУ, 1998. С. 16–17.
191. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971. 328 с.
192. Поляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М.: Сов. радио, 1971. 400 с.
193. Гуткин Л.С. Проектирование радиосистем и радиоустройств. М.: Радио и связь, 1986. 288 с.
194. Апоревич А.Ф. Проектирование радиотехнических систем. Минск: Высшая школа, 1988. 221 с.
195. Конторов Д.С., Голубев-Новожилов Ю.С. Введение в радиолокационную системотехнику. М.: Сов. радио, 1971. 367 с.

196. Литюк Л.В. О некоторых особенностях определения потенциальной эффективности РЭС. // Московская студенческая научно-техническая конференция «Радиоэлектроника и электротехника в народном хозяйстве». Тезисы докладов. М.: 1997. С. 94–95.
197. Литюк Л.В. Моделирование случайных процессов и их прохождения через линейные и нелинейные цепи. // Вторая Всероссийская научная студенческая конференция «Техническая кибернетика, радиоэлектроника и системы управления». Тезисы докладов. Таганрог: ТРТУ, 1994. С. 242–243.
198. Моделирование в радиолокации. / А.И. Леонов, В.Н. Васенев, Ю.И. Гайдуков и др.; Под ред. А.И. Леонова. М.: Сов. радио, 1979. 264 с.
199. Литюк Л.В. О некоторых особенностях расчета характеристик обнаружения РЛС картографирования земной поверхности. // Четвертая Всероссийская научная конференция студентов и аспирантов «Техническая кибернетика, радиоэлектроника и системы управления». Тезисы докладов. Таганрог: ТРТУ, 1998. С. 18–19.

ОГЛАВЛЕНИЕ	
Введение.....	3
1. Основные сведения о современной цифровой элементной базе.....	6
1.1. Вводные замечания.....	6
1.2. Виды радиоприемных устройств с цифровой обработкой сигналов.....	7
1.3. Особенности построения многопроцессорных вычислительных систем.....	10
1.4. Цифровые сигнальные процессоры.....	15
1.5. Выводы.....	24
2. Преобразование радиосигналов в цифровую форму.....	26
2.1. Вводные замечания.....	26
2.2. Математическое описание радиосигнала.....	27
2.3. Формирователи квадратур.....	35
2.4. Аналого-цифровое преобразование радиосигналов.....	47
2.5. Выводы.....	57
3. Математический аппарат линейных цифровых систем и сигналов.....	58
3.1. Вводные замечания.....	58
3.2. Метод Z-преобразования.....	59
3.3. Связь Z-преобразования с преобразованием Лапласа.....	62
3.4. Конечные разности.....	72
3.5. Дискретные экспоненциальные функции.....	74
3.6. Дискретное преобразование Фурье.....	78
3.7. Выводы.....	85
4. Линейные цифровые элементарные ячейки.....	87
4.1. Вводные замечания.....	87
4.2. Линейные цифровые системы.....	88
4.3. Цифровые комплексные ячейки.....	94
4.4. Функциональные схемы цифровых комплексных ячеек.....	107
4.5. Цифровые биквадратные ячейки.....	112

4.6. Связь частоты дискретизации со свойствами сигналов и видами цифровых линейных систем.....	122
4.7. Выводы.....	126
5. Распараллеливание обработки на элементарных ячейках.....	128
5.1. Вводные замечания.....	128
5.2. Распараллеливание входных данных.....	129
5.3. Метод распараллеливания рекурсии для режима работы «скользящее» окно.....	132
5.4. Метод распараллеливания КИХ-ячейки для режима работы «скользящее» окно.....	136
5.5. Метод распараллеливания тангенсной ЦКЯ для режима работы «скользящее» окно.....	139
5.6. Выводы.....	144
6. Цифровые многопроцессорные фильтры с бесконечными импульсными характеристиками.....	146
6.1. Вводные замечания.....	146
6.2. Методы расчета цифровых многопроцессорных фильтров с бесконечными импульсными характеристиками.....	147
6.3. Расчет параметров тангенсных цифровых многопроцессорных фильтров.....	166
6.4. Расчет параметров синусных ЦМФ.....	171
6.5. Расчет параметров квазитангенсных ЦМФ.....	176
6.6. Выводы.....	182
7. Цифровые многопроцессорные фильтры с конечными импульсными характеристиками.....	183
7.1. Вводные замечания.....	183
7.2. Метод ряда Фурье.....	184
7.3. Весовая обработка данных.....	187
7.4. Метод модифицированного ряда Фурье.....	193
7.5. Методы расчета, основанные на минимизации величины отклонения полученной АЧХ от заданной.....	196
7.6. Преобразователь Гильберта.....	199
7.7. Сравнительный анализ КИХ и БИХ фильтров.....	203
7.8. Выводы.....	204
8. Цифровые многопроцессорные адаптивные фильтры.....	205
8.1. Вводные замечания.....	205
8.2. Основные принципы построения цифровых многопроцессорных адаптивных фильтров.....	206
8.3. Адаптивный алгоритм на основе оценивания входного сигнала.....	208
8.4. Адаптивный алгоритм коррекции весовых коэффициентов фильтра.....	212

8.5. Выводы.....	214
9. Цифровые многопроцессорные неминимально-фазовые системы.....	215
9.1. Вводные замечания.....	215
9.2. Цифровые многопроцессорные неминимально-фазовые ячейки.....	216
9.3. Цифровые многопроцессорные неминимально-фазовые фильтры.....	219
9.4. Оптимизация структур воспроизпускающих ячеек и фильтров.....	225
9.5. Выводы.....	228
10. Цифровые многопроцессорные анализаторы спектра.....	229
10.1. Вводные замечания.....	229
10.2. Цифровые многопроцессорные параллельные анализаторы спектра.....	230
10.3. Цифровой последовательный анализатор спектра.....	238
10.4. Цифровые анализаторы спектра на основе быстрых алгоритмов расчета коэффициентов ДПФ.....	243
10.5. Граница применимости прямых и быстрых алгоритмов расчета ДПФ.....	255
10.6. Цифровой спектральный анализ с использованием параметрических моделей.....	258
10.7. Методы оценивания параметров моделей.....	265
10.8. Погрешности вычислений.....	271
10.9. Выводы.....	275
11. Вычисление амплитуды комплексной огибающей сигнала.....	277
11.1. Вводные замечания.....	277
11.2. Обобщенный алгоритм модульного метода вычисления амплитуды.....	278
11.3. Особенности реализации модульного метода вычисления амплитуды.....	282
11.4. Расчет параметров устройства вычисления амплитуды.....	284
11.5. Выводы.....	289
12. Гомоморфная обработка сигналов.....	290
12.1. Вводные замечания.....	290
12.2. Обобщенная суперпозиция.....	290
12.3. Мультипликативные гомоморфные системы.....	292
12.4. Гомоморфные системы относительно свертки.....	294
12.5. Понятие о келстре сигнала.....	295
12.6. Выводы.....	297
13. Обработка бинарно-квантованных сигналов.....	299
13.1. Вводные замечания.....	299
13.2. Метод определения параметров процессов, подвергшихся бинарному квантованию.....	300

13.3. Метод измерения фазы бинарно-квантованных сигналов (случай $\psi(t) = \mu_0 = \varphi$ ).....	303
13.4. Особенности измерения частоты монохроматического сигнала (случай $\psi(t) = \mu_1 t = \omega t$ ).....	312
13.5. Измерение частоты узкополосного сигнала цифровыми частотными дискриминаторами.....	314
13.6. Адаптивный цифровой частотный дискриминатор.....	326
13.7. Упрощенный алгоритм непосредственного измерения частот модуляции радиосигналов (случай $\psi(t) = \mu_1 t + 0,5\mu_2 t^2$ ).....	333
13.8. Выводы.....	336
14. Цифровая автоматическая регулировка усиления.....	338
14.1. Вводные замечания.....	338
14.2. Цифровая АРУ с управлением по постоянной составляющей.....	339
14.3. Цифровая АРУ с управлением по переменной составляющей.....	342
14.4. Статистические характеристики ЦАРУ с управлением по переменной составляющей.....	346
14.5. Сравнительный анализ характеристик ЦАРУ и аналоговой АРУ.....	351
14.6. Выводы.....	353
15. Цифровая обработка двумерных сигналов.....	354
15.1. Вводные замечания.....	354
15.2. Двумерная теорема дискретизации и основные определения.....	355
15.3. Некоторые особые последовательности.....	356
15.4. Основные виды двумерных последовательностей.....	358
15.5. Двумерные линейные системы.....	361
15.6. Особенности синтеза разделенных двумерных многопроцессорных полосовых и режекторных фильтров.....	367
15.7. Двумерное дискретное преобразование Фурье.....	370
15.8. Цифровая обработка изображений в режиме работы «скользящее» окно.....	373
15.9. Выводы.....	385
16. Математическое описание и обработка ансамблей сигналов.....	387
16.1. Вводные замечания.....	387
16.2. Понятие об обобщенной функции неопределенности.....	388
16.3. Математическое описание ансамблей дискретных сигналов.....	389
16.4. Обработка ансамбля сложных фазоманипулированных сигналов без внутридискретной модуляции.....	398

16.5. Синтез и обработка ансамбля простых некогерентных импульсных сигналов.....	412
16.6. Выводы.....	420
17. Обработка фазоманипулированных сигналов на основе E-кодов.....	421
17.1. Вводные замечания.....	421
17.2. Формирование и модуляция сигналов E-кодами.....	422
17.3. Обработка сигналов модулированных E-кодами.....	426
17.4. Обработка фазоманипулированных на основе E-кодов сигналов в многоканальных системах радиосвязи.....	433
17.5. Выводы.....	437
18. Ансамбли кодовых последовательностей в асинхронной связи.....	440
18.1. Вводные замечания.....	440
18.2. Синтез ансамблей комплементарных кодовых последовательностей.....	441
18.3. Свойства и характеристики комплементарных кодовых последовательностей.....	447
18.4. Система асинхронной адресной связи.....	453
18.5. Синтез ансамблей временных комплементарных кодовых последовательностей.....	465
18.6. Выводы.....	474
19. Общие особенности многопроцессорной обработки радиосигналов.....	475
19.1. Вводные замечания.....	475
19.2. Анализ особенностей представления радиосигналов и алгоритмов их обработки на МВС.....	476
19.3. Обработка радиосигналов на МВС ПА.....	478
19.4. Многопроцессорные вычислительные структуры с программируемой архитектурой на основе систолических ячеек.....	484
19.5. Области применения многопроцессорных вычислительных систем.....	486
19.6. Выводы.....	490
20. Синтез и анализ ансамблей радиолокационных сигналов.....	492
20.1. Вводные замечания.....	492
20.2. Синтез и анализ ансамблей радиолокационных фазоманипулированных сигналов с внутридискретной модуляцией.....	493
20.3. Обработка ансамблей радиолокационных фазоманипулированных сигналов на основе D-кодов.....	500
20.4. Влияние искажающих факторов на обработку ансамблей радиолокационных фазоманипулированных сигналов с внутридискретной модуляцией.....	504

20.5. РЛС обнаружения, использующая ансамбли сложных сигналов.....	507
20.6. Выводы.....	516
21. Селекция сигналов движущихся целей при использовании ансамблей сложных сигналов.....	518
21.1. Вводные замечания.....	518
21.2. Алгоритм селекции сигналов движущихся целей при использовании ансамблей радиолокационных фазоманипулированных сигналов с внутридискретной модуляцией.....	519
21.3. РЛС с СДЦ, использующая ансамбли сложных сигналов.....	527
21.4. Виды и особенности внутридискретных модулирующих функций.....	532
21.5. Анализ особенностей формы режекторной амплитудно-частотной характеристики устройства селекции сигналов движущихся целей.....	546
21.6. Выводы.....	548
22. Статистическое моделирование радиолокационных систем.....	550
22.1. Вводные замечания.....	550
22.2. Статистические модели отраженных сигналов.....	551
22.3. Метод экстремальных статистик и генерирование «белого» шума на ЦВМ.....	559
22.4. Качественные показатели обнаружения когерентно-импульсной радиолокационной станции обзора земной поверхности.....	562
22.5. Качественные показатели обнаружения когерентно-импульсной радиолокационной станции селекции движущихся целей.....	565
22.6. Выводы.....	568
Заключение.....	569
Список литературы.....	570



## Магазины Москвы и городов Московской области

**Торговый Дом  
«Библио-Глобус»**  
Адрес: ул. Мясницкая, д. 6.  
Тел.: 928-35-67.

**Магазин  
«Московский Дом Книги»**  
Адрес: Новый Арбат, д. 8.  
Тел.: 203-82-42, 291-78-32.

**Магазин  
«Дом технической книги»**  
Адрес: Ленинский пр-т, д. 40.  
Тел.: 137-60-38, 137-60-39.

**Магазин  
«Дом книги в Медведково»**  
Адрес: Заревый проезд, д. 12.  
Тел.: 478-48-97.

**Магазин  
«Молодая Гвардия»**  
Адрес: ул. Б. Полянка, д. 28.  
Тел.: 238-26-86, 238-50-01.

**Торговый дом книги «Москва»**  
Адрес: ул. Тверская, д. 8, стр. 1.  
Тел.: 797-87-16, 229-73-55.

**Магазин  
«Дом книги на Соколе»**  
Адрес: Ленинградский пр-т,  
д. 78, к. 1.  
Тел.: 152-82-82, 152-45-11.

**Магазин  
«Дом книги на Войковской»**  
Адрес: Ленинградское шоссе,  
д. 13, стр. 1.  
Тел.: 150-99-92, 150-69-17.

**Магазин  
«Дом книги на Новой»**  
Адрес: Шоссе Энтузиастов, д. 24/43.  
Тел.: 361-68-34, 362-25-16.

**Магазин  
«Дом книги в Сокольниках»**  
Адрес: ул. Русаковская, д. 27.  
Тел.: 264-81-21.

**Магазин  
«Дом книги»**  
Адрес: г. Подольск, пр-т Ленина, д. 158.  
Тел.: (276) 300-76.

## Магазины городов России и ближнего зарубежья

**ИП Кудашова Н.Н.  
(магазин «Кругозор»)**  
Адрес: г. Смоленск,  
Октябрьской революции 13.  
Тел.: (4812) 65-86-65.

**Магазин «Санкт-Петербургский  
Дом Книги»**  
Адрес: г. Санкт-Петербург,  
Невский проспект, д. 28.  
Тел.: 318-49-15, 312-01-84.

**ООО «Топ-книга»**  
Адрес: г. Новосибирск.  
Тел.: 36-10-26, 36-10-27.

**ООО «КИВИ»**  
Адрес: г. Самара, ул. Чкалова, 100.  
Тел.: 42-96-22, 42-96-32, 42-96-28,  
42-96-30.

**ИП Головинова О. Е.**  
Адрес: г. Новокузнецк,  
ул. Воробьевского, д. 13.  
Тел.: 74-59-49.

**ЧП Кудь А.Я.**  
Адрес: г. Харьков  
Тел.: (057) 754-91-16, e-mail: k-k@sca-  
na.com.ua

**ГУП Красноярский магазин  
«Академкнига» торговой фирмы  
«Академкнига» РАН**  
Адрес: г. Красноярск, ул. Сурикова, д. 45.  
Тел.: 27-03-90.

**Магазин «Радар»**  
Адрес: г. Тюмень, ул. Республика, д. 143.  
Тел.: 22-81-95.

**ИП Ольхова О. Г.**  
Адрес: г. Н. Новгород,  
ул. Беневоля, д. 71, кв. 39.  
Тел.: (8312) 17-33-49.

**ГУП «Чувашский республиканский  
бибколлектор» Госкомпечати  
Чувашской Республики**  
Адрес: г. Чебоксары, ул. Петрова, д. 7.  
Тел.: (8335) 62-15-67.

**ООО «Книжное Дело»**  
Адрес: г. Томск,  
ул. Беллинского, д. 55/НТБ ТПУ.  
Тел.: (3822) 41-57-72.

**МУП «Книжный магазин № 14»**  
Адрес: г. Екатеринбург,  
ул. Челюскинцев, д. 23.  
Тел.: (3432) 53-24-89.

**«Дом книги»**  
Адрес: г. Екатеринбург, ул. Валера, д. 12.  
Тел.: (3432) 71-79-86, 58-14-84.

**ОАО «Уралкнига»**  
Адрес: г. Екатеринбург,  
ул. Аршинская, д. 23а.  
Тел.: (3432) 71-25-24.

**ГУП «Облбнбколлектор»**  
Адрес: г. Екатеринбург,  
ул. Первомайская, д. 70.  
Тел.: (3432) 74-27-47.

**ООО «Тезей»**  
Адрес: г. Мурманск,  
ул. Спердлова, 40/2.  
Тел.: (8152) 43-76-96.

**ООО «НОВЫЙ ИМПУЛЬС»**  
Адрес: г. Тольятти,  
ул. Дзержинского, д. 70.  
Тел.: 32-74-85.

**ООО «ДОМО «ГЛОБУС»**  
Адрес: г. Казань,  
пр-д Коммуны, д. 10/72.  
Тел.: 36-74-81; 99-50-74.

**ООО «Дом книги»**  
Адрес: г. Нижний Новгород,  
ул. Советская, д. 14.  
Тел.: (8312) 77-52-07, 77-52-08.

**ООО «Торговый Дом «Барс»**  
Адрес: г. Рязань,  
Московское шоссе, 5-а.  
Тел.: (4912) 93-29-54.

**Книготорговая Группа  
«ПродалитЪ»**  
Адрес: г. Иркутск,  
ул. Байкальская, 172.  
Тел.: (3952) 51-23-31, 241-777,  
241-786.

*Серия «Библиотека инженера»*

Литюк Виктор Игнатьевич  
Литюк Леонид Викторович

## **Методы цифровой многопроцессорной обработки ансамблей радиосигналов**

Ответственный за выпуск  
В. Митин

Обложка  
Е. Холмский

ООО «СОЛОН-ПРЕСС»  
123242, г. Москва, а/я 20  
Телефоны:  
(495) 254-44-10, (495) 252-36-96, (495) 252-25-21

Сайт издательства «СОЛОН-Пресс»: [www.solon-press.ru](http://www.solon-press.ru)  
E-mail: [solon-avtor@coba.ru](mailto:solon-avtor@coba.ru)

По вопросам приобретения обращаться:  
ООО «АЛЪЯНС-КНИГА КТК»  
Тел: (495) 258-91-94, 258-91-95, [www.abook.ru](http://www.abook.ru)

ООО «СОЛОН-ПРЕСС»  
103050, г. Москва, Дегтярный пер., д. 5, стр. 2  
Формат 60×88/16. Объем 37 п. л. Тираж 1000 экз.  
Отпечатано в ООО «Арт-Диал»  
143983, МО, г. Железнодорожный, ул. Керамическая, д. 3  
Заказ № 34